புள்ளியியல் முறைகள்

ஆர். இராமகிருட்டிணன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—489

புள்ளியியல் முறைகள்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

ஆர். இராமகிருட்டிணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
துணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை,
இராஜபாளையம் ராஜுக்கள் கல்லூரி,
இராஜபாளையம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — August 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 489

© Tamil Nadu Text Book Society

Statistical Methods

R. Ramakrishnan

Price Rs. **15-50**

"Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi."

Printed by
V. P. S. Printers,
Madras-5.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 489ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 524 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

முன்னுரை

புள்ளியியல் முறைகள் தற்காலத்தில் பயன்படுத்தப் படாத துறைகளே யில்லையென்று கூறுமளவிற்குப் புள்ளியியல் முறைகளின் பயன்பாடுகள் அதிகரித்து வருகின்றன. பொருளாதாரம், வணிகம், தொழில், வியாபாரம் ஆகிய துறைகளில் புள்ளியியல் முறைகளின் முக்கியத்துவம் எல்லோராலும் உணரப்பட்டுவருவதன் காரணமாக, பல்கலைக் கழகங்களிலும் புள்ளியியல் பாடம் ஒரு முக்கிய பாடமாகக் கற்பிக்கப்பட்டு வருகின்றது. பொருளாதார, வணிக, தொழில்நிர்வாகத் துறைகளைச் சார்ந்த மாணவர்களுக்குப் புள்ளியியல் என்பது ஒரு முக்கிய பாடமாக இருந்தபோதிலும், போதிய கணித அடிப்படை யில்லாத காரணத்திஞல் இத் துறைகளைச் சார்ந்த பெரும்பாலான மாணவர்கள் இதனைக் கற்கச் சிறிது சிரமப்பட நேரிடுகிறது. இவ்வாறு கணித அடிப்படையில்லாத மாணவர்களின் சிரமத்தையும், புள்ளி யியல் பாடம் பற்றிய அச்சத்தையும் நீக்கும் வண்ணம் மிகவும் எளிய நடையில் யாவரும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியவாறு இந்நூலினை எழுத எல்லாவகை முயற்சிகளும் மேற்கொள்ளப்பட்டிருக்கின்றன. தமிழ் நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பி.ஏ., பி.காம்., பி.பி ஏ, எம்.ஏ., ஆகிய பட்டப்படிப்புகளுக் கேற்றவாறு இந்நூல் எழுதப்பட்டிருக் கின்றது.

ஆர். இராமகிருட்டிணன்

பொருளடக்கம்

1. புள்ளியியல் முறைகள்

(Statistical Methods)

புள்ளியியலின் வளர்ச்சி (Growth of Statistics)

புள்ளியியல் (Statistics) என்பது முதன்முதல் கி.பி. பதினெட்டாம் நூற்றாண்டில் எண்ணுலான விவரங்களைச் சேகரித்து, அவற்றைப் பாகுபடுத்தி, வரிசைப்படுத்தும் முறையினைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆனால், எண்ணுலான விவரங்கள் (Numerical Data) மிகப் பழங்காலந் தொட்டுச் சேகரிக்கப்பட்டு வந்திருக்கின்றன. பழங்குடி மக்கள் நாகரிகமடைந்து, அரசு அமைத்து, ஆளத் தொடங்கிய கால முதல் ஆளுநர்கள் தங்களின் அரசாங்க அலுவல்களுக்குப் பயன்படத் தக்கவாறு எண்ணுலான விவரங்களைச் சேகரித்து வந்திருக்கின்றனர். மக்கள்தொகைக் கணிப்பு, சொத்துகள் பற்றிய விவரம் ஆகியவற்றின் அவசியத்தை அந்நாளிலேயே ஆளுநர்கள் உணர்ந்து, அவ்விவரங்களைச் சேகரித்து வந்திருக்கின்றனர். நம் பாரத நாட்டில் சுமார் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகட்கு முன்னரே இத்தகைய விவரங்கள் மிகச் சிறந்த முறையில் சேகரிக்கப்பட்டுள்ளன. மௌரியர்கள் ஆட்சிக் காலத்தில் மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்பு முறையும், பிறப்பு, இறப்பு விவரங்களைப் பதிவு செய்யும் முறையும் கடைப்பிடிக்கப்பட்டு வந்திருக்கின்றன. மொகலாய அரசராகிய அக்பரின் ஆட்சிக் காலத்தில் புள்ளி விவர அளவெடுப்பு (Statistical Survey) நடைபெற்று வந்திருப்பதாக வரலாற்று நூல்கள் கூறுகின்றன. ஜெர்மனி நாட்டில் பதினெட்டாம் நூற்றாண்டின் இறுதியிலிருந்தே மக்கள்தொகை, தொழில் வளம், விவசாய உற்பத்தி ஆகியவை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மிகவும் ஒழுங்கான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்பு மட்டுமல்லாது, பிறப்பு, இறப்பு, திருமணம் பற்றிய விவரங்களும் சேகரிக்கப்பட்டு வந்திருக்கின்றன.

இத்தகைய எண்ணாலான புள்ளி விவரங்களின் உதவியால் இரு நாடுகளின் சிறப்பியல்புகளை ஒப்பிட்டுப்பார்க்க முடிந்தது. பின்னர், பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டின் தொடக்கத்தில்தான் இவ்வாறு சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஆராயும் முறைகள் விரிவுபடுத்தப்பட்டன. கி.பி. 1801ஆம் ஆண்டில் இங்கிலாந்து நாட்டில் முதன்முதலாக மக்கள்கணிப்பு (Census) செய்யப்பட்டது. பின்னர், காலப்போக்கில் புள்ளியியல் முறைகள் எண்ணாலான விவரங்களைச் சேகரிக்க மட்டும் பயன்படுத்தப்படாமல், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைப் பகுதிபடுத்தி ஆராய்ந்து அவற்றின் முடிவுகளை வெளியிடப் பயன்படும் முறைகளாகவும் பயன்படுத்தப்பட்டன. புள்ளி விவரங்களும், புள்ளியியல் முறைகளும் அரசாங்க அலுவல்களுக்கு மட்டுமென்றல்லாது, தொழில், வணிகம், பொருளாதாரம், அறிவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்பட்டன.

புள்ளியியலின் வரையறைகள் (Definitions of Statistics)

புள்ளியியல் முறைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட துறையென்றல்லாது பல்வேறு துறைகளிலும் பயன்படத்தக்க முறையில் அமைந்திருப்பதால் புள்ளியியலை எளிய முறையில் முழுமையாக வரையறுத்துக் கூறுவதும் எளிதாகப்படவில்லை. பல்வேறு புள்ளியியல் பேரறிஞர்களும் பல்வேறு முறைகளில் புள்ளியியலை வரையறுத்துக் கூறியுள்ளனர். அவற்றுள் சிலர் புள்ளி விவரங்களைப் பற்றிய விளக்கங்களையும், மற்றும் சிலர் புள்ளியியல் முறைகளைப் பற்றிய விளக்கங்களையும் வரையறுத்துள்ளனர். ‘ஒரு நாட்டு மக்களின் நிலைமைகளை விளக்கக்கூடிய, எண்களாலான அல்லது எண்களின் பட்டியல்களாலான அல்லது இனவழிப் பாகுபாட்டுடன் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களே புள்ளி விவரங்களாகும்’ என்று வெப்ஸ்டர் (Webster) என்ற அறிஞர் கூறியுள்ளார். இவ்விளக்கத்தின்படி புள்ளி விவரங்கள் ஒரு நாட்டுமக்களின் நிலைமைகளுடன் தொடர்பான விவரங்களை மட்டுமே குறிப்பிடுகின்றன. ஆனால் தற்காலத்தில் மனித வாழ்வுடன் தொடர்புள்ள எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டுப் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டு வருவதால் வெப்ஸ்டரின் இந்த வரையறை ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கதாக அமையவில்லை.

ஏ. எல். பௌலி (A. L. Bowley) என்ற அறிஞர் புள்ளியியலைப் பற்றிப் பலவகையான வரையறைகள் கொடுத்துள்ளார்.

ஆனால், அவற்றுள் பெரும்பாலானவை புள்ளியியலின் சில குறிப்பிட்ட தன்மைகளை மட்டுமே விளக்குவதாக அமைந்திருக்கின்றன. மற்றும் சில, புள்ளியியலைப் பற்றிய முழுமையான விளக்கத்துடன் அமையவில்லை. 'புள்ளியியல் என்பது ஓருயிர் போல் இயங்கும் சமூக அமைப்பில் ஏற்படும் எல்லா வெளித் தோற்றங்களையும் அளவுபடுத்தி ஆராயும் அறிவியல் ஆகும்' என்பது புள்ளியியலைப் பற்றிய பௌலியின் வரையறைகளுள் ஒன்றாகும். ஆனால் இவ் வரையறையானது, புள்ளியியல் முறைகள் சமூகவியல் (Sociology) என்ற ஒரே துறையில் மட்டும் பயன்படத்தக்கவை என்று எண்ணத்தக்க வகையில் அமைந்துள்ளது. தற்காலத்தில் புள்ளியியல் முறையில் பயன்படுத்தப் படாத துறையே இல்லையெனக் கூறும் அளவிற்குப் புள்ளியியலின் எல்லை மிகப் பரந்து கிடக்க, பௌலியின் மேற்கண்ட வரையறையானது புள்ளியியலைச் சமூகவியல் என்ற ஒரே ஒரு துறைக்குள் அடக்கிப் புள்ளியியலின் எல்லையைக் குறுகியதாக்கி விடுவதால் அவ்வரையறை சற்றும் பொருத்தமுடையதன்று என்று நாம் உணர்கிறோம். 'எண்ணிக்கையின் அறிவியல் (Science of Counting) என்று புள்ளியியலை அழைக்கலாம்' என்பது பௌலியின் மற்றொரு வரையறையாகும். இவ் வரையறையானது புள்ளியியலின் எல்லையை ஒரே ஒரு துறைக்குள் அடக்கவில்லையாகையால் இதை முந்திய வரையறையைவிடச் சிறந்ததாகக் கருதலாம். புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படும்போது பெரும்பாலும் எண்ணிக்கை முறைகளே பயன்படுத்தப் படுகின்றன. ஆனால், எண்ணிக்கை முறைகளைப் பயன்படுத்த முடியாத துறைகளிலும், எண்ணிக்கை முறைகளைப் பயன்படுத்தத் தேவையற்ற துறைகளிலும்கூடத் தற்காலத்தில் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டு, அத் துறைகளில் பின்னர் வர இருக்கும் போக்குகள் மதிப்பிடப்பட்டும் முன் கூட்டி அறிவிக்கப்பட்டும் வருகின்றன. இவ்வாறு, முன் சேகரிக்கப்பட்ட செய்திகளையும், புள்ளி விவரங்களையும் ஆராய்ந்து, அவ்வாராய்ச்சியின் அடிப்படையில் பின்னர் வர இருக்கும் போக்குகளை (Trends) மதிப்பிடுதலும் (Estimation), முன்கூட்டி அறிவித்தலும் (Forecast), புள்ளியியலின் ஒரு பணியேயாகும். ஆகவே, 'எண்ணிக்கையின் அறிவியலே புள்ளியியல்' என்ற வரையறையும் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது.

'புள்ளியியல் என்பது மதிப்பீடுகளையும் (Estimates) நிகழ் தகவுகளையும் (Probabilities) கொண்டமைந்த ஓர் அறிவியலாகும்' என்று போடிங்டன் (Boddington) என்பவர் கூறியுள்ளார். பின்னர் வர இருக்கும் போக்குகளை மதிப்பிடுதலும்,

நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் காணுதலுமே புள்ளியியலின் முக்கியப் பணிகளாயிருப்பினும், இவ்விரு பணிகளும் புள்ளியியலின் மூலம் இறுதி முடிவுகளைப் பெறப் பயன்படும் இரு முறைகளைக் குறிப்பிடுகின்றனவேயன்றி, புள்ளியியலின் எல்லாப் பணிகளையும் முழுமையாக விளக்கவில்லை.

'புள்ளியியல் என்பது பயிற்சி பெற்ற ஊழியர்களைக் கொண்ட ஓர் அமைப்பினால் புள்ளி விவரங்களை எண்ணுகின்ற ஒரு 'கூட்டுறவு எண்ணிக்கை அறிவியல்' (Science of Cooperative Counting)'' என்பது புள்ளியியலின் மற்றொரு வரையறையாகும். பொதுவாகப் புள்ளிவிவர ஆய்வுத் தளங்கள் பரந்து கிடக்குமாதலாலும், சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்கள் மிகப் பெரிய எண்ணிக்கைகளிலிருக்குமாதலாலும், புள்ளி விவர ஆய்வாளர் (Statistical Investigator) மட்டும் தனியே புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல் என்பது முடியாத செயலாகும். ஆகவே, புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறைகளில் பயிற்சி பெற்றவர்களைக் கொண்டுதான் பெரும்பாலும் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு வருகின்றன. நம் நாட்டு மக்கள்தொகைக் கணிப்பு (Census) விவரங்கள் பயிற்சி பெற்றவர்களால் சேகரிக்கப்படுவதை நாம் அறிவோம். ஆனால், இவ் வரையறையும் எண்ணிக்கையை மட்டும் கொண்டு அமைந்திருப்பதால் இதுவும் புள்ளியியலை நன்கு விளக்குவதாக அமையவில்லை.

பெரும்பாலும் ஓர் எண்ணற்ற இனத்தொகுதி (Infinite Population) அல்லது மிகப் பெரிய எண்ணிக்கை கொண்ட இனத் தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்களைச் சேகரித்து ஆராய்ந்து முடிவு கூற புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுகின்றன. ஆனால், மிகப் பெரிய எண்ணிக்கையிலான விவரங்களிலிருந்து நேரடியாக எந்த முடிவான கருத்தையும் பெற முடியாது. ஆகவே, அவ் விவரங்களைச் சுருக்கி மிக எளிய அமைப்புடன் கூடிய, சாதாரண மனிதனும் அறிந்து கொள்ளத்தக்க எண்களாக மாற்றினால் அவற்றிலிருந்து அவை குறிப்பிடுகின்ற இனத்தொகுதியின் போக்கினை ஓரளவு மிக எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். இத்தகைய எண்களுக்குப் 'புள்ளி விவர மாறிலிகள்' (Statistical Constants) என்று பெயர். இந்த மாறிலிகளுள் மிகவும் முக்கியமானதும், புள்ளியியலில் அதிகமாகப் பயன்படக்கூடியதும், பாமர மக்களும் புரிந்துகொள்ளக் கூடியதுமாகிய 'சராசரி' (Average) புள்ளியியல் மாறிலிகளுள் தலைசிறந்ததாகக் கருதப்

படுகிறது. ஓர் இனத் தொகுதியிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி (geometric mean), இசைச் சராசரி (harmonic mean) இடைநிலையளவு (median), முகட்டளவு (mode) ஆகிய பலவகையான சராசரிகளைப் புள்ளியியல் முறைகளின்மூலம் பெற முடியும். ஓர் இனத் தொகுதியின் தன்மையை அறிந்துகொள்ள இச் சராசரிகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றதோடு, இச் சராசரிகளில்லாமல் அந்த இனத் தொகுதியின் தன்மையை முழுமையாகப் புரிந்துகொள்ளவே முடியாது. சராசரிகளின் இத்தகைய முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்துதான் பௌலி என்பவர் 'சராசரிகளின் அறிவியலே புள்ளியியலாகும்' என்று மற்றுமொரு வரையறையைக் கூறியுள்ளார். ஆனால், சராசரிகளின் மூலம் ஓர் இனத் தொகுதியின் தன்மையை ஓரளவு அறிந்துகொள்ள முடியுமே தவிர முழுமையாக அளவிட முடியாது. மேலும், சராசரிகளின் மூலம் மட்டும் பெறப்படுகின்ற ஓர் இனத் தொகுதியின் தன்மையைப் பற்றிய கருத்து அதன் உண்மையான தன்மையைவிட முற்றிலும் மாறுபட்டிருக்கவும் முடியும். இரண்டு இனத் தொகுதிகள் ஒரே சராசரி மதிப்புகளைக் கொண்டு அமைந்திருக்கலாம். ஆயினும், அவற்றின் தன்மைகள் முற்றிலும் மாறுபட்டிருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு கல்லூரி விடுதிகளிலுள்ள மாணவர்களின் மாதச் சராசரிச் செலவுகள் சமமாயிருக்கலாம். ஆனால், இந்த விவரத்தைமட்டும் கொண்டு இரு விடுதிகளிலும் மாணவர்கள் சமமாகச் செலவிடுவதாக எண்ணிவிட முடியாது. ஒரு விடுதியில் மாணவர்களின் மாதச் செலவுகளின் வீதம் ரூ. 70 முதல் ரூ. 90 வரையிலும் மாதச் சராசரி செலவு ரூ. 80 ஆகவும் இருக்கலாம். ஆனால் இரண்டாவது விடுதியில் பெரும்பாலான மாணவர்களின் மாதச் செலவுகள் ரூ. 50 முதல் ரூ. 60 வரையிலும் ஒரு சில மாணவர்கள் மாதம் ரூ. 150 முதல் 200 வரை செலவிடுவதாலும் மாதச் சராசரி ரூ. 80 ஆக உயர்ந்திருக்கலாம். ஆகவே, சராசரிகளின் அடிப்படையில் மட்டும் பெறப்படுகின்ற கருத்துகள் முற்றிலும் தவறானவையாகவும் இருக்க முடியும் என்று தெரிகிறது. இத்தகைய தவறுகள் ஏற்படாதிருக்க வேண்டுமாயின் சராசரிகளுடன் மற்றப் புள்ளிவிவர மாறிலிகளும் தெரிந்திருக்க வேண்டும். ஆகவே, 'சராசரியின் அறிவியலே புள்ளியியல்' என்ற கூற்று, புள்ளியியலின் முழுப் பொருத்தமுள்ள வரையறையாகாதென்பது தெளிவுபடுகின்றது.

'மதிப்பீடுகளின் பகுப்பாய்வு அல்லது எண்ணெடுப்பு அல்லது சேகரிப்பிலிருந்து பெறப்பட்ட விளைவுகளிலிருந்து

திரளான, இயற்கையான அல்லது சமூக இயற்பாட்டினைப் பற்றி முடிவெடுக்கும் முறையே புள்ளியியல் என்னும் அறிவியலாகும்' என்று கிங் (King) என்பவர் புள்ளியியலைப் பற்றி வரையறுத்துக் கூறுகிறார். இவ் வரையறை விரிவானதாக இல்லாததோடு, புள்ளியியலின் குறியிலக்கு எல்லையையும் குறுகியதாகக் காட்டுகிறது. இருப்பினும் நடைமுறைத் தேவைகளுக்கு இவ் வரையறை போதுமானதாக உள்ளது.

'எண்ணலான விவரங்களைச் சேகரித்து, இனப் பாகுபடுத்தி, பட்டியலமைத்து, அவற்றின் அடிப்படையில் ஓர் இயற்பாட்டினை விளக்குவதும், விவரிப்பதும், ஒப்பிடுவதுமே புள்ளியியலாகும்' என்று லோவிட் (Lovitt) என்பவர் கூறுகிறார். இக் கூற்று, புள்ளியியலைப் புள்ளியியல் முறைகளில் எளிய அறிவியல் விளக்கமாகக் குறிப்பிடுவதால் லோவிட் அவர்களின் இந்த வரையறை ஓரளவு ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதாகவுள்ளது.

'கணக்கெடுப்புச் செயல்படுகின்ற எந்த ஒரு துறையின் தன்மையினையும் விளக்குவதற்காகப் பயன்படுகின்ற எண்ணலான விவரங்களைச் சேகரித்தல், இனப் பாகுபாடு செய்தல், வகைக்குறிப்புச் செய்தல், ஒப்பிடுதல், விளக்கம் செய்தல் ஆகியவை பற்றிய முறைகளை விளக்குகின்ற அறிவியலே புள்ளியியலாகும்' என்று பேராசிரியர் செலிக்மன் (Prof. Seligman) விவரிக்கிறார். இவரது இந்த வரையறை எளியதாகவும், சுருக்கமாகவும், எளிதில் புரிந்துகொள்ளக்கூடியதாகவும், நிறைவு பெற்றதாகவும் இருப்பதால் இதைப் புள்ளியியலின் சிறந்த வரையறையாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். இருப்பினும், ஹொரேஸ் செக்ரிஸ்ட் (Horace Secrist) என்பவர் அளித்துள்ள வரையறையானது இதனினும் சிறந்ததாகவும், மிகவும் விரிவானதாகவும் அமைந்துள்ளது. 'பல்வேறு காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவு பாதிக்கப்பட்டவையும், எண்ணளவையாக மாற்றப்பட்டு, எண்ணெடுப்புச் செய்யப்பட்டு அல்லது நியாயமான அளவு தரமான சரிநிலையில் மதிப்பிடப்பட்டு, முன்னதாகத் தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நோக்கத்திற்காக ஒழுங்கான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளவையுமான திரளான விவரங்களே புள்ளியியலாகும்' என்பது செக்ரிஸ்ட் கூறியுள்ள வரையறையாகும். இவ் வரைமுறை புள்ளி விவரங்களின் தன்மைகளை மிகவும் விரிவாகவும், விளக்கமாகவும் வரையறுத்துக் கூறுகின்றது. பேராசிரியர் செலிக்மனுடைய வரைமுறை, புள்ளியியல் முறைகளின் தன்மைகளை வரையறுத்துக் கூறுகின்றது.

இவ்விரு வரைமுறைகளும் இணைந்த ஒரு வரைமுறையைப் புள்ளியியலின் சிறந்த வரைமுறை இலக்கணமாகக் கொள்ளலாம்.

புள்ளியியலின் பிரிவுகள் (Division of Statistics)

புள்ளியியலை (i) புள்ளியியல் முறைகள் (Statistical Methods), (ii) பயன் முறைப் புள்ளியியல் (Applied Statistics) என இரண்டு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். கணக்கெடுக்கப்படும் துறையினைச் சார்ந்த விவரங்களைச் சேகரித்தல், ஆராய்தல், ஆய்வின் முடிவுகளை விளக்கிக் கூறுதல் ஆகியவற்றில் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தக்கூடிய பொதுவான தத்துவங்களும், செய்முறை நுணுக்கங்களும், செயல் முறைகளும், அவற்றின் விதிகளும் புள்ளியியல் முறைகள் என்ற பிரிவின் கீழ் விளக்கப்படுகின்றன. பயன் முறைப் புள்ளியியல் என்ற பிரிவு, மீண்டும் விளக்கப் பயன் முறைப் புள்ளியியல் (Descriptive Applied Statistics), அறிவியல் பயன்முறைப் புள்ளியியல் (Scientific Applied Statistics) என இரு வகையாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. நிகழ்கால அல்லது கடந்த காலத்தைச் சார்ந்த தெரிந்த விவரங்களைப் பயன்படுத்துகின்ற புள்ளியியல் முதல்வகையைச் சார்ந்ததாகும். உதாரணமாக, தொழிற் புள்ளியியலில் (Business Statistics) ஒரு தொழிலைச் சார்ந்த தற்கால, கடந்தகாலத் தொழில்பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து, ஆராய்ந்து அத் தொழில்பற்றிய விவரங்களை விளக்கமாக வெளியிடவேண்டிய முறைகள் விவரிக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு வெளியிடப்படுகின்ற விவரங்களிலிருந்து பல்வேறு தொழிற் பிரச்சினைகளைப் பற்றிய முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, தொழிற் புள்ளியியலானது பயன் முறைப் புள்ளியியல் வகையைச் சார்ந்ததாகும். அளவின விவரங்களின் அடிப்படையில் பொருத்தமான புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி, உளவியல் மற்றும் பௌதிக விதி முறைகளை வகுக்கின்ற முறைகளை விளக்குகின்ற புள்ளியியலானது இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்த அறிவியல் பயன் முறைப் புள்ளியியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, தொழிற் புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு ஆராய்ந்து எடுக்கப்படும் முடிவுகளைப் பயன்படுத்திப் பின்னர் வர இருக்கும் தொழிற் போக்கினை முன்கூட்டி அறிவிக்கக் கூடிய தொழில் முன்கணிப்பு (Business Forecasting) முறையினைப் புள்ளியியல் முறைகளின் மூலம் வகுக்கலாம். இவ்வாறு, தொழில் முன்கணிப்பிற்கான விதிமுறையை வகுக்கின்ற புள்ளியியலாவது இரண்டாவது வகையைச்

சார்ந்த அறிவியல் பயன்முறைப் புள்ளியியலாகும். இது போன்று, புள்ளியியல் முறைகள் பௌதிகம், இரசாயனம், தாவரவியல், வானியல், உளவியல், விவசாயம், மருத்துவம், வணிகவியல், பொருளாதாரம் இன்னும் பல்வேறு துறைகளிலும் பலதிறப்பட்ட விதி முறைகளை வகுப்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப்போது பல்வேறு துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்ற புள்ளியியல் முறைகள் யாவும் அறிவியல் பயன்முறைப் புள்ளியியல் வகையைச் சார்ந்தவையாகும்.

புள்ளியியலின் நோக்கங்கள் (Objects of Statistics)

1. சுருங்கச் சொல்லி விளங்க வைத்தல்: ஏராளமான சொற்களையும், சொற்றொடர்களையும் கொண்டு பல பக்கங்களில் விளக்கப்பட்டுள்ள ஒரு விவரத்தைப் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டியோ அல்லது எண்களாலான விவரமாக மாற்றியோ அல்லது அவ் விவரத்திற்குரிய புள்ளியியல் மாறிலிகளின் மூலமாகவோ ஒரு சில சொற்களை மட்டும் பயன்படுத்தி விளக்கமாக, முதல் பார்வையிலேயே எளிதில் புரிந்துகொள்ளும் வண்ணம் செய்துவிட முடியும். இதுவே புள்ளியியலின் தலையாய நோக்கமாகும்.

2. பெருவாரியான எண்களாலும் சொற்களாலுமான விவரங்களைச் சுருக்கி இனப் பாகுபாடு செய்தல்: மக்கள்தொகைக் கணிப்பின் மூலம் கிடைக்கப் பெற்ற கோடிக்கணக்கான மக்கள் பற்றிய சீர்படா விவரங்களிலிருந்து (raw data) நேரடியாக எதுவும் புரிந்துகொள்ள முடியாது. இத்தகைய விவரங்களை ஆண் - பெண், கற்றோர் - கல்லாதார், மணமானவர் - மணமாகாதவர், வேலையிலிருப்போர் - வேலையில்லாதவர், இப்படியாகப் பற்பல இனப் பாகுபாடுகளாகப் பிரித்துக் கூறுவது புள்ளியியலின் பணிகளுள் ஒன்றாகும். இவ்வாறு பாகுபடுத்திக் கூறப்படுவதால் உண்மையான விவரங்களை நொடிப் பொழுதில் விளக்கமாகப் புரிந்துகொள்ள முடிகிறது.

3. ஒப்புமைக்குரிய இனங்களைப் பற்றிய விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்கு, எளிதான வகையில் ஒப்பிடுவதற்குத் தேவையான புள்ளி விவரங்களுடன் அளிப்பது புள்ளியியலின்

மற்றொரு நோக்கமாகும். ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகையில் ஆண்-பெண் ஆகிய இருபாலாரையும் பற்றிய விவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல் மிகவும் தேவையான ஒன்ருகும். ஆகவே, மக்கள்தொகை கணிப்பின் விவரங்களை அளிக்கும் போது ஆண்-பெண் ஆகியோர் சம்பந்தப்பட்ட ஒப்பிட வேண்டிய விவரங்களை அடுத்தடுத்து அமைத்துக் கூறுவதன் மூலம் ஒப்புமையை எளிதில் புரிந்துகொள்ளுமாறு செய்ய முடியும். அல்லது ஆண்-பெண் ஆகியோருக்குரிய சராசரிகளையோ அல்லது பரவுகைக் கெழுக்களையோ அல்லது வேறு எந்தப் புள்ளியியல் மாறிலிகளையோ புள்ளியியல் முறைகளின் மூலம் கணித்து, அவற்றை எளிதில் ஒப்பிடக்கூடியவண்ணம் அடுத்தடுத்து அமைத்துக் கூறுவதன்மூலம் ஒப்புமையை எளிதாக்கலாம்.

4. அரசாங்க அதிகாரிகளுக்கும், வியாபார அல்லது தொழில் சம்பந்தப்பட்ட அதிகாரிகளுக்கும் ஏற்படுகின்ற பொருளாதார அல்லது அரசியல் சார்பாக எழுகின்ற பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கவும், வினுக்களுக்கு விடை காணவும், அவற்றின் மூலம் பொதுவான கொள்கைகளை நிர்ணயிக்கவும் புள்ளியியல் பெரிதும் துணைபுரிகின்றது.

5. சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களையும் செய்திகளையும் ஆராய்ந்து அவ்வாராய்ச்சியின் அடிப்படையில் பின்னர் வர இருக்கும் போக்குகளை (trends) மதிப்பிடுதல் அல்லது முன் கூட்டிக் கூறுதல் புள்ளியியலின் மற்றொரு முக்கியமான பணியாகும். உதாரணமாக, ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் கடந்த ஆண்டுகளின் உற்பத்திப் பொருள்களின் மதிப்புகளும் விற்பனை மதிப்புகளும் அடங்கிய விவரங்களை ஆராய்ந்து, அவ்வாராய்ச்சியின் அடிப்படையில் புள்ளியியல் முறைகளின் துணைகொண்டு எதிர் வரும் ஆண்டுகளின் விற்பனை மதிப்புகளின் எதிர்பார்ப்புகளை (expectations) மதிப்பிட்டு அவற்றிற் கேற்ப உற்பத்தியைக் கட்டுப்படுத்த முடியும்.

புள்ளியியலின் குறியிலக்கும் பயன்பாடுகளும் (Scope and Utility of Statistics)

ஓர் அறிவியலின் குறியீடானது, அவ்வறிவியலின் தத்துவங்களும், விதிமுறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்ற ஏனைய அறிவியல் விரிவுகளினுல் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது. புள்ளியியலின் தத்துவங்களும் முறைகளும் பெருவாரியான எண்

சார் விவரங்களைக் கையாள்கின்ற எந்த அறிவியலையும் கற்றுக் கொள்வதற்கான கருவிகளாகப் பயன்படுகின்றன. புள்ளியியல் முறைகள் பௌதிக, இயற்கை விஞ்ஞானங்களில் மட்டுமல்லாது சமூக மற்றும் ஒழுக்க அறிவியல்களிலும் மிகவும் பயனுள்ள முறையில் பயன்படுத்தப்படுவதால் புள்ளியியலின் குறியிலக்கு மிகவும் பரந்து, விரிந்து காணப்படுகிறது.

பதினேழாம் நூற்றாண்டில் நிகழ் தகவுக் கொள்கை (Theory of Probability) வகுக்கப்பட்ட காலந்தொட்டே புள்ளியியலும் கணிதமும் புள்ளியியல் முறைகளில் இணைந்தே செயல்பட்டு வருகின்றன. இவ்வாறு கணிதமும் புள்ளியியலும் இணைந்து கணிதப் புள்ளியியலாக (Mathematical Statistics) வளர்ச்சி பெற்று வருவதோடு, கடந்த நூறு ஆண்டுகளாகப் பொருளாதாரமும் இவற்றுடன் சேர்ந்து செயல்பட்டு வருகின்றது. இதன் விளைவாகப் பொருளாதாரக் கொள்கைகள் மிக விரைவாக வளர்ச்சி பெற்றிருப்பதோடு கணிதப் பொருளாதாரம் (Mathematical Economics) என்ற புதியதோர் துறையும் பிறந்துள்ளது. மற்றும் வேதியியல், பௌதிகவியல், வானியியல், விலங்கியல், உயிரியல், உடலியல், உளவியல், புவியியல், மருத்துவவியல் போன்ற பல்வேறு அறிவியல் துறைகளிலும் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. காலநிலையினை முன்கூட்டியே அறிவிக்கப் பருவ நிலையியலிலும், மற்றும் ஆயுள் காப்புறுதித் துறையிலும் புள்ளியியல் முறைகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

புள்ளியியலும் பொருளாதாரமும் (Statistics and Economics)

செல்வத்தை உற்பத்தி செய்வது பற்றியும், உற்பத்தி செய்யப்பட்ட செல்வத்தைப் பங்கீடு செய்வது பற்றியும் மற்றும் மனித சமுதாயத்துடன் தொடர்புடைய பல்வேறு பிரச்சினைகள் பற்றியும், செல்வத்தைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு செல்வத்தை மேலும் மேலும் பெருக்கலாம் என்பது பற்றியும் விளக்கிக் கூறுதலே பொருளாதார இயலின் முக்கியப் பணி எனலாம். உணவு, உடை ஆகியவற்றின் உற்பத்தி, ஏற்றுமதி, இறக்குமதிப் பொருள்களின் மதிப்புக்கள், கூலி, விலைவாசி, இலாபம், வங்கி வைப்புகள் போன்ற எல்லாதவிதப் பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளிலும் எண்சார் விவரங்களே பயன் படுத்தப் படுகின்றன. இத்தகைய எண்சார் விவரங்கள் யாவும் இடத்திற்கு இடமும், நேரத்திற்கு நேரமும் மாறக்கூடியவையாகும். மாறல்களின் தரத்தையும் தன்மையையும் புள்ளியியல் முறை

களைப் பயன்படுத்தியே பொருளாதாரத் துறையினர் மதிப்பிடுகின்றனர். புள்ளியியலிலிருந்து வருவிக்கப்படக்கூடிய அனுபவ விதிகளை ஆராய்ந்து கண்டுபிடிப்பதன்மூலம்தான் பொருளாதார இயல் வளர்ச்சி பெற முடியும் என்பது பல பொருளாதார நிபுணர்களால் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட கருத்தாகும். பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டின் பிற்பகுதியிலிருந்தே பல்வேறு நாடுகளிலும் புள்ளி விவரங்கள் புள்ளி விவரச் செயலகங்களினுல் ஒழுங்கான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டு வருவதாலும், கூறெடுத்தல் (Sampling), வளைகோடு பொருத்துதல் (Curve-fitting), ஒட்டுறவு (Correlation) குறியீட்டெண்கள், காலத் தொடர்களின் பகுப்பாய்வு (Time Series Analysis) இடைச் செருகல் ஆகிய புள்ளியியல் முறைகள் புள்ளியியல் நிபுணர்களால் பெரிதும் விரிவாக்கப்பட்டிருப்பதாலும் பொருளாதாரத் துறையில் புள்ளியியலின் முக்கியத்துவம் மிகவும் வேகமாக வளர்ந்து வருகிறது. இவ்வாறு விரிவடைந்துள்ள புள்ளியியல் முறைகளினுலும், இம் முறைகள் யாவும் பொருளாதார இயலில் மிகவும் பயனுள்ள வகையில் பயன்படுத்தப்பட்டு வருவதாலும் பொருளாதார இயலும், புள்ளியியலும் ஒன்றுக்கொன்று மிகவும் நெருங்கிய தொடர்புள்ள துறைகளாக இணைந்துவிட்டன. அண்மைக் காலத்தில் கணக்கியல் பொருளாதாரம் என்ற அறிவியல் மிக வேகமாக வளர்ச்சி பெற்று வருகிறது. பொருளாதாரக் கோட்பாடுகளைக் கணிதவியலின் வாயிலாக நடைமுறைக்கேற்ற வகையில் மாற்றுவதன்மூலம் பொருளாதார இயலை இயற்கையான ஓர் அறிவியலாக மாற்றுவதே இவ்வறிவியலின் முக்கிய நோக்கமாகும். பெரும்பாலான பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளின் தீர்வுகள் புள்ளியியலையே சார்ந்துள்ளன.

எல்லாப் பொருளாதார விதிகளும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தியே சரிபார்க்கப்படுகின்றன. மக்களுடைய நுகரும் பழக்க வழக்கங்கள் (Consumption habits) பற்றிய புள்ளி விவரங்களிலிருந்து ‘ தேவை விதி ’ (Law of Demand), ‘ தேவை நெகிழ்ச்சி, (Elasticity of Demand) ஆகியவை நிறுவப்படுகின்றன. சந்தைகள், தேவையும் அளிப்பும், உற்பத்திச் செலவு, வாழ்க்கைச் செலவு முதலியவைபற்றிய ஆய்வு பெரிதும் புள்ளியியலையே சார்ந்துள்ளது. ஒரு நாட்டின் உற்பத்திபற்றிய புள்ளி விவரங்கள் அந் நாட்டின் செல்வத்தைப்பற்றிய விளக்கத்தை யளிக்கிறது. புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு நாட்டின் ஓராண்டிலுள்ள செல்வத்தை அதற்கு அடுத்த ஆண்டு செல்வத்துடன் ஒப்பிடுவதன்

மூலம் அந்நாட்டின் பொருளாதாரக் கொள்கைகளில் புகுத்தப் படுகின்ற மாற்றங்களினுல் அந்நாட்டின் உற்பத்திநிலையில் ஏற் படுகின்ற விளைவுகளைக் காணலாம். ஒரு நாட்டின் நாணய மாற்றுப் புள்ளி விவரங்கள் (Exchange Statistics) அந்நாட்டின் வியாபாரத்தின் அளவையும், பழக்கத்திலிருக்கும் பணத்தின் மதிப்பையும் அளிக்கிறது. பங்கீட்டுப் புள்ளி விவரங்கள் (Distribution Statistics) பல திறப்பட்ட மக்களின் பொருளாதார நிலைகளை விளக்குகின்றன. ஒரு காலத் தொடரிலிருந்து பொருளாதார வீக்கத்தையும் (boom) மந்தத்தையும் குறியீட் டெண்களைப் (Index Numbers) பயன்படுத்தித் தெரிந்து கொள்ளலாம். தேவைத் தொடர்புகளில் (Demand relationships) தேவையின் அளவானது விலைவாசி, வருமானம் ஆகிய வற்றைச் சார்ந்த ஒரு கணிதச் சார்பாகச் சொல்லப்படுகிறது. செலவுச் சார்புகளில் மொத்தச் செலவானது மொத்த உற்பத்தி யின் ஒரு சார்பாகச் சொல்லப்படுகிறது. இத்தகைய சார்புகள் தேவைப் பகுப்பாய்வில் (Demand Analysis) பெரிதும் பயன் படுத்தப்படுகின்றன.

வருமான மாறல்களில் (Income Variation) பகுப்பாய்விற்கு மாறிகளின் ஒட்டுறவு (correlation), பின்னடைவு (regression) ஆகிய புள்ளியியல் தத்துவங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. வருமான மாறல்களின் பகுப்பாய்வில் ஆய்வு செய்யப்படுகின்ற இடம் அல்லது ஊரின் பரப்பளவு, அந்த ஊர் அமைந்துள்ள இடத்தின் தன்மைகள், வருமானமுள்ளோரின் வயது, தொழில் முதலான விவரங்கள் ஆராயப்படுகின்றன. இவற்றுள் வயது என்ற மாறியைத் தவிர ஏனைய மாறிகள் யாவும் வருமானத் துடன் நேரிடை ஒட்டுறவிலும் (positive correlation), வயதும் வருமானமும் வளைகோட்டு ஒட்டுறவிலும் (curvilinear correlation) அமைந்துள்ளன.

வருமானம், செல்வம் ஆகியவற்றின் பரவல்களின் சமனின்மை பற்றிய ஆய்வில் கோட்ட அளவைகள் (Measures of Skewness) பெரிதும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, அமெரிக்க வருமானப் பரவல் இடப் பக்க ஓரத்தில் முகட்டளவையும் (mode), வலப்பக்கம் நீண்ட வாலை யும் கொண்டு அமைந்திருக்கிறது. அமெரிக்காவில் ஆண்களில் ஒரு பகுதியினர் மட்டும் நிருவாகப் பொறுப்புக்களில் மிக உயர்ந்த ஊதியம் பெறுபவர்களாகவும், ஏனைய ஆண்களும், எல்லாப் பெண்களும் குறைந்த வருவாயுள்ள தொழில்களில் அமர்ந்திருப்பதையே அமெரிக்க வருமானப் பரவலின் வலப்

பக்கமுள்ள நீண்ட வால் குறிப்பிடுகின்றது. தொழில் நிறுவனங்களில் வேலை பார்த்து வரும் தொழிலாளிகளின் பரவலும் இது போல் வலப்பக்கம் கோட்டம் உள்ளதாகவே அமைந்துள்ளது. இத்தகைய கோட்டப் பரவல்களின் பிரிப்பீட்டுச் சமனின்மையின் அளவு 'லோரன்ட்ஸ் வளைவு முறை' (Lorenz Curve Method) யின் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது. லோரன்ட்ஸ் வளைவின் சமப் பிரிப்பீட்டுக் கோட்டிலிருந்து (Line of equal distribution) வளைவின் விலக்கம் பரவலின் சமனின்மை அளவைக் காட்டுகிறது. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களின் சமனின்மை அளவுகளை ஒப்பிடுவதற்கும் லோரன்ட்ஸ் வளைவு முறை பயன்படுகின்றது. இது போல் பியர்சனின் மூன்றும் வகை வளைவும் (Pearson-Type III Curve) வருமானப் பரவல்களில் சமனின்மையின் அளவுகளை மதிப்பிடப் பயன்படுகிறது.

ஒரு முழுமைத் தொகுதி (Population) யிலிருந்து சமவாய்ப்புடன் தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கூறு (sample) அந்த முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளைப் பிரதிபலிக்கும் என்பது புள்ளியியலின் தத்துவங்களுள் ஒன்றுகும். பெரும்பாலான பொருளாதார ஆய்வுகள் இத் தத்துவத்தின் அடிப்படையிலேயே செய்யப்பட்டு வருகின்றன. தொழிற்சாலைகளில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருள்களின் தன்மைகளைச் சோதனை செய்யவும், பொருள்களை விற்கவும் வாங்குவதற்குமான சந்தைகளைப் பற்றி ஆராயவும் இம் முறையே பின்பற்றப்பட்டு வருகிறது.

வியாபாரிகளும் அரசாங்கமும் முன்கூற்று (prediction), முன்கணிப்பு (forecast) ஆகிய இரு வகையைச் சார்ந்த பிரச்சினைகளில் பொருளாதாரப் புள்ளியியல் வல்லுநர்களையே பெரிதும் நம்பியிருக்கின்றனர். அரசாங்கம் தனது பணவாக்கக் கைக்கோள் (Monetary policy), செலவு, வரிவிதிப்பு முதலியவற்றின்மீதான கொள்கைகள் முதலியவற்றின்மீது முடிவுகளெடுக்க பொருளாதாரத் துறையைச் சார்ந்த பற்பல பிரிவுகளின் வருங்கால நிலைகளைப்பற்றிய முன்கணிப்புத் தேவைப்படுகின்றது. தொழிலதிபர்கள் வருங்காலத்தில் தங்களது தொழிலின் போக்கினைத் தெரிந்து கொள்ளவும் தங்களது தொழிற் கொள்கையினை நிர்ணயிக்கவும் நாட்டின் வருங்கால பொருளாதார நிலையையும், மக்களின் வாழ்க்கைத் தர நிலையையும் முன்கூட்டிக் கணிக்க வேண்டியிருக்கிறது. உற்பத்தியாளர் ஒருவர் தனது சரக்குக் கிடங்கில் மிகக் குறைந்த அளவு சரக்குகளையே இருப்பு வைக்க வேண்டுமென நினைத்தால்

அவர் தனது சரக்குகளின் இருப்புக் கொள்கையை எவ்வாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்? குறைந்த எண்ணிக்கையி லான விமானங்களைக் கொண்ட ஒரு விமான நிலைய நிர்வாகி தனது விமானங்களின் பயணத் திட்டங்களை எவ்வாறு அமைத் கொண்டால் மிகக் கூடிய அளவிலான பயணிகளை ஏற்றிச் செல்ல முடியும். பத்திரிகை, திரைப்படம், வானொலி முதலிய வற்றின் மூலம் விளம்பரங்கள் செய்கின்ற ஒரு விளம்பரதாரர் தனது விளம்பரத் திட்டங்களை எவ்வாறு பிரித்து அமைத்துக் கொண்டால் மிகக் கூடிய அளவில் பொதுமக்களின் கவனத் தைக் கவர முடியும்? பொருளாதாரவியலில் எழுகின்ற இத்தகைய பல்வேறான வினாக்களுக்குத் தகுந்த விடைகளை அவ்வினாக்களில் குறிப்பிடப்படுள்ள மாறிகளாலான கணித வடிவங்களை (Mathematical Models) அமைத்து அவற்றின் மூலமாகப் பெற முடிகிறது. பொருளாதாரக் கொள்கைகளும், தொழிற் சுழற்சிகளும் (Business Cycles) கணிதச் சமன்பாடு களின் மூலம் விளக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, பொருளாதார இயலில் கணிதச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவதில் ஏற் பட்டுள்ள வளர்ச்சியின் பயனாகத் தற்போது இத்தகைய கணிதச்சமன்பாடுகளைப் பொருளாதார ஆராய்ச்சியாளர்கள் தங்கள் ஆய்வுக் கருவிகளாகக் கருதுகின்றனர். பொருளாதாரத் தத்துவங்களை நிறுவுவதற்கும், பொருளாதாரக் கொள்கைகளைப் புள்ளியியல் முறைப்படி சோதனை செய்வதற்கும் இதுபோன்ற கணிதச் சமன்பாடுகள் இன்றியமையாதவை யாகின்றன.

ஆனால், பொருளாதாரப் புள்ளியியல் அறிஞர்கள் புள்ளி யியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி பொருளாதாரத் தத்துவங் களுக்கும் கொள்கைகளுக்கும் புள்ளியியல் விளக்கங்கள் அளிப் பதற்கு முன் பல துன்பங்களை அனுபவிக்க நேரிடுகிறது. எந்த ஒரு பொருளாதாரப் பிரச்சினையிலும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துமுன், கிடைக்கப்பெற்றிருக்கும் பொருளாதார விவரங்கள் சரியானவைதானா என்று சோதித்துத் பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில், கிடைக்கப்பெற்றுள்ள விவரங்களில் சிறு தவறுகளிருப்பினும் இறுதி முடிவுகள் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதோடல்லாமல், முற்றிலும் தவறான முடிவுகளைக்கூட அடைய நேரிடலாம். ஆனால், பொதுவாக, பொருளாதாரத் துறையினர் தங்களுக்கு எளிதில் கிடைக்கக் கூடிய விவரங்களை, அவை சரியானவைதானா, தங்கள் பிரச் சினைக்கு ஏற்றவைதானா, அவை எவ்வாறு, எதற்காக, எப் பொழுது சேகரிக்கப்பட்டவை என்பவற்றையெல்லாம் சிறிதும் சிந்திக்காது பயன்படுத்தக்கூடிய சலன உள்ளம் படைத்தவர்

களாக இருப்பதால் அநேக பொருளாதார விவாதங்கள் தரமற்றவையாகவும், தவறானவையாகவும், மோசமானவையாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே, புள்ளியியலையும், புள்ளியியல் முறைகளையும் சரிவர கற்றுத் தெளிவு பெறுதவர்கள் பொருளாதாரத் துறையில் பொருளாதாரப் புள்ளி விவரங்களைப் பயன்படுத்தி ஆய்வு செய்வார்களேயானால் பெரிய தவறு செய்பவர்களாவார்கள். எனவே, பொருளாதாரத் துறையினர் பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளோடு இணைத்துப் புள்ளியியலையும், புள்ளியியல் முறைகளையும் கற்றுக்கொள்வதோடன்றி, புள்ளியியலை மிகவும் கவனமாகவும், நுண்ணறிவுடனும் கையாளப்பட வேண்டிய ஒரு கருவியாகவும் கருத வேண்டும். 'புள்ளியியலானது ஒரு கருவியேயாகும்; அக் கருவியின் பயன்களையும் குறைபாடுகளையும் அறியாதவர்கள் அதைக் கையாள்வது மிகுந்த ஆபத்தானது' என்னும் பௌலி (Bowley) யின் கூற்று இங்கு நினைவுகூரத் தக்கது.

வணிக, வியாபாரத தொழில்துறைகளில் புள்ளியியல் (Statistics in Commerce, Business and Industry)

வணிக, வியாபார, தொழில் துறைகளில் எந்த நிருவாகமும் புள்ளியியலின் துணையின்றி நடைபெறவே முடியாது என்று எண்ணும் அளவிற்கு இத்துறைகளில் இக்காலத்தில் புள்ளியியல் பெரிதும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படாத துறையே இல்லையெனக் கூறுமளவிற்குத் தற்காலத்தில் புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள் பெரிதும் விரிவடைந்து வருவதாலேயே 'நவீன கால வரலாறு நீராவி யுகத்தில் தொடங்கி, மின்சார யுகத்தின் வழியே புள்ளியியல் யுகத்தை நோக்கிச் செல்கிறது' என்று சொல்லப்படுகிறது.

வியாபார அளவு முன்கணிப்பு (Business forecasting)

எந்தத் தொழிலிலும் முன்கணிப்பின் அடிப்படையில் அமையாத எந்தக் காரியமும் வெற்றிகரமாக முடிவதில்லை எனலாம். வியாபார அளவு முன்கணிப்பு என்பது கடந்த கால, நிகழ்கால விவரங்களைக் கொண்டு வியாபாரத்தின் வருங்காலப் போக்கினை முன்கூட்டிக் கணித்துச் சொல்லுதல் மட்டுமன்று; மிகவும் கவனமாகச் சேகரிக்கப்பட்ட பொருத்தமான விவரங்களின் அடிப்படையில் சொல்லப்படும் தீர்ப்பாக இருப்பதோடு, வருங்காலத்தில் நிகழக்கூடிய எதிர்பாரா இடையூறுகளினின்றும் தொழிலைக் காப்பாற்றக்கூடிய பலம் வாய்ந்த முள்வேலிக்கு

ஒப்பான வழி முறைகளுடன் கூடியதுமாக வியாபார அளவு முன்கணிப்பு இருக்க வேண்டும். பாங்கு நிருவாகிகள், உற்பத்தியாளர்கள், மற்றும் எல்லாத் தொழிலதிபர்களும் தங்கள் தொழில்களில் வருங்கால முன்னேற்றத்தையே எப்பொழுதும் கருத்திற் கொண்டு செயல்பட்டு வருவதால் பற்பல வகையான பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண வேண்டியவர்களாகவிருக்கின்றனர். தங்கள் தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியைப் பெருக்க வேண்டுமா? சரக்குகளின் கையிருப்பை அதிகரிக்க வேண்டுமா? வாங்கப்பட்டுள்ள கடனை அடைத்துவிடலாமா? அல்லது தவணையைப் புதுப்பித்துக் கொள்ளலாமா? கடனுக்கு விற்கப்படும் பொருள்களின் அளவை அதிகரிக்கலாமா? கட்டடம் கட்டும் வேலையைத் தள்ளிப் போடலாமா? தொழிலாளர்களின் கூலியைக் கூட்டலாமா? உற்பத்திப் பொருட்களுக்கு நல்ல விற்பனை வாய்ப்பு இருக்கிறதா? வியாபாரத்தில் முடக்கப்பட்டுள்ள முதல் பத்திரமாக இருக்கிறதா? இவ்வாறு எழுகின்ற பலவகையான வினாக்களுக்கும் விடைகள் காண வேண்டிய நிலையேற்படலாம். இத்தகைய பிரச்சினைகளுக்குரிய தீர்வுகளையும், அத்தீர்வுகளை நிறைவேற்றுவதற்கான வழிமுறைகளையும் அளிப்பதே வியாபார அளவு முன்கணிப்பின் முக்கியப் பணியாகும். வியாபாரிகள் தாங்கள் எதிர்பார்க்கும் வருங்கால நிலைமைகளுக்கேற்ப தங்களுடைய வியாபாரக் கொள்கைகளை வகுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு தங்களுடைய வியாபாரக் கொள்கைகளை வகுக்கும்போது, தங்களுடைய வியாபாரத்தின் நிலைமையை ஆராய்வதோடு பிற தொழில்களைப்பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து அவற்றையும் ஆராய்ந்து, அந்த ஆராய்ச்சிகளின் அடிப்படையில் வருங்கால நிலைமைகளை முன் கணிப்புச் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

பொறிவழித் தொழிலில் புள்ளியியல் (Statistics in Manufacturing)

பொறிவழித் தொழில் நிறுவனத்தினருக்கும் ஏனைய தொழிலதிபர்களைப் போன்று பற்பல பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுவதுண்டு. தங்களுடைய தொழிற்சாலையில் பொருள்களின் உற்பத்திச் செலவு தங்களுடைய போட்டியாளர்களின் தொழிற்சாலைகளில் பொருள்களின் உற்பத்திச் செலவைவிடக் கூடுதலாகயிருப்பதேன்? தங்கள் தொழிற்சாலையில் வினைத்திறன் (Efficiency) குறைந்துள்ளதா? அல்லது தங்களுக்கு ஏதாவது குறிப்பிட்ட சில இடையூறுகள் இருக்கின்

றனவா? இத்தகைய வினுக்களுக்கான விடைகளை உற்பத்தி, மற்றும் செய்முறை பற்றிய புள்ளிவிவர ஆராய்ச்சியின் மூலம் பெறலாம்.

ஒரு தொழிற்சாலேயில் வேலே செய்யும் தொழிலாளர்களின் நிலேமைகள் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் ஒவ்வொரு தொழிலாளியின் உற்பத்தித் திறன் பற்றிய குறிப்புக்களும், ஒவ்வொரு பிரிவைச் சேர்ந்த தொழிலாளர்களின் மொத்த உற்பத்தியையும் பற்றிய குறிப்புக்களும் அடங்கியதாகும். இக்குறிப்புக்கள் ஏற்கெனவே நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ள உற்பத்தித் திறனுடன் ஒப்பிடப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு தொழிலாளியும் பயன்படுத்துகின்ற மூலப்பொருளின் அளவு பற்றிய குறிப்புகளே வைத்திருந்து அந்த அளவு ஏற்கனவே நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ள நியாயமான அளவை விட அதிகமாகாதவாறு கவனித்துக் கொள்ளுவதன் மூலம் பொருள்கள் வீணுக்கப்படுவதைக் குறைக்கலாம். இதுபோன்று தொழிற்சாலேயிலுள்ள ஒவ்வொரு பொறியும் செயல்படும் நேரத்தைப் பற்றியும், அது உற்பத்தி செய்யும் பொருள்களின் அளவுகளேப் பற்றியும் குறிப்பு வைத்திருந்து அக்குறிப்பை ஏற்கெனவே நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ள நியாயமான அளவுடன் ஒப்பிட்டு, பொறிகளின் உற்பத்தித் திறனேத் தணிக்கை செய்யலாம். புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டு முறையானது பொறிசெய் பொருட்களின் (Manufactured goods) தரத்தை உயர்த்தப் பயன்படுகிறது. ஒரு பொறியினுல் செய்யப்படுகின்ற பொருள்களில் தரக்குறைவான பொருள்களின் எண்ணிக்கை ஒரு தரக் கட்டுப்பாடு விளக்கப் படத்தில் (Quality control chart) தொடர்ச்சியாகக் குறிக்கப்படுகிறது. புள்ளியியல் ஆய்வாளர் இப்படத்தைப் பார்த்து பொருள்களின் தரம் எப்பொழுது நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தைவிடக் குறைகிறதென்பதைக் கண்டுகொள்வார். உடனே அப்பொறியை இயக்குவதை நிறுத்தி அதைச் சீர்படுத்திய பின்னர் அப்பொறியை மீண்டும் இயக்க அனுமதியளிப்பார். இத்தகைய முறையைப் பின்பற்றுவதால் ஆக்கப்பட்ட பொருட்கள் அனேத்தும் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தைவிட உயர்ந்தவையாக இருப்பதோடு அப்பொருட்களே மக்கள் விரும்பி மிகுந்த திருப்தியுடன் வாங்குகின்றனர்.

விற்பனேச் சந்தையில் புள்ளியியல் (Statistics in Marketing)

பொருட்களின் விற்பனேக்கான சந்தையை நிர்ணயிக்கும் போது முதலில் அச்சந்தையில் என்ன பொருள் நன்கு

விற்பனையாகும் என்றும், விற்கப்பட வேண்டிய பொருள் அச் சந்தையில் அதிக அளவில் விற்பனையாக வேண்டுமாயின் அப்பொருளை அச்சந்தையில் அறிமுகம் செய்ய வேண்டிய முறையினையும் காணல் வேண்டும். ஆகவே, அச்சந்தையைச் சுற்றியுள்ள மக்களின் பழக்கவழக்கங்கள், அவர்களின் வாங்கும் சக்தி, விற்கப்படும் பொருளுக்கு ஏற்படக் கூடிய போட்டிகள், அச்சந்தைக்குப் பொருட்களை ஏற்றிச் செல்லுவதற்கான போக்குவரத்து வசதிகள், அவற்றிற்காகும் செலவுகள் முதலான பல விவரங்களையும் ஆராய்வதன் மூலம் விற்பனைப் பொருளுக்கேற்ற நல்ல சந்தையை நிர்ணயிக்க முடியும். சந்தை பற்றிய ஆய்வில் பொருட்களின் அளிப்பு (Supply) தேவை பற்றிய விவரங்களும் முக்கியமாக இடம் பெறுகின்றன. அளிப்பு என்பது மொத்த இருப்புச் சரக்கைக் குறிப்பிடுவதாக எண்ணிவிடக் கூடாது; சரக்கின் உரிமையாளர் ஒரு குறிப்பிட்ட விலையில் விற்பனைசெய்ய விரும்புகின்ற சரக்குகளின் அளவையே அளிப்பு (Supply) என்ற சொல் குறிப்பிடுகின்றது. இதுபோல், தேவை என்ற சொல் ஒரு குறிப்பிட்ட விலையில் வாங்கப்படுகின்ற சரக்குகளின் அளவைக் குறிப்பிடுகின்றன. ஒரு சரக்கின் அளிப்பும் தேவையும் நேரத்திற்கு நேரம், நாளுக்கு நாள் மாறிக் கொண்டிருக்கும் தன்மை வாய்ந்தவை. ஆகவே, ஒரு சரக்கை விற்பதற்கேற்ற சந்தையைச் சரியாக நிர்ணயிக்க வேண்டுமாயின், அச்சரக்கின் அளிப்பு, தேவை ஆகியவை பற்றி எவ்வளவு கூடுதலான விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியுமோ அவ்வளவு விவரங்களைச் சேகரித்து அவற்றை ஆராய்தல் வேண்டும். பொருட்களின் தேவை பொருளுக்குப் பொருள் மாறுபடுவதால், தேவையின் அளவு பெரும்பாலும் ஒரு குறியீட்டெண்ணாகவே (Index) சொல்லப்படுகிறது. பொருட்களின் தேவை மக்களின் வகுப்பு, மதம், பழக்கவழக்கங்களுக்குத் தக்கவாறும், பருவகால நிலைகளுக்குத் தக்கவாறும், மக்களுடைய வாங்கும் சக்திக்குத் தக்கவாறும் மாறுபடுமாகையால் பலவகையான தேவைக் குறியீட்டெண்கள் (Indices of demand) கணக்கிடப்படுகின்றன. இதுபோல் சரக்குகளின் அளிப்புகளும் குறியீட்டெண்களாகவே குறிப்பிடப்படுகின்றன.

விளம்பரத்தில் புள்ளியியல் (Statistics in Advertising)

புள்ளியியல் முறைகள் விளம்பர நிறுவனத்தினருக்குப் பெரிதும் பயன்பட்டு வருகின்றன. ஒரு பொருளைப் பற்றி விளம்பரம் செய்யுமுன் அப்பொருளைப் பயன்படுத்துபவர் யார் யார்? எவ்வளவு பேர்? எங்கெங்கு வாழ்கிறார்கள்?

எவ்வளவு பொருட்களை வாங்குவார்கள் என்று எதிர்பார்க்கப் படுகிறது? அப்பொருளை ஈடு செய்யக் கூடிய மாற்றுப் பொருட்கள் எவை? அந்த மாற்றுப் பொருட்கள் எந்த அளவுக்குத் திருப்திகரமானவை? அப்பொருளையும் அதற்குப் போட்டியாக பிற நிறுவனங்கள் உற்பத்தி செய்து அளிக்கின்ற பொருட்களையும் மக்கள் எப்படி விரும்பி வாங்குகிறுர்கள்? இன்னும் இது போன்ற பல வினுக்களுக்கும் விடை காண்பது மிகவும் அவசியமாகும். இக் கேள்விகளுக்கு விடை காண வேண்டுமாயின் மக்கள் தொகையின் அளவு, மக்கள் வாழ்கின்ற இடங்களின் பரப்பளவு, மக்களின் குலம், மதம், பொருளை வாங்க விரும்புவோரின் வயது வரம்பு, படிப்பு, மக்களின் வருமானம், பலவகையான பொருட்களையும் வாங்கும் சக்தி முதலானவை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மிகவும் தேவையாகும். இவ்விவரங்களைக் கூறெடுத்தல் முறையில் வினுப் பட்டியல்களைக் (Questionnaire) கொண்டு சேகரிக்கலாம்.

விற்பனை நிருவாகப் புள்ளி விவரங்கள் (Sales Management Statistics)

விற்பனைத் துறையில் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப் படுவது அண்மைக் காலத்தில் மிக வேகமாக அதிகரித்து வருகிறது. பெரும்பாலான விற்பனை நிறுவனங்கள் மாத, வார, தினசரி விற்பனைகளின் குறிப்பேடுகளை மிகவும் கவனமாகத் தயார் செய்து வைத்துக் கொண்டு, ஒவ்வொரு வார இறுதியிலும் அவ்வார விற்பனை அளவை முந்திய வார அளவுடனும், சென்ற ஆண்டின் அதே வாரத்திய விற்பனை அளவுடனும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்றனர். இவ்வாறு கடந்த ஆண்டின் வார விற்பனையுடன் ஒப்பிடும்போது ஒப்பிடப் படுகின்ற வாரத்தை யடுத்துள்ள பருவ காலத்தையும் கருத்திற் கொள்ளுதல் நல்லது. உதாரணமாக, துணி விற்பனை நிறுவனத்தினர் தீபாவளிக்கு முந்திய வார விற்பனையுடன் ஒப்பிட வேண்டும். இதுபோல், தற்போதைய மாத விற்பனையை முந்திய மாத விற்பனையுடனும் முந்திய ஆண்டின் இதே மாதத்திய விற்பனையுடனும் ஒப்பிட வேண்டும். இதுபோன்று தினசரி விற்பனைகள் முந்திய நாட்களின் விற்பனைகளுடனும், ஒரு திங்கட்கிழமை விற்பனை முந்திய திங்கட்கிழமை விற்பனையுடனும், செவ்வாய்க்கிழமை விற்பனை முந்திய செவ்வாய்க்கிழமை விற்பனையுடனும், இதுபோன்று மற்ற நாட்களின்

விற்பனைகளும் ஒப்பிடப்படல் வேண்டும். இதுபோன்று வருடாந்திர விற்பனையும் முந்திய ஆண்டு விற்பனையுடன் ஒப்பிடப்படவேண்டும்.

பாங்குத் தொழிலில் புள்ளியியல் முறைகள் (Statistics in Banking)

பாங்குத் தொழிலில் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் பாங்குகளுக்கு மட்டுமல்லாது பாங்குகளோடு தொடர்பு கொண்டுள்ள பொதுமக்கள் யாவருக்கும் பெரும் பயன் ஏற்படுகிறது. மக்கள்தொகை, மக்களின் வாங்கும் திறன், பொருட்களின் உற்பத்தி முறைகள், உழைப்பு நிலைமைகள் (Labour Conditions), சரக்குகளின் சந்தைகள், நிலங்களும் கட்டிடங்களும் வாங்க, விற்கப்படுகின்ற நிலைமைகள், முதலீடுகள் ஆகியவை பற்றிய விவரங்களைச் சேகரித்து ஆய்வு செய்தல் பாங்குத் தொழிலுக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகும். தவிர, பிற தொழில்களின் நிலைமைகளைப் பற்றிய ஆய்வும், பாங்குத் தொழிலைப் பற்றியும், பிற தொழில்களுடன் பாங்குத் தொழிலின் தொடர்பு பற்றிய ஆய்வும் செய்யப்படவேண்டும்.

ஒரு பாங்கைச் சார்ந்த புள்ளியியல் துறையினர் அன்றாடம் பத்திரிகைகளில் வெளியாகின்ற, தேவையான புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்து, அவற்றை வரிசைப்படுத்தி, பின்னால் தேவைப்படும்போது எவ்விதத் தாமதமுமின்றி உடனே எடுத்துப் பார்க்கக்கூடியவாறு கோர்த்து வைத்துக்கொள்ள வேண்டும். நடப்புச் செய்திகளைப் பற்றிய விவரங்களைப் பல்வேறு தினசரிகளிலிருந்தும் சேகரித்து, ஆராய்ந்து, முடிவுகளைச் சுருக்கிக் குறிப்புகள் தயாரித்து பாங்கின் எல்லாக் கிளை அலுவலகங்களுக்கும், நிருவாகத்தினரின் பார்வைக்காக அனுப்பி வைக்க வேண்டும். பாங்குத் தொழிலுக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகக் கருதப்படக் கூடிய விவரங்களிருப்பின், அவ்விவரங்களைச் சேகரித்துத் தகுந்த குறிப்புக்களுடன் பாங்கின் உயர் அதிகாரியின் பார்வைக்காக அனுப்பி வைக்க வேண்டியது பாங்குப் புள்ளியியல் துறையினரின் பணிகளுள் மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

மக்கள் தொகை, மக்களின் வாங்கும் திறன் ஆகியவை பற்றிய விவரங்கள் பாங்குத் தொழிலுக்கான அடிப்படை நிலைமைகளை ஆராய்வதற்கு மிக மிகத் தேவையானவையாகும்.

மேலும் இத்தகைய விவரங்கள் பாங்கின் கிளைகளை நிறுவுவதற் கான இடங்களைத் தேர்வு செய்வதற்குப் பெரிதும் பயன் படுகின்றன. ஆகவே, ஒரு இடத்தின் மக்கள்தொகை பற்றிய விவரங்கள், அந்த மக்களின் பல்வேறு இன, இயல்புகளுக் கேற்றவாறு பலவகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டும், அவ்விடத்தில் நிரந்தரமாக வாழ்பவர், தற்காலிகமாக வாழ்பவர் என்ற விவரங்களடங்கியதாகவும் இருத்தல் வேண்டும். ஒரு குறிப் பிட்ட பகுதியில் வாழ்கின்ற ஒரு குறிப்பிட்ட இனத்தைச் சார்ந்த மக்களின் தொகை வேகமாகப் பெருகிக்கொண்டிருந் தால் அந்த இடத்தில் பல்வேறு தொழில்களும் பெருகுவதற் கான வாய்ப்புகள் வளர்வதோடு அந்த இடத்தில் பாங்கின் ஒரு கிளையை நிறுவுவதற்கான சூழ்நிலையும் உருவாகி வருகிற தென்பதை அறிந்து, அதற்குத் தக்கவாறு பாங்கு நிருவாகத் தினர் செயல்பட ஏதுவாகிறது.

புள்ளியியல் துறைக்கும் நிருவாகத்திற்கு முள்ள தொடர்பு (Relation of Statistical Department to the Management)

ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் நிருவாகத்திற்குப் புள்ளியியல் துறை எவ்வகையில் பயன்படுகிறது என்பதைக் கண்டோம். பெரிய தொழில் நிறுவனங்களில் புள்ளியியல் துறை அந் நிறுவனத்தைச் சேர்ந்த ஒரு தனிப் பிரிவாக இயங்கி வரும். இப்புள்ளியியல் துறையினர் நிறுவனத்திற்குத் தேவையான புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து, பட்டியல்படுத்தி, புள்ளி விவரப் படங்களின் மூலம் விளக்கிக் காட்டுவதோடு நின்று விடாமல், அப்புள்ளிவிவரங்களுக்குரிய சராசரிகள் (Averages), பரவுகை அளவைகள் (Measures of Dispersion), குறியீட் டெண்கள் (Index Numbers), ஒட்டுறவு அளவைகள் (Measures of Correlation) ஆகிய புள்ளியியல் மாறிலிகளைக் கணக்கிட்டு, அத்தொழிலுக்குரிய காலத் தொடரின் பருவகால ஏற்றத் தாழ்வு கள் (Seasonal Fluctuations) நீக்கப்பெற்ற போக்கை நிர்ணயித்து, அவற்றின் மூலம் பெறக்கூடிய இறுதி முடிவை நிருவாகத்தினர் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் வண்ணம் நிருவாகத்திற்குப் பயன் படக்கூடிய வகையில் காலதாமதமின்றி அளிக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, அந்நிறுவனத்தின் வருங்காலப் போக்கு மீச்சிறுபடிமுறையைப் (Method of Least Squares) பயன் படுத்திக் கணக்கிட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். நிருவாகத் தினருக்கு அதன் போக்கு எவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டிருக்கிற தென்பது முக்கியமல்ல ; அதன் போக்கினைப் புரிந்துகொள்ள

முடிந்தால் போதும். புள்ளியியல் துறையினர் அளிக்கும் கருத்தினை நிருவாகத்தினர் புரிந்துகொள்ள முடியாத காரணத்தினால் அதனைப் பயன்படுத்த முடியாமற் போனால், அது புள்ளியியலின் தவறு அன்று; நிருவாகத்தினர் புரிந்து கொள்ளும் வண்ணம் வழங்கத் தவறிய புள்ளியியல் துறையினரின் குற்றமேயாகும்.

அநேக நிறுவனங்களில் புள்ளியியல் துறையினருக்குப் புள்ளியியல் முறைகளைத்தவிர வேறொன்றும் தெரியாத காரணத்தாலும், நிறுவாகத்தினருக்குச் சிறிதளவு கூட புள்ளியியல் அறிவு இல்லாத காரணத்தாலும் நிருவாகத்தினருக்கும், புள்ளியியல் துறையினருக்குமிடையே சுமுகமானக் கூட்டுறவு காணப்படுவதில்லை. மேலும், புள்ளியியல் துறையினர் அந் நிறுவனத்தைச் சாராத வேற்று மனிதர்களைப் போலவே நிருவாகத்தினரால் நடத்தப்படுகின்றனர். புள்ளியியல் துறையினர் நிருவாகத்தில் ஏற்படுகின்ற பல பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண வேண்டிய பெரும் பொறுப்பையுடையவர்களாகயிருக்கின்றனர். ஆனால் நிருவாகத்தினரோ, நிருவாகப் பிரச்சினைகளில் தம்மைத் தவிர வேறு எவருக்கும் எதுவுமே தெரியாது என்று நினைக்கிறார்கள். இத்தகைய நிருவாகத்தினருக்குப் புள்ளியியல் தீர்வுகளைப் புரியவைப்பதும், புள்ளியியல் தீர்வுகளைப்பயன்படுத்துவதால் நிருவாகத்திற்கு ஏற்படக் கூடிய நன்மைகளை அவர்கள் ஏற்றுக்கொள்ளும் வகையில் விளக்கிக் கூறுவதும் மிகவும் கடினம். ஏனெனில், புள்ளியியல் தீர்வுகள் மக்களின் மனோபாவத்தையும் செயல் முறைகளையும் பெரிதும் சார்ந்தவையாகயிருப்பதால் அவை சாதாரணமாக, மிகச் சரியாக இருப்பதில்லை. ஆகவே, புள்ளியியல் தீர்வுகள் பெறப்பட்ட முறைகளை நிருவாகத்தினர் புரிந்துகொண்டாலொழிய புள்ளியியல்துறையினர் அளிக்கின்ற புள்ளியியல் தீர்வுகளில் திருப்தியடைய மாட்டார்கள். ஆகவே, பொருளாதாரக் கொள்கைகளிலும் புள்ளியியல் முறைகளிலும் நன்கு தேர்ச்சி பெற்ற அலுவலர்கள் தொழில் நிருவாகத்திற்குத் தேவையென்பது நன்கு விளங்கும். மேலும், நிருவாகத்தினர் புள்ளியியல் முறைகளில் தேர்ச்சி பெற்றவர்களாகயிருப்பின் புள்ளியியல் துறையினர் அளிக்கின்ற புள்ளியியல் தீர்வுகளை நன்கு புரிந்துகொண்டு, அவற்றைப் பயன்படுத்தி நிருவாகத்தைத் திறம்பட நிருவகிக்க முடியும்.

புள்ளியியலின் வரம்புகள் (Limitations of Statistics)

புள்ளியியல் முறைகள் அநேகமாக எல்லா அறிவியல் துறைகளிலும் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்ற போதிலும்

அவை சில குறைபாடுகளை யுடையதாகவும் சில வரம்புகட்குட் பட்டதாகவுமே யிருக்கின்றன. இவ்வரம்புகளையறியாமல் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்திப் பெறுகின்ற புள்ளியியல் தீர்வுகள் பெரும்பாலும் தவருனவையாகவே இருக்கின்றன. புள்ளியியலின் முக்கிய வரம்புகள் பின்வருமாறு :—

(1) பண்பின் விவரங்களுக்கும் (Qualitative data) பண்பின் அடிப்படையில் அமைந்த தத்துவங்களுக்கும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தக் கூடாது. நாகரீகம், நேர்மை, உடல்நலம், திறமை, ஏழ்மை, அழகு, நுண்ணறிவு போன்ற பண்புகளை அளவின விவரங்களாக (Quantitative data) மாற்றினுலொழியா புள்ளியியல் முறைப்படி ஆராய முடியாது.

(2) புள்ளி விவரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று ஏதாவதொரு தொடர்புடன் அமைக்கத் தகுந்தவையாக இருத்தல் அவசியம். ஒரேயொரு எண் மட்டும் புள்ளி விவரமாகாது. உதாரணமாக ஒரு கல்லூரி விடுதியிலுள்ள ஒரு பணக்கார மாணவனின் மாதச் செலவு மட்டும் புள்ளி விவரமாகாது. அந்த ஒரு விவரம் மட்டும் புள்ளியியல் முறைகளுக்கு எந்த வகையிலும் பயன் படாது. மாருக அவ்விடுதியிலுள்ள எல்லா மாணவர்களின் மாதச் செலவுகள் பற்றிய விவரங்கள் தெரிந்தால் புள்ளி விவர முறைகளைப் பயன்படுத்தி, சராசரிகள், பரவுகைக்கெழுக்கள் போன்ற புள்ளியியல் மாறலிகளைக் கணக்கிட்டு மாணவர்களின் மாதச் செலவுகள் பற்றி ஆராய முடியும். மேலும் அதிகமாகச் செலவு செய்யும் மாணவர்களுடைய தேர்வு மதிப்பெண் களுடன் ஒப்பிட்டு, மாணவர்களின் செலவிற்கும், அவர்கள் தேர்விலே பெறுகின்ற மதிப்பெண்களுக்கு முள்ள ஒட்டுறவை (Correlation) மதிப்பிட முடியும்.

3. புள்ளியியல் விதிகள் சராசரியில் அல்லது இறுதியில் தான் மெய்யாகும். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிட்டால், அந்த நாணயத்தின் தலைப்பக்கம் மேல் நோக்கியிருக்குமாறு விழுவதற்குரிய நிகழ் தகவு (Probability) 1/2 என்று சொல்கிரேம். அதன்படி, நாணயத்தை இரண்டு தடவைகள் சுண்டினுல் ஒரு தடவை தலையும் இரண்டாவது தடவை பூவும் விழும் என்று சொல்ல முடியாது. இரண்டு தடவையுமே தலை விழலாம் ; அல்லது பூ விழலாம். அதற்காக நிகழ் தகவு விதியே தவருனது என்று சொல்லிவிடக் கூடாது. ஆனுல், நாம் நாணயத்தை 1000 தடவைகள் சுண்டிவிட்டால், தலையும் பூவும் ஏறத்தாழச் சம எண்ணிக்கையில் விழுவதைக் கவனிக்கலாம். இன்னும் அதிகமான தடவைகள் சுண்டினுல்,

தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவும், பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவும் சமமாகயிருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு, எல்லாப் புள்ளியியல் விதிகளும் நீண்ட செய்முறைகளுக்குப் பின் இறுதியில்தான் மெய்யாகும் என்று அறியலாம்.

(4) தேவைக்குக் குறைவான புள்ளியியல் விவரங்கள் தவருன முடிவுகளுக்குக் கொண்டு செல்லலாம். புள்ளியியல் தேர்வு எழுதிய இரு கல்லூரி மாணவர்களுள் ஒரு கல்லூரியில் மற்ற கல்லூரியைவிட அதிகச் சதவீதத்தில் மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர் என்ற ஒரே விவரத்தை மட்டும் அடிப்படையாகக் கொண்டு அக்கல்லூரியில் புள்ளியியல் பாடத்தின் தரம் மற்றக் கல்லூரியின் தரத்தை விட உயர்ந்துள்ளது என்ற முடிவுக்கு வந்துவிட முடியாது. ஏனெனில் முதல் கல்லூரியில் அதிகச் சதவீத மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெற்றதற்குக் காரணம் தேர்வுக்கு முன்னதாகவே வினுத்தாள் வெளியாகியதாகவும் இருக்கலாம். அவ்வாறு இருந்தால் மேற்கண்ட முடிவு தவருனதாகும்.

(5) புள்ளியியல் முறைகள் ஒரு பிரச்சினையை ஆராய்வதற்குப் பயன்படுமேயன்றி அவைகளால் அப்பிரச்சினையைத் தீர்க்க முடியாது.

(6) புள்ளி விவரங்கள் ஒரே சீராகவும், அவற்றின் ஆய்வு முடியும் வரை அவைகளின் முக்கிய பண்புகள் மாருமல் நிலையாகவும் இருத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, இரு தொழிற்சாலைகளில் வேலை செய்கின்ற தொழிலாளர்களின் சராசரிக் கூலியை ஒப்பிடும்போது ஒரு தொழிற்சாலையில் பெரியவர்களின் சராசரிக் கூலியையும் இரண்டாவது தொழிற்சாலையில் பெரியவர்கள் குழந்தைகள் ஆகியோரின் சராசரிக் கூலியையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒப்பிடுதல் கூடாது.

(7) புள்ளியியலில் தேர்ச்சி பெருதவர்கள் புள்ளியியல் முறைகளைத் தவருகப் பயன்படுத்தக்கூடும். ஒரு குறிப்பிட்ட ஆராய்ச்சிக்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை வேருெரு ஆராய்ச்சிக்குப் பயன்படுத்தக் கூடாதென்பது புள்ளியியலைப் பற்றிய விதிகளுள் ஒன்று. இதைப் புரிந்து கொள்ளாமல் ஒரு ஆராய்ச்சிக்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைத் தங்கள் விருப்பம்போல் தாங்கள் விரும்புகின்ற ஆராய்ச்சிகளிலெல்லாம் பயன்படுத்துவார்களேயானுல் முற்றிலும் தவருன விளைவுகளையன்றி வேறென்ன எதிர்பார்க்க முடியும்? வருமானவரி அலுவலகத்திலிருந்து சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை மக்களின் சம்பாதிக்கும் திறன்

பற்றிய ஆராய்ச்சியில் பயன்படுத்தினுல் எத்தகைய விடை கிடைக்கும் என்பதைச் சொல்ல வேண்டியதில்லை.

ஆகவே மேற்கூறப்பட்ட வரம்புகள் யாவற்றையும் கவன மாகச் கருத்திற் கொண்டு புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாளு வதன் மூலம் நம்பகமான புள்ளியியல் தீர்வுகளைப் பெற முடியும்.

புள்ளியியலைத் தவருகப் பயன்படுத்தலும் புள்ளியியலின் மீதுள்ள அவநம்பிக்கையும்

புள்ளியியல் முறைகள் பல திறப்பட்ட அறிவியல் துறை களிலும் மிகவும் பயனுள்ள வகையில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற போதிலும் அவைகளைப் பல்வேறு வரம்புகட்குட்படுத்தியே எத்துறையிலும் பயன்படுத்த வேண்டுமென்று கண்டோம். புள்ளியியலில் நன்கு தேர்ச்சி பெருத சில ஆய்வாளர்கள் இவற்றை அறியாமலேயே இவ்வரம்புகளையும் மீறி புள்ளி விவரங்களையும் புள்ளியியல் முறைகளையும் தங்கள் ஆராய்ச்சி களில் பயன்படுத்தித் தவருன முடிவுகளைக் காண்கிருர்கள். இதுபோல் நேர்மையற்ற புள்ளியியல் ஆய்வாளர்களும் இவ் வரம்புகளை அலட்சியப்படுத்தி புள்ளிவிவரங்களையும், புள்ளி யியல் முறைகளையும் தவருகப் பயன்படுத்தி உண்மைக்கு மாறு பட்ட நம்பத்தகாத முடிவுகளைப் பெறுகின்றனர். இத்தகைய ஆருய்வாளர்கள் புள்ளியியலைக் களங்கப்படுத்துகிருர்கள் என்றே சொல்ல வேண்டும். இவர்கள் புள்ளி விவரங்களையும், புள்ளியியல் முறைகளையும் தவருகப் பயன்படுத்தி, அதன் பயனுக கிடைக்கின்ற தவருன கருத்துக்களை வெளியிடுகின்ருர் கள். பாமர மக்களால் இத்தவருன கருத்துக்களைத் தவருன வையாகயிருக்கலாம் என்று சந்தேகிக்கவும் முடியாது; சரியானவை தானு என்று சரி பார்க்கவும் முடியாது, ஆகவே அவர்கள் புள்ளியியலே தவருனது என்ற தவருன முடிவுக்கு வந்து விடுகிருர்கள். இவ்வாறு, தாங்கள் கொடுக்கின்ற தவருன புள்ளி விவரங்களைத் தவருனவையா, அல்லது சரியானவை தானு என்று பொதுமக்களால் சோதித்துப்பார்க்கவே முடியாது என்ற நம்பிக்கையில்தான் அநேக நேர்மையற்ற புள்ளிவிவர ஆய்வாளர்கள் புள்ளி விவரங்களைத் தவருகப் பயன்படுத்தி, தங்கள் தவருன கருத்துக்களை மக்கள் மத்தியில் நிலை நிறுத்தி மக்களை ஏமாற்றி வருகிருர்கள். இவ்வாறு பொதுமக்கள் பல வகையில் ஏமாற்றப்படுவதாலேயே அவர்கள் புள்ளியியலின் மீதே அதிருப்தியடைந்து 'புள்ளிவிவரம் என்பது ஒரு பொய்

மூட்டை' என்றும் 'பொய்களாலான சதைப் பிண்டம்' என்றும் 'ஒரு அவுன்சு மெய்மையைக் கொண்டு டன் கணக்கில் புள்ளி விவரங்களை உற்பத்தி செய்யலாம்'' என்றும் இன்னும் 'பொய்கள் மூன்று வகைப்படும். அவையாவன:— பொய், அண்டப் புளுகு, புள்ளி விவரம்' என்றும் பலவாறாக இவ்வறிவியலை நிந்திக்கின்றனர்.

புள்ளியியலைத் தவறாகப் பயன்படுத்தப் பல வாய்ப்புகள் இருக்கின்றன. அவை யாவன: (1) சீரற்ற முழுமை பெறாத விவரங்கள் (2) பொய்யான தற்கோள்களின் அடிப்படையில் அமைகின்ற தவறான முடிவுகள் (3) பற்றாக்குறைவான, வகைப் படுத்தப்படாத கூறுகளின் அடிப்படையிலமைந்த முடிவுகள் (4) தவறான விவரங்களும் பிழையான கணிப்புகளும் (5) தவறான ஒப்பீடுகள் (6) காரண விளைவுத் தொடர்பு பற்றி ஏற்படுகின்ற குழப்பத்தின் விளைவாகப்பெறப்படுகின்ற தவறான அனுமானங்கள் (7) தன்னுடைய பிரச்சினைக்குச் சாதகமான விவரங்களை மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளல். (8) ஒரு ஆய்வுக்கான புள்ளி விவரங்களை மற்றொரு சந்தர்ப்பத்தில் மற்றொரு பிரச்சினைக்காக அவை சேகரிக்கப் பட்ட சந்தர்ப்பங்களைக் கூறாமல் மேற்கோள் காட்டுதல். (9) கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்களை வேண்டுமென்றே திரித்துக் கூறுதல் (10) பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதியைத் (Law of Inertia of Large Numbers) தவறாகப் புரிந்து கொள்ளல் முதலியன.

மேற்கண்ட பல்வேறு காரணங்களால் புள்ளிவிவரங்களையும் புள்ளியியல் முறைகளையும் அறிந்தோ அறியாமலோ தவறாகப் பயன்படுத்த முடியுமென்பதும், அதன் விளைவாகத் தவறான முடிவுகளையே பெற முடியுமென்பதும் பொது மக்களுக்குத் தெரியாது. புள்ளியியலைப் பற்றி அவர்கள் இரு வகையான கருத்துக்களைக் கொண்டவர்களாக யிருக்கின்றனர். ஒரு சாரார் புள்ளியியல் தத்துவங்களிலும் புள்ளியியல் தீர்வுகளிலும் அசையாத நம்பிக்கை கொண்டவர்களாக இருக்கின்றனர். இத்தகையோர் சரிவர தேர்ச்சி பெறாத ஆய்வாளர்களும், நேர்மையற்ற ஆய்வாளர்களும், மற்றும் அரசியல்வாதிகளும், விளம்பரதாரர்களும் புள்ளி விவரங்களையும், புள்ளியியல் முறைகளையும் தவறாகப் பயன்படுத்தி அளிக்கின்ற தவறான கருத்துக்களையும் முடிவுகளையும் அப்படியே நம்பிவிடுகின்றனர். புள்ளியியலின் அடிப்படையில் அமைகின்ற கருத்துக்களும்

முடிவுகளும் தவருகயிருக்கவே முடியாதென்பது இத்தகையோரின் அசைக்க முடியாத நம்பிக்கையாகும். உதாரணமாக, ஒரு அரசியல்வாதி தன்னுடைய நாடு மிகவும் ஏழ்மை நிலையிலிருக்கிறதென்ற தன்னுடைய கருத்தை மக்கள் ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டுமென்பதற்காக 'ஆண்டு வருமானம் ரூ. 10,000க்கும் அதிகமாகப் பெறுபவர்கள் மொத்த மக்கள் தொகையில் 20 சதவீதத்திற்கும் குறைவாகவே உள்ளனர்' என்று புள்ளி விவர அடிப்படையில் கூறுவாரேயானுல் புள்ளியியலின் மீது நம்பிக்கை கொண்டுள்ள மக்கள் மேற்கண்ட கருத்தை அப்படியே ஏற்றுக் கொள்வார்கள். 'எண்கள் பொய் சொல்லா' என்பது அவர்களுடைய ஆழ்ந்த நம்பிக்கையாகும். ஆனுல் மேற்கண்ட புள்ளி விவரம் வருமானவரித் துறையினரால் வெளியிடப்பட்ட அறிக்கையிலிருந்து பெறப்பட்டிருந்தால் அந்த அரசியல்வாதியின் கருத்து முற்றிலும் தவருனதாக இருக்கலாம். இவ்வாறு ஒரு நோக்கத்திற்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை வேறு ஒரு நோக்கத்திற்காகப் பிறிதொரு சந்தர்ப்பத்தில் பயன்படுத்துவது புள்ளியியல் விதிகளின்படி மிகப் பெரிய தவருகும்.

"புள்ளியியல் முறைகளைக் கொண்டு எதையும் நிறுவலாம்" என்ற கருத்தினைக் கொண்ட மற்ருெரு சாராரும் உளர். இவர்களுக்குப் புள்ளி விவரங்களிலும், புள்ளியியல் முறைகளிலும் அவ்வளவு நம்பிக்கை கிடையாது. தவருன கருத்துக்களைக் கூட புள்ளி விவர அடிப்படையில் நிறுவிவிட முடியும் என்று கருதுபவர்கள் இவர்கள். இது ஒருவகையில் உண்மையே. புள்ளியியலின் வரம்புகளைப் பற்றித் தெரியாதவர்களும், புள்ளி விவர அடிப்படையில் கூறப்படுகின்ற கருத்துக்கள் எந்த அளவுக்குச் சரியாக யிருக்க முடியுமென்று சிறிதும் சிந்தித்துப் பார்க்கக் கூட முடியாதவர்களும் இருக்கும் வரை நேர்மையற்ற ஆய்வாளர்களும், அரசியல் வாதிகளும் தவருன கருத்துக்களைச் சரியானவை என்று நிறுவவும் அல்லது சரியான கருத்துக்களை தவருனவை என்று நிறுவவும் புள்ளிவிவரங்களையும் பின் புள்ளியியல் முறைகளையும் தவருகப் பயன்படுத்தி அவர்களை ஏமாற்ற முடியும். ஆகவேதான், 'புள்ளியியல் முறைகள் கொண்டு எதையும் நிறுவலாம்' என்று புள்ளியியலைப் பற்றிய இழிவான கருத்து மக்களிடையே நிலவி வருகிறது.

புள்ளியியல் என்பது எல்லாத் துறைகளிலும் மிகவும் பயன்படத்தக்கதொரு அறிவியலாகும். அதை நல்ல முறையில் பயன்படுத்தினுல் ஏற்படுகின்ற நன்மையை அளவிட முடியாது;

ஆனால் தவறான முறையில் பயன்படுத்தினால் தவறான விளைவுகள் ஏற்படுவதோடு, அத்தவறான விளைவுகளினால் விளைகின்ற தீமையையும் அளவிட முடியாது. சுருங்கச் சொல்லின், 'புள்ளியியல் என்பது களிமண்ணைப் போன்றது ; அதிலிருந்து கடவுளையும் உருவாக்கலாம் ; பிசாசையும் உருவாக்கலாம்'. புள்ளியியலானது புள்ளி விவர அடிப்படையிலமைந்த விவரங்களை ஆராயப்படுகின்ற ஒரு கருவியாகும். மற்றக் கருவிகளைப் போலவே, இக்கருவியையும் தவறாகப் பயன்படுத்தினால் தீய பலன்களே விளையும். புள்ளியியலை மருத்துவர்கள் நாடியைப் பரிசோதிக்கப் பயன்படுத்துகின்ற நாடிக் கருவிக்கு (Stethoscope) ஒப்பிடலாம். பரந்த அனுபவத்தின் மூலமே இக்கருவியின் முழு நன்மையைப் பெற முடியும். அனுபவமற்ற ஒரு மருத்துவர் இக்கருவியைத் தவறாகப் பயன்படுத்தி, அதன் மூலம் தீயவிளைவு ஏற்பட்டால் அதற்காக நாம் அக்கருவியையே குறை கூறுவதில்லை ; அதைப் பயன்படுத்தத் தெரியாத மருத்துவரைத்தான் தூற்றுவோம். அதுபோல் புள்ளியியல் என்ற கருவியைத் தவறாகப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் தீயவிளைவுகள் ஏற்பட்டால் அதற்காகப் புள்ளியியலையே குறை கூறுவது அறிவுடைமையாகாது. இதன் காரணமாகத்தான், 'புள்ளியியலில் தேர்ச்சி பெறாதவர் கையாளுகின்ற புள்ளியியல் முறைகள் மிகவும் ஆபத்தான ஒரு கருவியாகும்' என்று கூறப்படுகிறது. மேலும் 'புள்ளியியலைக் கடினமான வரம்புகட்குட்பட்ட ஆனால் ஆராய்ச்சிக்குப் பெரிதும் பயன்படத்தக்க ஒரு கருவியாகக் கருத வேண்டும். அதைக் கையாள மிகுந்த கவனம் தேவை' என்று நியூஷோம் (Newsholme) என்பவர் கூறியிருப்பது இங்கு குறிப்பிடத்தக்கது.

புள்ளியியல் என்பது ஒரு நல்ல, உண்மையுள்ள வேலைக்காரனைப் போன்றது. வேலைக்காரனை நல்ல முறையில் பயன்படுத்துவதன் மூலம் அவனுடைய சிறந்த சேவைகளைப் பெற முடியும். ஆனால், அவன் நல்லவன் என்பதற்காக அவனையே முதலாளியாக்கினால் அவன் மிகவும் மோசமானவனாகி விடுவான். இதுபோல் புள்ளியியலும் ஒரு நல்ல வேலைக்காரனைப் போன்றதுதான். அதனை நல்ல முறையில் பயன்படுத்தி அதன் மூலம் சிறந்த நன்மைகளைப் பெற முயல வேண்டும்.

புள்ளி விவர நிகழ்வொழுங்கு விதி (Law of Statistical Regularity)

புள்ளியியல் கொள்கைகள் 'புள்ளி விவர நிகழ்வொழுங்கு

விதி', 'பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை விதி' ஆகிய இரு விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைந்துள்ளன. இவ்விரு விதிகளையும் புள்ளியியலின் அடிப்படை விதிகள் என்று கூறலாம். இவற்றுள் புள்ளி விவர நிகழ்வொழுங்கு விதியைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

புள்ளி விவர நிகழ்வொழுங்கு விதியானது நிகழ்தகவுத் தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைந்துள்ளது. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிட்டால் அதன் தலை அல்லது பூ ஆகிய இரண்டில் ஒன்று மேல் நோக்கி விழலாம். ஆகவே, தலை மேல் நோக்கி விழுவதற்கான நிகழ்தகவு (Probability) $\frac{1}{2}$ என்று சொல்கிறோம். ஆகவே, அந்த நாணயத்தை இரு தடவைகள் சுண்டிவிட்டால், ஒரு தடவை தலையும் இன்னொரு தடவை பூவும் விழும் என்று சொல்ல முடியாது. இரண்டு தடவைகளிலுமே தலை விழலாம்; அல்லது பூ விழலாம். அதற்காக நாம் நிகழ்தகவுத் தத்துவமே தவருனது என்று சொல்லிவிடக் கூடாது. ஒரு நாணயத்தை 1000 தடவைகள் சுண்டினுல் தலையும் பூவும் ஏறக்குறைய சம எண்ணிக்கையில் விழுவதைக் காணலாம். ஆக்வே, புள்ளியியல் விதிகள் அதிக எண்ணிக்கையிலான உறுப்புக்களுக்கே பொருந்துகின்றன என்று தெரிகிறது. அதாவது, ஒரு முழு இனத் தொகுதியிலிருந்து (Population) தெளிவு செய்யப்பட்ட தேவையான அளவு பெரிய சம வாய்புக்கூறு (Sample) ஒன்றின் சராசரிப் பண்புகள் அந்த முழு இனத் தொகுதியின் சராசரிப் பண்புகளிலிருந்தும் சிறிதும் மாறுபடாதிருக்கும். இதுவே புள்ளி விவர நிகழ்வொழுங்கு விதியாகும். ஒரு கல்லூரியைச் சேர்ந்த 2000 மாணவர்களிலிருந்து சம வாய்ப்புடன் தெரிவு செய்யப்பட்ட 100 மாணவர்களின் சராசரி உயரம், எடை முதலியன அக்கல்லூரியின் 2000 மாணவர்களின் சராசரி உயரம், எடை ஆகியவற்றினின்றும் மாறுபடாமலிருப்பதைக் காணலாம். இதற்குக் காரணம் சராசரிகளின் மாருத்தன்மையே யாகும். கூறெடுக்கும் முறையில் நடத்தப்படுகின்ற எல்லாப் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகளும் இவ்விதியையே அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைந்துள்ளன.

பேரினங்களின் மாருத பொதுமை விதி (Law of Inertia of Large Numbers)

மிகப் பெரிய பரப்பளவிலுள்ள அல்லது நீண்ட காலத்தைச் சார்ந்த மிகப் பெரிய எண்ணிக்கையிலான உறுப்புக்களுள் ஒரு

சில பகுதிகள் அல்லது காலங்களைச் சார்ந்த உறுப்புக்களில் காணப்படுகின்ற இயல்புக்கு மாறான பண்புகள் வேறு சில பகுதிகள் அல்லது காலங்களைச் சார்ந்த உறுப்புக்களிடம் காணப்படுகின்ற எதிர்மறைப் பண்புகளால் ஈடு செய்யப்பட்டு, மொத்த உறுப்புக்களின் பொதுமைப் பண்புகள் எப்பொழுதும் மாறாமலிருக்கும். இது பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை விதி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு மாநிலத்தின் ஒரு நகரம் அல்லது ஒரு மாவட்டத்தில் மக்களின் இறப்பு வீதம் தொத்துநோயின் காரணமாக ஒரு ஆண்டில் இயல்புக்கு மாறாக மிக அதிகமாக இருக்கலாம். ஆனால் அதே காலத்தில் அம்மாநிலத்தில் மற்றொரு மாவட்டத்தில் சுகாதார வசதிகளிலேற்பட்ட முன்னேற்றத்தின் காரணமாக இறப்பு வீதம் மிகக் குறைவாகயிருக்கலாம். ஆகவே, மொத்தத்தில் மாநில முழுவதும் அந்த ஆண்டின் இறப்பு வீதம் மாறாமல் மற்ற ஆண்டுகளின் வீதத்திலேயே இருக்கலாம். இது போல், ஒரு மாநிலத்திலுள்ள ஒரு நகரத்தில் ஒரு ஆண்டிலேற்பட்ட தீவிபத்துக்கள் மிக மிக அதிகமாக இருக்கலாம். ஆனால், அதே ஆண்டில் மாநிலத்தின் மற்ற பகுதிகளில் தீ விபத்துக்கள் மிகக் குறைவாகயிருக்கலாம். ஆகவே, மொத்தத்தில் மாநிலம் முழுவதிலும் தீவிபத்துக்களாலேற்பட்ட இழப்பு இயல்பான அளவிலேயே இருப்பதைக் காணலாம். காப்புறுதிக் கழகங்கள் (Insurance Corporations) மேற்கூறப்பட்ட 'பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை விதியின் அடிப்படையில்' இயங்கி வருவதாலேயே அவைகள் தங்கள் தொழிலில் இழப்பைக் காணாது வருவாயுடன் செயல்பட்டு வருகின்றன.

வினாத்தாள் 1

1. புள்ளியியலின் பொருளையும், குறியிலக்கையும் பற்றி விவாதிக்கவும்.

2. ''புள்ளியியல் என்பது எண்ணிக்கையாலான ஒரு அறிவியல்''—விவாதிக்கவும்.
(மதுரை பி.காம். 1970 ஏப்.)

3. சராசரிகளின் அறிவியலே புள்ளிவிவர இயலாகும் என்று கூறப்படுகிறது. இக் கூற்று எந்த அளவுக்கு விரிவுப் பொருத்தமுடைய தென்பதை விவாதிக்கவும். தற்காலத்தில் புள்ளியியலின் குறி இலக்கு என்ன?
(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

4. 'புள்ளியியல் என்பது, ஓருயிர் போல் இயங்கும் சமூக அமைப்பில் ஏற்படும் எல்லா வெளித் தோற்றங்களையும் அளவுபடுத்தி ஆராயும் அறிவியல் ஆகும்' (பௌலி). இவ்வரையறையை, சிறப்பாக, சமூகப் பொருளாதார நடவடிக்கைகளுக்குப் பொருத்தி ஆராய்க. (மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

5. 'புள்ளியியலின் ஒரு பணியானது முன் சேகரிக்கப்பட்ட செய்திகளையும் புள்ளி விவரங்களையும் ஆராய்ந்து, அவ்வாராய்ச்சியின் அடிப்படையில், பின்னர் வர இருக்கும் போக்குகளை மதிப்பிடுதல் அல்லது முன் கூட்டிக் கூறுதலாகும்'.

   பொருளாதார நிகழ்ச்சிகளிலிருந்து இரண்டு அல்லது மூன்று நல்ல எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு இதை விளக்குக. (மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

6. 'புள்ளியியல் இல்லாத அறிவியல் கனி தராது; அறிவியல் இல்லாத புள்ளியியலுக்கு வேர் கிடையாது.' இக் கருத்தைத் தேவையான விளக்கங்களுடன் விவரிக்கவும்.

7. புள்ளியியலின் குறியிலக்கையும், பல்வேறு வரையறைகளின் பொருளையும் விளக்கி விவாதிக்கவும். (சென்னை பி.காம். 1968 செப்.)

8. புள்ளியியலின் குறியிலக்கு, பயன்பாடுகள், வரம்புகள் பற்றி விவாதிக்கவும். (சென்னை பி.காம். 1960 செப்.)

9. புள்ளியியலின் பயன்களையும், வரம்புகளையும் விளக்குக. (மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

10. வெவ்வேறு வகையான புள்ளியியல் முறைகளை விவரிக்கவும்; பொருளாதாரத் துறையினருக்கும் தொழில் துறையினருக்கும் அவைகளுடைய பயனை விளக்குக. (சென்னை பி.காம். 1966 செப்.)

11. வணிகவியலிலும், தொழிலியலிலும் புள்ளியியலின் பயன்கள் பற்றி ஒரு சுருக்கமான கட்டுரை வரைக. (சென்னை பி.காம். 1966 ஏப்., 1968 ஏப்.)

12. 'இது புள்ளியியல் யுகம் ; அரசாங்கம், வணிகத்துறை, தொழில் துறை ஆகியவற்றில் புள்ளியலைக் கொண்டு சிறப்பாகத் தீர்க்கப்பட முடியாத பிரச்சினை எதுவுமே இல்லை.'—விவாதிக்கவும்.
(சென்னை பி.காம். 1967 செப்.)

13. புள்ளியியலின் நோக்கங்கள் பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக.

14. பொருளாதாரப் படிப்புக்குப் புள்ளியியல் பகுப்பாய்வின் பயனை விளக்குக. (மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

15. புள்ளியியலின் பயன்களை, குறிப்பாக, தொழிற் பிரச்சினைகளுடன் பொருத்தி ஒரு கட்டுரை வரைக.
(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

16. புள்ளியியலின் மீதுள்ள அவநம்பிக்கைக்குக் காரணங் கூறு. (மதுரை பி.காம். 1971 செப்.)

17. பின்வருவனவற்றை விளக்கிக் காட்டுக :
(1) எண்கள் பொய் சொல்லா.
(2) புள்ளியியல் முறைகள் கொண்டு எதையும் நிறுவலாம்.
(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

18. 'புள்ளியியல் என்பது ஒரு சக்தி வாய்ந்த கருவியாதலால், சரிவர பயிற்சி பெறாத அல்லது நேர்மையற்ற மனிதர்கள் அவ்வப்போது முட்டாள்தனமான விளைவுகளை உண்டுபண்ணினால் அதில் ஆச்சரியமேயில்லை.' —விவாதிக்கவும். (சென்னை பி.காம். 1967 ஏப்.)

19. 'திறமைக் குறைவானவர்களின் கையில் புள்ளியியல் முறைகள் மிகவும் ஆபத்தான கருவிகளாகும்.' காரணங்கள் கூறி விவாதிக்கவும்.

20. சிறு குறிப்பு வரைக :—
புள்ளிவிவர நிகழ்வொழுங்குவிதி.
(மதுரை பி.காம். 1959 ஏப்.)
(சென்னை பி.காம். 1962 ஏப்., 1968 ஏப்.)
பேரினங்களின் மாறுப் பொதுமைவிதி.
(சென்னை பி.காம். 1960 செப்., 61 ஏப்., 68 செப்.)
(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

2. புள்ளியியல் ஆய்வு

(Statistical Investigation)

புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி ஆராயப்பட வேண்டிய ஒரு பிரச்சினைக்குரிய நம்பகமான விவரங்களைச் சேகரிப்பது தான் புள்ளியியல் அளவெடுப்பின் (Statistical Survey) முக்கிய நோக்கமாகும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் தன்மையைப் பொறுத்துத் தான் புள்ளியியல் ஆய்வின் வெற்றியும் அமைந்திருக்கும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் மெய்யாகவும், குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்குரியனவாகவும் இருந்தால் ஆய்வின் இறுதி முடிவு பிரச்சினையின் வெற்றிக்கு அடிகோலுவதாக அமைந்திருக்கும். ஆனால், சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் தவறானவைகளாயிருந்தால் ஆய்வின் முடிவு தவறாகயிருப்பதோடல்லாமல் நேர்மாறான விளைவையும் ஏற்படுத்திவிடும். எனவே, ஆய்வுக்கான விவரங்களைச் சேகரிப்பதும், சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை ஆராய்ந்து, அவற்றைப் பிரச்சினைக்கேற்றவாறு தெளிவாக, எளிதில் புரிந்துகொள்ளும் வகையில் சிறந்த முறையில் வெளியிடுவதுமே ஆய்வின் முக்கிய பணிகளாகின்றன. ஆனால் ஒழுங்காகத் திட்டமிடாமல் இப்பணிகளை வெற்றிகரமாகச் செய்து முடிக்க முடியாது. ஆகவே, புள்ளியியல் ஆய்வுக்கான வேலைகளைத் தொடங்கு முன் முதலில் பிரச்சினையின் தன்மையை நன்றாக வரையறுத்துக் கொள்வதோடு, கணக்கெடுப்பு முறையையும் நன்கு சிந்தித்து திட்டமிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வுக்கான பணிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எட்டுக் கட்டங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) கணக்கெடுப்பிற்கான திட்டங்கள் வகுத்தலும், சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்களை நிர்ணயித்தலும்.

(2) வினாத் தொகுதிகளும் (Questionnaires) வினாப் பட்டியல்களும் தயாரித்தல்.

(3) கூறுகளைத் தெரிவு செய்தல் (தேவைப்பட்டால்).

(4) விவரங்கள் சேகரித்தல்.

(5) விவரங்களைச் சோதித்து வரிசைப்படுத்துதல்.

(6) இனப் பாகுபாடு செய்தலும், பட்டியலமைத்தலும்.

(7) பகுப்பாய்வு செய்தல்.

(8) விவரங்களின் சுருக்கத்தையும், முடிவுகளையும் அறிக்கையாக வெளியிடல்.

1. திட்டங்கள் வகுத்தலும், விவரங்களை நிர்ணயித்தலும்

திட்டமிட வேண்டியதன் அவசியம் :

புள்ளியியல் ஆய்வுக்கான பிரச்சினையின் தன்மையை ஆராய்ந்து, அதன் வரையறைகளை நிர்ணயித்துக் கொண்ட பின் கணக்கெடுப்பிற்கான திட்டங்களை வகுத்துக் கொள்ள வேண்டும். அதன் பின்னர், கணக்கெடுப்பு வேலைகளுக்கான ஏற்பாடுகளைச் செய்ய வேண்டும். சரியான திட்டங்களில்லாமல் ஆய்வு வேலைகளில் இறங்கினுல் இறுதியில் பிரச்சினைக்கான முடிவுகளைப் பெறமுடியாமற் போவதோடு பெரிய இழப்புக்களையும் அடைய நேரிடலாம். மாருக, ஒழுங்கான முறையில் திட்டமிட்டுச் செய்தால் எவ்வளவு கடினமான வேலையாகயிருப்பினும் சரியாக, சீக்கிரமாக, வெற்றிகரமாகக் குறைந்த செலவில் முடித்துவிடலாம் என்பது கீழ்க்காணும் ஒரு நிகழ்ச்சியிலிருந்து நன்கு விளங்கும்.

புள்ளியியல் துறையுடன் கூடிய சென்னை நகரத்திலுள்ள ஒரு நிறுவனத்தின் நிருவாகப் பொறுப்பினை ஏற்றுக் கொண்ட அதன் இயக்குநருக்குத் தலைமைப் புள்ளியல் அதிகாரியின் திறமையில் நம்பிக்கையில்லை. அந்த அதிகாரியின் திறமையைச் சோதிக்க எண்ணிய அவர் ஒரு நாள் அவ்வதிகாரியை அழைத்து, நிறுவனத்தின் கிளையொன்றை நகரில் நிறுவுவதற்காக, நகரின் குறிப்பிட்ட இருபது சந்திப்புகளில் ஒன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியிருப்பதால், அந்த இருபது சந்திப்புக்களிலுமுள்ள போக்குவரத்து, மக்கள் கூட்டம் பற்றிய அறிக்கையொன்று மறுநாள் நடைபெற இருக்கும் இயக்குநர்களின் கூட்டத்தில் விவாதத்திற்காக வைக்கப்பட வேண்டுமென்றும் ஆகவே, அதுபற்றிய புள்ளி விவரங்களடங்கிய அறிக்கையொன்றை 24 மணி நேரத்திற்குள் தயாரித்துக் கொண்டு வருமாறு பணித்தார். இத்தகைய ஒரு அளவெடுப்பு வேலையை ஒரே நாளில் செய்து முடிக்கக் குறைந்தது 30 பேராவது

வேண்டும். ஆனால் அந்நிறுவனத்தின் புள்ளியியல் துறையில் மொத்தம் 10 பேர்களேயிருந்தனர். மேலும் அந்த 10 பேர்களும் வேறு ஒரு முக்கியமான வேலையில் ஈடுபட்டிருந்தனர். இருப்பினும், தலைமைப் புள்ளியியல் அதிகாரி மனந்தளரவில்லை. துரிதமாகத் திட்டங்களை வகுத்து, அளவெடுப்பு வேலைகளுக்கான ஏற்பாடுகளைச் சுறுசுறுப்பாகச் செய்யலானார். அவர் இயல்பாகவே அந்நிறுவனத்தின் பல்வேறு துறையினருடனும், நகரத்தின் பெரிய நிறுவனங்களுடனும், பல்கலைக் கழகப் பேராசிரியர்களுடனும் நல்ல முறையில் தொடர்புகள் வைத்திருந்தார். அவர் மற்ற துறைகளிலிருந்து 12 எழுத்தர்களையும், பல்கலைக் கழகத்திலிருந்து 8 மாணவர்களையும் ஒருநாள் வேலையிலமர்த்திக் கொள்வதற்காக இயக்குநரிடம் அனுமதி வாங்கிக் கொண்டார். இயக்குநரிடம் கொடுக்கப்பட வேண்டிய இறுதி அறிக்கையின் தன்மையையும் வடிவத்தையும் தீர்மானித்துக் கொண்டு அதற்கான ஆறு வெற்றுப் பட்டியல்களை அமைத்துக் கொண்டார். அப்பட்டியல்களை இயக்குநரிடம் காட்டிச் சரி கொண்டார். நியமிக்கப்பட 20 பேர்களிடமும், ஆளுக்கொரு சந்திப்புக்குச் சென்று தேவையான விவரங்களைச் சேகரிக்கும் பணிகளை ஒப்படைத்தார். தன்னுடைய துறையிலுள்ள ஆறு பேர்களை அழைத்து அந்த 20 பேரும் செய்கின்ற வேலைகளை மேற்பார்வையிடும் பொறுப்புக்களை அளித்தார். இன்னும் இருவரிடம் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களைப் பட்டியல்களில் நிரப்பித் தேவையான குறிப்புக்களைத் தயாரிக்கும் வேலைகளை ஒப்படைத்தார். குறிப்பிட்டபடி, மறுநாள் காலை 7 மணிக்கு 20 சந்திப்புக்களிலும் விவரம் சேகரிக்கும் வேலை தொடங்கிற்று. இரண்டு மணி நேரத்திற்கு ஒரு தடவை சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் புள்ளியியல் துறை அலுவலகத்திற்கு அனுப்பப்பட்டன. இவ்வாறு கிடைக்கப்பட்ட விவரங்கள் உடனுக்குடன் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுப் பட்டியல்களில் நிரப்பப்பட்டன. சரியான மாலை 7 மணிக்கு விவரங்கள் சேகரிக்கும் வேலைகள் முடிவடைந்தன. இரவு 9 மணிக்குள் பட்டியல்கள் யாவும் நிரப்பப்பட்டு, குறிப்புக்கள் யாவும் தயார் செய்யப்பட்டு, தட்டெழுத்துப் பிரதிகள் எடுக்கப்பட்டு இயக்குநரின் பார்வைக்காக அனுப்பப்பட்டன. 24 மணி நேரத்திற்குள் இவ்வளவு பெரிய வேலையைத் திறம்படச் செய்து முடித்த தலைமைப் புள்ளியியல் அதிகாரியை இயக்குநர் பெரு மகிழ்ச்சியினால் பாராட்டினார். நன்ருகச் சிந்தித்துத் திட்டமிட்டுச் செய்தாலொழிய இத்தகைய பெரிய வேலைகளைக் குறுகிய காலத்தில், திறம்படச் செய்து முடிக்க இயலாதென்பது நன்கு விளங்கும். ஆகவே, எத்தகைய புள்ளிவிவரக் கணக்கெடுப்பு வேலையா

யிருப்பினும், ஒழுங்காகத் திட்டமிட்டுச் செயல்புரிதல் வேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது. மேலும், மேற்கூறப்பட்ட புள்ளி விவரக் கணக்கெடுப்பு வேலையைத் தொடங்குமுன் புள்ளியியல் ஆய்வாளர் வெற்றுப் பட்டியல்களை முதலில் அமைத்துக் கொண்டார் என்பதைக் கவனிக்கவும். அதாவது, சேகரிக்கப் படுகின்ற விவரங்கள் எவ்வாறு வெளியிடப்பட வேண்டுமோ, அதற்குத் தக்கவாறு வெற்றுப் பட்டியல்களமைத்து, அப் பட்டியல்களை நிரப்புவதற்கு வேண்டிய விவரங்கள் சேகரிக்கப் பட்டன. ஆகவே, புள்ளியியல் ஆய்வுக்கான 8 பணிகளும் முன்னர் கூறப்பட்டதுபோல் வரிசையாகத் திட்டமிடப் படுகின்றன. ஆனால் ஆய்வுப் பணிகளோ எட்டாவது பணி யில் தொடங்கிப் பின் முக வரிசையில் விவரங்கள் சேகரிக்கும் பணி வரை ஒவ்வொன்ருகச் செய்து முடிக்கப்படுகின்றன. அதாவது, புள்ளி விவரக் கணக்கெடுப்புப் பணிகள் கீழ்க்கண்ட வரிசைப்படி ஒவ்வொன்ருகச் செய்யபடல் வேண்டும்.

(i) ஆய்வுக்கு என்னென்ன விவரங்கள் தேவையென் பதை ஆராய்ந்து குறிப்பு எடுத்துக் கொள்ளல்.

(ii) சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் இறுதியில் வெளி யிடப்பட வேண்டிய முறையினை ஆராய்ந்து அதற்குத் தக்க வாறு வெற்றுப் பட்டியல்கள் அமைத்துக் கொள்ளல்.

(iii) சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களை வரிசைப்படுத்திக் கணக்கிடுவதற்குத் தேவையான வெற்றிடப் பட்டியல்களை அமைத்துக் கொள்ளல்.

(iv) ஆய்வுக்கான விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்குத் தேவை யான வினுப்பட்டியலை அமைத்துக் கொள்ளல்.

மேலே கூறப்பட்ட நிகழ்ச்சியில் தலைமைப் புள்ளியியல் அதிகாரி இந்த வரிசைப்படியே தன் வேலைகளைச் செய்து முடித்தார் என்பதைக் கருத்திற் கொள்ளவும்.

புள்ளி விவரக் கணக்கெடுப்பிற்கான திட்டங்கள் வகுக்கப் படும்போது கீழ்க்காணும் பணிகள் முக்கியமாகக் கருதப்பட வேண்டும்.

(i) ***கணக்கெடுப்பின் நோக்கம், குறியிலக்கு சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்கள் ஆகியவற்றை நிர்ணயித்தல் :***

புள்ளி விவரக் கணக்கெடுப்பின் நோக்கமும் குறியிலக்கும் தெளிவாக விளக்கப்பட்டால் தான் கணக்கெடுப்பில் சேர்க்கப் பட வேண்டிய விவரங்களையும், தேவையற்ற விவரங்களையும் நிர்ணயிக்க முடியும். ஆய்வுக்குத் தேவையற்ற விவரங்களைக் கணக்கெடுப்பிலிருந்து நீக்கிவிடுவதன் மூலம் பணமும், நேரமும் வீணுவதைத் தடுக்க முடிகிறது.

(ii) *கணக்கெடுப்பின் வகையையும், தன்மையையும் நிர்ணயித்தல்* :

புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப் பலவகையான கணக் கெடுப்பு முறைகள் உள்ளன. இவற்றுள் எந்த முறையைப் பின்பற்றிப் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்க வேண்டுமென் பதைத் தீர்மானித்துக் கொள்ள வேண்டும். சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்களின் தன்மை, பிழையின்மைத் தரம் மற்றும் விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ள பணம், நேரம், விவரங்கள் சேகரிப்பதற்குக் கிடைக்கக்கூடிய பயிற்சி பெற்ற வேலையாட்கள் ஆகிய பிரச்சினைகளைச் சிந்தித்து அவை களுக்குத் தக்கவாறு கணக்கெடுப்பு முறையைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். பல்வேறு வகையான கணக்கெடுப்பு முறைகள் வருமாறு :

(அ) *முதனிலை, இரண்டாம் நிலை கணக்கெடுப்பு முறைகள்* (Primary and Secondary Inquiry)

ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக, முதன் முறையாகத் தகவல் சேகரிக்கும் முறைக்கு முதல் தரக் கணக்கெடுப்பு முறை என்று பெயர். வேறொரு நோக்கத்திற்காக வேறொருவரால் சேகரிக்கப்பட்டு ஏற்கெனவே ஒரு ஆய்விற்குப் பயன்படுத்தப் பட்ட விவரங்களுக்கு இரண்டாம் தர விவரங்கள் (Secondary Data) என்று பெயர். இத்தகைய இரண்டாம் தர விவரங் களிலிருந்து இன்னொரு ஆய்வுக்கு தேவையான விவரங்களைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளும் முறைக்கு இரண்டாம் தரக் கணக் கெடுப்பு முறை என்று பெயர்.

(ஆ) *அதிகாரப்பூர்வ, அரை-அதிகாரப்பூர்வ, அதிகாரப் பூர்வமற்ற கணக்கெடுப்பு முறைகள்* (Official, Semi-official, Non-official Inquiries)

மாநில அல்லது மத்திய அரசாங்கத்தினுல் நடத்தப்படும் கணக்கெடுப்பிற்கு அதிகாரப்பூர்வக் கணக்கெடுப்பு என்று

பெயர். மாநகராட்சி, நகராட்சி அல்லது ஊராட்சி மன்றங்களால் நடத்தப்படுகின்ற கணக்கெடுப்பிற்கு அரை-அதிகாரப் பூர்வக் கணக்கெடுப்பு என்று பெயர். ஒரு வணிகக் கழகம், அல்லது ஒரு தொழில் நிறுவனம் போன்ற தனியார் துறையினரால் நடத்தப்படுகின்ற கணக்கெடுப்பிற்கு அதிகாரப் பூர்வமற்ற கணக்கெடுப்பு என்று பெயர்.

(இ) முழுக்கணிப்பு முறையும் கூறுக் கணிப்பு முறையும் (Census and Sample methods of Inquiries)

தகவல் தரக்கூடிய ஒவ்வொருவரிடமிருந்தும் நேரிடைத் தொடர்பின் மூலம் தகவல் சேகரிக்கும் முறைக்கு முழுக் கணிப்பு முறை என்று பெயர். இது ஒரு பரந்த அளவிலான முறையாகும். இம்முறையின்படி, தகவல் தரக்கூடிய ஒவ்வொருவரிடமுமிருந்து நேரடியாகத் தகவல் சேகரிக்கப்படுவதால் பெருவாரியான பணமும், நீண்டகாலமும் தேவைப்படுவதோடு, விவரங்களை நல்ல முறையில் சேகரிக்க ஏராளமான தேர்ச்சி பெற்ற பணியாளர்கள் தேவைப்படுபவர். ஆகவே, தேவையான அளவு தேர்ச்சி பெற்ற பணியாளர்கள் கிடைக்காவிடினும், விவரங்கள் சேகரிப்புப் ,பணியாளர்களுக்குச் சரியான ஊதியம் தரப்படாவிடினும், தகவல் சேகரிப்புப் பணி உண்மையாக நடந்திருக்குமென நம்ப முடியாது. ஆகவே, தகவல் சேகரிக்கப் போதிய கால இடைவெளி இல்லாதபோதும், தேவையான அளவு தேர்ச்சி பெற்ற பணியாளர்கள் கிடைக்காத போதும், போதிய பண வசதியில்லாத போதும், கூறுக் கணக்கெடுப்பு முறையில் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. இம்முறையில் முதலில் தகவல் தருவோர்களுள் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலானவர்களைக் கொண்ட ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறு (random sample) ஒன்றைத் தெரிவு செய்து, அக்கூறிலுள்ளோரிடமிருந்து தகவல்கள் சேகரித்து, அத்தகவல்களை ஆராய்ந்து, அந்த ஆய்வின் மூலம் கிடைக்கப்படுகின்ற முடிவுகள் அம்முழுத் தொகுதி (population) யின் முடிவுகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்றன. தேவையான எண்ணிக்கையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கூறிலுள்ளவர்களிடமிருந்து மட்டுமே விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவதால் ஏராளமான பணம் தேவையில்லை. குறைந்த எண்ணிக்கையில் பணியாளர்கள் போதுமாகையால் சிறந்த தேர்ச்சி பெற்ற பணியாளர்களைக் கொண்டு சிறந்த முறையில் பிழையில்லாத விவரங்களை மிகவும் குறுகிய காலத்திற்குள் சேகரிக்க முடியும். ஆனால் கூறு தெரிவு செய்வதிலோ, அல்லது கூறிலிருந்து

தகவல் சேகரிப்பதிலோ ஒரு சிறு தவறு நேர்ந்தாலும், இறுதி முடிவுகள் பெரிதும் பாதிக்கப்படும் என்பதைக் கருத்திற் கொண்டு மிகவும் கவனமாக ஆய்வு வேலையைச் செய்து முடிக்க வேண்டும்.

(ஈ) அஞ்சல் கணிப்பு முறையும் கணிப்பாளர் மூலம் கணக்கெடுக்கும் முறையும்:

அஞ்சல் கணிப்பு முறையில், விவரங்களைத் தருபவர்களிடம் கேட்கப்பட வேண்டிய கேள்விகளையும், அக்கேள்விகளுக்கு நேரே அவற்றிற்கான விடைகளை எழுதுவதற்குப் போதுமான அளவு காலியிடங்களையும் கொண்ட அச்சடிக்கப்பட்ட வினாத் தொகுதிப் படிவங்கள் (Questionnaire forms) விவரங்களைத் தருவோருக்கு அஞ்சல் மூலம் அனுப்பப்படுகின்றன. விவரங்களைத் தருவோர், அவ்வினாத் தொகுதிப் படிவங்களை நிரப்பி ஆய்வாளருக்கு அஞ்சல் மூலம் அனுப்புவர். இவ்வாறு அஞ்சல் மூலமே விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்ற இம்முறைக்கு அஞ்சல் கணிப்பு முறை என்று பெயர்.

ஆனால் தகவல் தருவோர் கற்றவராயும், வினாத் தொகுதிப் படிவங்களை நிரப்பி, கால தாமதமின்றி அஞ்சல் மூலம் ஆய்வாளருக்கு அனுப்ப வேண்டுமென்ற பொறுப்பை உணர்ந்தவராயும் இருந்தால் மட்டுமே இம்முறையைப் பின்பற்றி விவரங்கள் சேகரிக்க முடியும். ஆகவே, அஞ்சல் முறையைப் பின்பற்ற முடியாத ஆய்வுகளில் கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்கள் சேகரிக்கும் முறை பின்பற்றப்படுகிறது. தகவல் தருவோரிடமிருந்து பெறப்படுகின்ற விவரங்களைக் குறித்துக் கொள்வதற்குப் பயன்படுகின்ற வினாப் பட்டியல் (Schedule) களுடன் பயிற்சி பெற்ற கணிப்பாளர்கள் தகவல் தருவோர் ஒவ்வொருவரையும் அணுகி, வினாப் பட்டியலிலுள்ள வினாக்களுக்கான விடைகளைக் கேட்டறிந்து, அவ்விடைகளை வினாப் பட்டியலில் குறித்துக் கொள்வர். இவ்வாறு தகவல் தருவோர் எல்லோரிடமிருந்தும் விவரங்களைக் கேட்டறிந்து வினாப்பட்டியல்களை நிரப்பிய பின், நிரப்பப்பட்ட வினாப் பட்டியல்கள் ஆய்வுக்காக அனுப்பி வைக்கப்படுகின்றன.

(உ) பூர்வாங்கக் கணக்கெடுப்பும் மீள் கணக்கெடுப்பும்: (Initial and Repetitive inquiries)

முற்றிலும் புதுமையான ஒரு ஆய்வுக்காக முதன்முறையாக விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்ற முறைக்குப் 'பூர்வாங்கக்

கணக்கெடுப்பு முறை' என்று பெயர். இத்தகைய கணக்கெடுப்புகளுக்கு முன் மாதிரியாக எந்தக் கணக்கெடுப்புமில்லையாகையால் சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்களை நன்கு சிந்தித்து நிர்ணயித்துக் கொண்டபின், சேகரிப்புக்கான செயல் முறைத்திட்டங்களையும் நன்கு சிந்தித்துத் திட்டமிட்டு அதன் பின்னரே சேகரிப்புப் பணியைத் தொடங்க வேண்டும். ஒரு ஆய்வுக்காக நடைபெற்ற கணக்கெடுப்பின் தொடர்ச்சியாகவோ, அல்லது அக்கணக்கெடுப்பைப் பின்பற்றியோ அது போன்ற மற்ருெரு ஆய்வுக்காக நடத்தப்படுகின்ற கணக்கெடுப்பிற்கு மீள் கணக்கெடுப்பு (Repetitive inquiry) என்று பெயர். இம்மாதிரியான கணக்கெடுப்புக்களில் சில நன்மைகள் உள்ளன. முன் சேகரிப்புக்களில் ஏற்பட்ட அனுபவங்களைக் கொண்டு, சேகரிக்கப்படவேண்டிய விவரங்களிலும் சேகரிப்பு முறைகளிலும் தேவையான, தகுந்த மாறுதல்களைச் செய்து கொள்ள முடியும். மேலும், முன் சேகரிப்புக்களில் கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்களுடன் இப்போது சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியும்.

(ஊ) *நேரடிக் கணக்கெடுப்பும், மறைமுகக் கணக்கெடுப்பும்:* (Direct and Indirect inquiries)

எண்ணுலான விவரங்களைச் சேகரிக்கின்ற முறை நேரடிக் கணக்கெடுப்பு முறை எனப்படும். உதாரணமாக, ஒரு தொழிற் சாலையிலுள்ள பணியாளர்களின் கூலிகள் பற்றிய விவரங்கள் நேரடியாக எண்ணுலான விவரங்களாகவே (அதாவது ரூபாயில்) சேகரிக்கப்படுகின்றன. ஆனுல் சில ஆய்வுகளின்போது சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்கள் பண்பின் விவரங்களாகயிருப்பின் (Qualitative data) அவற்றை எண்சார் விவரங்களாக மாற்றி அதன் பின்னர் சேகரிக்க வேண்டியதிருக்கும். உதாரணமாக ஒரு வகுப்பைச் சேர்ந்த மாணவர்களின் நுண்ணறிவைப் பற்றிய விவரங்களை நேரடியாக எண்ணுலான விவரங்களாகச் சேகரிக்க முடியாதாகையால் அம்மாணவர்களின் நுண்ணறிவைப் பற்றிய விவரங்கள் ஒரு தேர்வில் அவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களாகச் சேகரிக்கப்படுகின்றன.

(எ) *வெளிப்படைக் கணக்கெடுப்பும், இரகசியக் கணக்கெடுப்பும்* (Open and Confidential inquiries):

ஒரு ஆய்வுக்காக சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களும் அந்த ஆய்வின் இறுதி முடிவுகளும் பொதுமக்கள் அறிந்துகொள்ளு

மாறு வெளியிடப்படக் கூடியனவாகயிருப்பின், அவ்விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்ற முறைக்கு வெளிப்படைக் கணக்கெடுப்பு (Open inquiry) முறை என்று பெயர். ஆனால் சில கணக்கெடுப்புக்களில் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களும், அவைபற்றிய ஆய்வின் முடிவுகளும் வெளியிடப்படுவதில்லை. இத்தகைய ஆய்வுகளுக்காக விவரங்கள் சேகரிக்கப்படும் போது, சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் வெளியிடப்படாமல் இரகசியமாக வைக்கப்படும் என்று தகவல் தருவோர்க்கு உறுதியளிக்கப்படுகிறது, இத்தகைய கணக்கெடுப்பிற்கு "இரகசியக் கணக்கெடுப்பு" (Confidential inquiry) என்று பெயர்.

(ஏ) *ஒழுங்கு முறைக் கணக்கெடுப்பும், குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்கான கணக்கெடுப்பும் :*

ஒழுங்கு முறைக் கணக்கெடுப்பு முறையில் குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் ஆய்வுக்கான விவரங்கள் மீண்டும் மீண்டும் சேகரிக்கப்பட்டுக் கொண்டேயிருக்கும். உதாரணமாக, உணவு பண்டங்களின் விலைவாசி பற்றிய ஆய்விற்குத் தேவையான உணவுப் பண்டங்களின் விலைவாசி பற்றிய விவரங்கள் வாரந்தோறும் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒழுங்காகச் சேகரிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஒழுங்காக. முறையாக நடத்தப்பட்டு வருகின்ற கணக்கெடுப்பிற்கு ஒழுங்கு முறைக் கணக்கெடுப்புக்கள் குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்கான நோக்கத்துடன் ஒரே ஒரு தடவை தான் எடுக்கப்படும். உதாரணமாக, நாட்டிலுள்ள பிச்சைக்காரர்கள் பற்றிய கணக்கெடுப்பு பிச்சைக்காரர்கள் பற்றி ஆய்வு செய்யப்படும்போது மட்டுமே ஒரு தடவை நடத்தப்படும். அந்த ஒரு தடவை நடத்தப்படுகின்ற புள்ளி விவரக் கணக்கெடுப்பில் கிடைக்கின்ற விவரங்களைக் கொண்டே ஆய்வுப் பணி செய்து முடிக்கப்படும்.

3. *புள்ளி விவர அலகுகளை வரையறுத்தல்* (Defining Statistical units) :

புள்ளியியல் ஆய்வுக்கான விவரங்கள் எண்ணலான விவரங்களாகவே சேகரிப்படல் வேண்டும். பண்பின் விவரங்களும் (Qualitative data) ஆய்வுக்குத் தேவைப்பட்டால், பண்பின் விவரங்களை அளவின் விவரங்களாக (Quantitative data) மாற்றி எண்களாக சேகரிக்க வேண்டும். ஆகவே, விவரங்கள் சேகரிக்கப்படத் தொடங்கு முன்னர் அளவின் விவரங்களை எண்களாக மாற்றுவதற்குரிய அலகுகளைத் திட்ட

வட்டமாக வரையறுத்துக் கொள்ள வேண்டும். அலகுகள் சரிவர வரையறுக்கப்படாவிடில், தேவையற்ற விவரங்களைச் சேர்த்துக் கொள்ளவும் சேர்க்கப்பட வேண்டிய விவரங்களை விட்டுவிடவும் ஏதுவாகும். மேலும், சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆய்வுக்குப் பொருத்தமில்லாமற் போவதுமுண்டு. ஆகவே, அலகுகளின் வரையறைகள் சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாகவும், நிலைத் தன்மை வாய்ந்ததாகவும் இருத்தல் அவசியம். இவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்பட்ட வரையறைகள் ஆய்வின் தொடக்க முதல் இறுதிவரை சிறிதளவும் மாற்றப்படாமல் கவனமாகப் பின்பற்றப்பட வேண்டுவது புள்ளியியல் ஆய்வில் வெற்றிக்கு மிக மிக இன்றியமையாத தொன்றாகும். புள்ளியியல் ஆய்வுக்காக வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியியல் அலகுகள் (Statistical units) எனப்படும்.

புள்ளியியல் அலகுகளை வரையறுப்பது எளிது போல் தோன்றினாலும் உண்மையில் எளிதான செயலன்று. எண்ணளவையிலான விவரங்கள் நன்றாக வரையறுக்கப்பட்ட அலகுகளுடனேயே அமைந்திருக்கும். உதாரணமாக, மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பில் ஒரு அலகு என்பது ஒரு ஆள் ஆகும், இதுபோல், தொழில் நிறுவனத்தின் ஊழியர்களின் வருமானப் பற்றிய கணக்கெடுப்பின் அலகு என்பது ரூபாயைக் குறிக்கும். இது போன்ற விவரங்களில் அலகுகள் இயற்கையாகவே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால், சில வகையான கணக்கெடுப்புக்களில் ஒரு சில விவரங்களின் அலகுகளை வரையறுப்பது மிகவும் கடினமாகயிருக்கும். உதாரணமாக, சென்னை நகரில் வாழும் மக்களின் குடியிருப்பு வசதியைப் பற்றிய ஆய்வுக்கான கணக்கெடுப்பில் நகரிலுள்ள வீடுகள் பற்றியும், இவ்வீடுகளில் வாழ்கின்ற குடும்பத்தினர் பற்றியும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படல் வேண்டும். குடியிருப்புக்களின் அலகு ஒரு வீடு என்று ஏற்றுக் கொண்டால் வீட்டைப் பற்றிய வரையறைகளை நிர்ணயித்துக்கொள்ள வேண்டும். ஒரு குடும்பத்தினர் வாழ்கின்ற ஒரு முன் வாசலுடன் கூடிய ஒரு இருப்பிடத்தை ஒரு வீடு என்று வரையறுக்கலாம். பெரும்பாலான இருப்பிடங்களுக்கு இவ்வரையறை பொருந்தும். ஆனால் ஒரே வாசலுடன் கூடிய ஒரு இருப்பிடத்தில் இரண்டு அல்லது மூன்று குடும்பங்கள் வாழ்ந்து வந்தால் அதை இரண்டு வீடுகள் என்று கொள்வதா அல்லது ஒரு வீடு என்றே கொள்வதா என்ற குழப்பமேற்படலாம். ஆகவே, இதுபோன்று

எழக்கூடிய ஐயப்பாடுகளையும் குழப்பங்களையும் நீக்குமளவிற்கு வீட்டைப் பற்றிய தன்மைகள் வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

ரூபாய், லிட்டர், படி, அடி, சதுர அடி, ஏக்கர், ராத்தல், கிராம், கிலோ போன்ற அளவுகளைக் கொண்ட அளவின் விவரங்களின் அலகுகள் மிகவும் தெளிவாக வரையறுக்கப் பட்டுள்ளன. இருப்பினும் இவ்வலகுகள் நடைமுறையில் எவ்வாறு பயன்படுத்தப் படுகின்றனஎன்பதை மிகவும் கவனமாகக் கருத்திற்கொண்டு அதற்கேற்ப வரையறையையும் தெளிவாக நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, ஒரு டன் என்பது 2240 ராத்தல்களைக் கொண்டன என நாம் அறிவோம். ஆனால், கடல் வாணிபத்தில் சிறிய டன் (2,000 ராத்.), பெரிய டன் (2,240 ராத்), மெட்ரிக் டன் (2,204.6 ராத்.) என்ற மூன்று வகை டன்கள் பழக்கத்திலுள்ளன. ஆகவே, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி பற்றிய ஒரு கணக்கெடுப்பில் டன் என்பதை ஒரு அலகு என்று ஏற்றுக் கொண்டால், அது எத்தனை ராத்தல்கள் கொண்டது என்ற விளக்கம் தரப்படல் வேண்டும். இதுபோல் பல நாடுகளிலிருந்தும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படும்போது, பல நாடுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்ற பல்வேறு வகையான அலகுகளையும் கருத்திற்கொண்டு எல்லா நாட்டிற்கும் பொதுவான ஒரு அலகை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். அவ்வாறு ஒரு பொது அலகை நிர்ணயிக்க முடியாவிடில், ஏதாவது ஒரு பொது அலகின் அடிப்படையில் எல்லா நாட்டு விவரங்களும் சேகரிக்கப்பட வேண்டும்.

ஒரு புள்ளியியல் அலகுக்குத் தேவையான அடிப்படைப் பண்பியல்கள்.

1. புள்ளியியல் அலகு கணக்கெடுப்பிற்குப் பொருத்தமானதாகயிருத்தல் வேண்டும்.

2. எளியதாக, தெளிவாக, சுருக்கமாக, முழுமையாகயிருத்தல் வேண்டும்.

3. நிலைத்தன்மையுடையதாகவும், தரமானதாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

4. ஆய்வு முழுமையிலும், ஒரே சீராகவும், மாருத் தன்மையுடனும் இருக்க வேண்டும்.

4. பிழையின்மைத்தரம் (Degree of Accuracy)

ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வின் இறுதி முடிவுகள் அந்த ஆய்வின் பிழையின்மைத் தரத்தைப் பொறுத்தே நம்பகமானவையாக அமைகின்றன. ஆகவே, சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களின் பிழையின்மைத் தரம் குறைந்து போகாதவாறு மிகவும் கவனமாகச் சேகரிப்புப் பணியை மேற்கொள்ள வேண்டும். எண்ணப்படத்தக்க விவரங்களை முழுமையான பிழையின்மைத் தரத்துடன் சேகரிக்க முடியும். ஆனால், ஆய்வுத்தளம் மிகப் பரந்ததாயும், குறுகிய கால இடைவெளியில் சிக்கனமாக ஆய்வை முடிக்க வேண்டியிருந்தாலும் விவரங்களை மிகச் சரியாக எண்ணிச் சேகரிக்க இயலாது. எனினும் எண்ணிக்கை மூலம் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் பிழையின்மைத் தரத்தில் உயர்ந்திருக்குமெனக் கொள்ளலாம். ஆனால் அளவுகளின் மூலம் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களில் முழுமையான பிழையின்மைத் தரத்தை எதிர்பார்க்க முடியாது. அளவின் விவரங்களை அளவிடும்போது பிழைகள் (errors) ஏற்படுவது இயற்கையே. ஏனெனில், ஒரு அளவு கோலைக் கொண்டு ஒரு பொருளின் பரிமாணத்தை மிகச் சரியாக அளவிட முடியாவிடினும் உண்மையான அளவிற்குச் சற்று மாறுபட்ட அளவு கிடைக்கலாம். இந்தத் தோராயமான அளவிற்கும், உண்மையான அளவிற்குமுள்ள வித்தியாசத்தைத் தான் நாம் புள்ளியியலில் ‘பிழை’ (error) என்று கூறுகிறோம். இதுபோல், ஒரு பையனுடைய உயரத்தை உத்தேசமாக மதிப்பிடும்போது, அவனது உண்மையான உயரத்தினின்றும் சிறிது கூடுதலாகவோ, அல்லது குறைவாகவோ மதிப்பிடலாம். இந்த மதிப்பீட்டு அளவிற்கும், உண்மை அளவிற்குமுள்ள வித்தியாசமும் புள்ளியியலில் பிழை என்று கூறப்படுகிறது. ஒரு நாணயத்தை 1000 தடவைகள் சுண்டிவிடுவதாகக் கொள்வோம். அவற்றுள் 504 தடவைகளில் தலை விழுந்ததாகக் கொள்வோம். ஆனால் நிகழ் தகவு விதியின்படி (Probability law) 500 தடவைகளில் தலைவிழுமென எதிர்பார்க்கலாம். எவ்விதப் பிழையுமின்றி மிகுந்த கவனமுடன் நாணயத்தைச் சுண்டிவிட்டபோதிலும் கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண்ணுக்கும், நிகழ்தகவு விதியின்படி எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற நிகழ்வெண்ணுக்குமிடையே வித்தியாசமிருப்பதைக் காணலாம், புள்ளியியலில் எதிர் வருகின்ற இத்தகைய வித்தியாசங்களும் பிழைகள் என்றே அழைக்கப்படுகின்றன. மற்றும், 15.2 அடி நீளமுள்ள ஒரு இரும்புக் கம்பியின் நீளத்தைத் தோராயமாக 15 அடி

என்று கொள்வதால் ஏற்படுகின்ற வித்தியாசமாகிய —0.2 அடியும் புள்ளியியலில் பிழை என்றே வழங்கப்படுகிறது.

தவருன கணக்கீட்டின் காரணமாகவோ, அல்லது தவருன கணக்கீட்டுச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தியதின் காரணமாகவோ, அல்லது மறதியினுல் ஏற்படுகின்ற தவருன கணக்கீட்டின் காரணமாகவோ தவருன மதிப்புக்களைப் பெற முடியும். இவ்வாறு தவருகப் பெறப்படுகின்ற மதிப்புக்கும், சரியான மதிப்புக்கு முள்ள வித்தியாசமும் பிழை என்றே அழைக்கப்பட்டு வருகிறது. இத்தகைய பிழைகள் யாவும் புள்ளியியற் பிழைகளினின்றும் முற்றிலும் மாறுபட்டவையாகும். இந்த பிழைகள் யாவும் தவருகப் பெறப்படுகின்றன. உதாரணமாக, 22 அடி நீளம், 12 அடி அகலமுள்ள ஒரு அறையின் பரப்பளவை ஒரு அடிக்கோலால் (Foot-scale) அளந்து கணக்கிடுவதாகக் கொள்வோம். அறையின் உண்மையான பரப்பு 264 சதுர அடிகளாகும். அறையின் நீளத்தை அளவிடும்போது மறதியாக ஒரு எண்ணிக்கையை விட்டுவிட்டு நீளம் 21 அடி என்று அளந்து அறையின் பரப்பு $21 \times 12 = 252$ சதுர அடிகள் என்று கணக்கிடுவதால் கிடைப்பது தவருன பரப்பளவாகும். இந்தத் தவருன பரப்பளவிற்கும், சரியான பரப்பளவிற்கு முள்ள வித்தியாசமாகிய $252 - 254 = -12$ சதுர அடிகள் புள்ளியியற் பிழையாகாது. இதைத் தவறு (Mistake) என்று கூற வேண்டும். இதுபோல், அறையின் நீள, அகலங்களை முறையே 22 அடி, 12 அடி என்று சரியாக அளந்த பின், பரப்பளவைக் கணக்கிடும்போது $22 \times 12 = 254$ சதுர அடிகள் என்று தவருகக் கணக்கிட்டால், இத்தவருன பரப்பளவிற்கும், சரியான பரப்பளவிற்கு முள்ள வித்தியாசமும் தவறு (Mistake) தானேயல்லாது புள்ளியியற் பிழையாகாது. இதுபோல், 7 அடி ஆரையுள்ள (Radius) ஒரு வட்டமான இடத்தின் பரப்பளவு $2\pi r$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ சதுர அடிகள் என்று தவருகக் கணக்கிடப்படுவதால் ஏற்படுவதும் தவறுதானேயல்லாது புள்ளியியற் பிழையாகாது. ஆகவே, இத்தகைய தவறுகளுக்கும் புள்ளியியற் பிழைகளுக்கு முள்ள வேறுபாடுகளை நன்கு கருத்திற் கொள்ளல் வேண்டும். தவறுகளையும், புள்ளியியற் பிழைகளையும் ஒரு பொருளிற் கொண்டு குழப்பமடைதல் கூடாது.

கணக்குப் பதிவியலில் பிழைகள் (Errors in Accountancy)

கணக்குப் பதிவியலில் பிழை (Error) என்ற சொல் மாறுபட்ட பொருளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது இங்கு, பிழைகள்

இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. அவையாவன : (1) விதித் தவறுகள் (Errors of principle), (2) எழுத்தர் பிழை அல்லது தொழில் நுணுக்கப் பிழைகள். (Clerical or technical errors). கணக்குப் பதிவியலின் அடிப்படை விதிகளை அறியாமையாலும், அலட்சியப்படுத்துவதாலும் ஏற்படுகின்ற பிழைகள் முதல் வகையைச் சார்ந்த விதித் தவறுகளாகும். இரண்டாம் வகைத் தவறுகளை மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம் : (அ) நடவடிக்கைகள் (Transactions) முற்றிலும், பதிவு செய்யப் படாமல் விடப்படுவதாலேற்படுகின்ற விட்ட பிழைகள் (Errors of omission) ; (ஆ) நடவடிக்கைகள் பிழையாகவோ அல்லது தவறுதலாக இரு முறை கணக்குப் பதிவுப் புத்தகத்தில் பதிவு செய்யப்படுவதாலோ ஏற்படுகின்ற தவறுகள், கூட்டல் அல்லது வேறு கணக்கீடுகளி லேற்படுகின்ற தவறுகள் ஆகிய செய்பிழைகள் (Errors of commission); (இ) ஒன்றுக்கொன்று ஈடு செய்யக்கூடிய நேரெதிரான ஈடுகட்டும் பிழைகள் (Compensating errors). மேற் கூறப்பட்ட பல வகையான தவறுகள் யாவும் கணக்குப் பதிவியலைப் பற்றியோ அல்லது அதன் அடிப் படை விதிகளையோ நன்கு அறிந்து கொள்ளாத காரணத்தினுல் அல்லது கணக்குப் பதிவிலும், கணக்கீடுகளிலும் ஏற்படுகின்ற பிழைகளினுல் ஏற்படுகின்றன. இத் தவறுகள் தற்செயலாக ஏற்படுவதாகவு மிருக்கலாம் ; அல்லது பொய்க்கணக்கு எழுதுவதற்காக வேண்டுமென்றே செயப்படுகின்றவையாகவு மிருக்கலாம். ஆகவே, தவறு என்ற சொல் கணக்குப் பதிவியலில் பிழை யென்ற பொருளில் பயன்படுத்தப்படுகிற தென்பதை அறியலாம். எனவே, புள்ளியியலில் பயன்படுத்தப் படுகின்ற 'தவறு' என்ற சொல்லுக்கும், கணக்குப் பதிவியலில் பயன் படுத்தப்படுகின்ற 'தவறு' என்ற சொல்லுக்குமிடையே பொருளில் மிகுந்த வித்தியாசம் இருப்பதைக் கருத்திற் கொள்க.

பிழைகளின் வகைகள்

(அ) *தனிப்பிழையும் சார்பிழையும்* : (Absolute error and Relative error)

ஒரு உறுப்பின் உண்மையான மதிப்பிலிருந்து தோராய மதிப்பின் விலக்கம் (Deviation) தனிப்பிழை (Absolute error) எனப்படும். அதாவது,

தனிப்பிழை தோராய மதிப்பு—உண்மை மதிப்பு, உதாரணமாக, 20அடி நீளமுள்ள ஒரு இரும்புக் கம்பியின் நீளத்தை ஒரு

குறையுள்ள அளவுகோலால் (defective scale) 19′ 6″ என்று அளவிடுவதால் ஏற்படுகின்ற தனிப்பிழை $19' 6'' - 20' = -\frac{1}{2}'$ ஆகும். இதுபோல் 14.75 என்ற ஒரு அளவை 15.0 என்ற முழு எண்ணாகத் தோராயமாக்குவதால் ஏற்படுகின்ற தனிப் பிழை $15.0 - 14.75 = 0.25$ ஆகும். இவ்வாறு தனிப்பிழை யானது நேரெண்ணாகவோ, அல்லது எதிரெண்ணாகவோ இருக்கலாம். தனிப்பிழைக்கும், தோராய மதிப்புக்கு முள்ள விகிதம் சார்பிழை (Relative error) எனப்படும். ஆகவே,

$$\text{சார்பிழை} = \frac{\text{தனிப்பிழை}}{\text{தோராயமதிப்பு}}$$

$$= \frac{\text{தோராய மதிப்பு} - \text{உண்மை மதிப்பு}}{\text{தோராய மதிப்பு}}$$

மேற்கூறப்பட்ட உதாரணங்களில் சார்பிழைகள் முறையே $\frac{-\frac{1}{2}}{19\frac{1}{2}} = \frac{-1}{39}$, $\frac{.25}{15} = \frac{1}{60}$ ஆகும். இச்சார்பிழைகளை 100 ஆல் பெருக்கிச் சதவீதப்பிழைகளாகவும் (Percentage error) குறிப்பிடலாம். ஆகவே, மேற்கூறப்பட்ட உதாரணங்களில் சதவீதப்பிழைகள் முறையே $-\frac{1}{39} \times 100 = -2.56\%$, $\frac{1}{60} \times 100 = 1.67\%$ ஆகும்.

(அ) *ஒரு சார்பான பிழையும் சார்பற்ற பிழையும்* (Biased error and unbiased error) :

கணிப்பாளரின் ஒருதலைப்பட்ட செய்கையால் அல்லது ஒரு குறைபட்ட அளவுக் கருவியினால் ஏற்படுகின்ற பிழை ஒரு சார்பான பிழை (Biased error) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இத்தகைய ஒரு சார்பான பிழைகள் யாவும் கணக்கெடுப்பு முழுவதும் நேரெண்ணாகவோ அல்லது எதிரெண்ணாகவோ தான் இருக்கும். உதாரணமாக, ஒரு சுவரின் நீளத்தை 1″ குறைவாக உள்ள ஒரு அளவுகோலினால் அளந்தால் ஒரு அடிக்கு −1″ வீதம் பிழை கூடிக்கொண்டேயிருக்கும். அக்குறை பட்ட அளவுகோலினால் சுவரின் நீளம் 30 அடி என்று அளக்கப் பட்டால் மொத்தப்பிழை −30 அங்குலம் அல்லது $-2\frac{1}{2}$ அடி யாகும். ஆகவே, சுவரின் உண்மை நீளத்தைக் கணக்கிட தோராய நீளமாகிய 30 அடியிலிருந்து $2\frac{1}{2}$ அடியைக் கழிக்க

வேண்டும்; அதாவது சுவரின் உண்மை நீளம் $30' - 2\frac{1}{2}' = 27\frac{1}{2}'$ ஆகும். ஆகவே, ஒரு சார்பான பிழைகள் திரளாகக் குவியும் தன்மை வாய்ந்தவையாகும்.

ஓர் சார்பான பிழையல்லாத ஏனைய பிழைகள் யாவும் சார்பற்ற பிழைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. சார்பற்ற பிழைகள் நேரெண் பிழைகளாகவோ அல்லது எதிரெண்பிழைகளாகவோ யிருக்கலாம். ஆனால் நேரெண் பிழைகளும், எதிரெண்பிழைகளும் சரிபாதி வாய்ப்புகளுடன் நிகழுந்தன்மையுடையன. சார்பற்ற பிழைகள் கணக்கீடுகளில் செய்யப்படுகின்ற தோராயங்களின் காரணமாகவும், செய்முறைப் பரிசோதனைகளை நடத்துவதி லேற்படுகின்ற கவனமின்மையாலும் ஏற்படுகின்றன. சார்பற்ற பிழைகள் ஈடு செய்யும் தன்மை வாய்ந்தவை. ஏனெனில், ஒரு உறுப்பின் மதிப்பைக் கூட்டி மதிப்பிடுவதற்கும், குறைத்து மதிப்பிடுவதற்கும் வாய்ப்புகள் உள்ளன. உதாரணமாக, 0.6 என்ற ஒரு மதிப்பை 1.0 என்று தோராயமாக்கினால் 0.4 என்ற ஒரு மதிப்பை 0.0 என்ற தோராயமாக்க வேண்டியதிருக்கும். ஆக இரண்டு தோராயங்களும் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்துவிடுகின்றன. ஆகவே மொத்தைப்பிழை மிகவும் சிறியதாகவே இருக்கும். எனவே சார்பற்ற பிழையுடன் ஓர் செய்முறைப் பரிசோதனை எவ்வளவுக்கெவ்வளவு அதிகமான தடவைகள் செய்யப்படுகிறதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு பிழை மிகவும் குறைவானதாக யிருக்கும். ஆகவே, 'ஒரு சார்பான பிழைகள் திரளக் கூடியவை; சார்பற்ற பிழைகள் ஈடு செய்யக்கூடியவை' என்பது விளங்கும். ஆனால் இக்கூற்றுக்கு விதிவிலக்குகளும் உள்ளன.

15.9, 9.2 என்ற இரு மதிப்புக்களைக் கருதுக. இவற்றைத் தோராயமாக்கினால் 16, 9 என்ற தோராய மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. இவ்விரு தோராய மதிப்புகளுக்குரிய பிழைகள் முறையே $16-15.9=0.1$, $9-9.2=-0.2$ ஆகும், இவ்விரு பிழைகளும் நேர் எதிர் அடையாளங்களைக் கொண்ட சார்பற்ற பிழைகளாகும். இவ்விரு பிழைகளும் கூட்டப்படும் போது தான் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்கின்றன. ஏனெனில், இரு உண்மை மதிப்புக்களின் மொத்தம் $15.9+9.2=25.1$ ஆகும். தோராய மதிப்புக்களின் மொத்தம் $16+9=25$ ஆகும். ஆகவே, மொத்தப் பிழை $25-25.1=0.1$ ஆகும். ஆனால் கழிக்கும்போது, உண்மை மதிப்பு $15.9-9.2=6.7$ என்றும், தோராய மதிப்பு $16-9=7$ என்றும் மாறுகின்றன. ஆகவே,

மொத்தப்பிழை 7—6.7=0.3 ஆகும். அதாவது எதிரடையாளங்களுடைய சார்பற்ற பிழைகளைக் கழிக்கும் போது, தனித் தனிப் பிழைகள் திரளாகக் கூட்டப்படுகின்றன. இதுபோல், ஒரு சார்பான பிழைகள் கழிக்கப்படும் போது ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்வதைக் காணலாம். இதேபோல், எதிரடையாளங் களைக் கொண்ட சார்பற்ற பிழைகள் பெருக்கப்படும் போது குறைவதையும், வகுக்கப்படும்போது கூடுவதையும் காணலாம்.

(இ) *தோராயங்கள்* (Approximations) :

எண்ணுலான விவரங்களை எண்ணிக்கைகள், அளவுகள் என இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். இவற்றுள் எண்ணிக்கைகளை மிகச்சரியாக கணக்கிட முடியும். ஆனுல் பெரும்பாலான அளவுகளைத் தோராயமாகவே கணக்கிட முடியும். மிகப்பெரிய எண்ணிக்கைகளையும் சில சந்தர்ப்பங்களில் தேவையான இட மதிப்புகளுக்குத் தோராயமாக்க வேண்டியதிருக்கலாம். உண்மை மதிப்புக்களைத் தோராயமாக்கும் போது தோராயப் பிழை மிகச்சிறியதாக யிருக்குமாறு மிகவும் கவனமாகச் செய்ய வேண்டும்.

தோராய முறைகள் (Methods of approximation):

(1) நெருங்கிய முழு எண்ணுக்கு அல்லது குறிப்பிட்ட தசம இடங்களுக்குத் தோராயமாக்க இரட்டையெண் விதி :—

ஒரு எண்ணில் தோராயப்படுத்த வேண்டிய பகுதி பாதிக் கும் குறைவாகயிருந்தால் அப்பகுதியை விட்டுவிட்டு, அப்பகுதிக்கு முந்திய இடம் வரை அந்த எண்ணைத் திருத்தமாக எழுதவேண்டும். தோராயப்படுத்த வேண்டிய பகுதி பாதிக் கும் அதிகமாக இருந்தால் அப்பகுதிக்கு முந்திய இடத்திலுள்ள எண்ணுடன் 1 கூட்டி அந்த இடம்வரை அந்த எண்ணைத் திருத்தமாக எழுதவேண்டும். தோராயப்படுத்த வேண்டிய பகுதி சரிபாதியாக இருந்து அப்பகுதிக்கு முந்திய இடத்தில் ஒற்றையெண்ணிருந்தால் அதை இரட்டையெண்ணுக மாற்றி யும், இரட்டையெண்ணுகயிருந்தால் அதை மாற்றுமலும் அந்த இடம் வரை அந்த எண்ணைத் திருத்தமாக எழுத வேண்டும்.

எண்	தோராய மதிப்பு
32,725	33 ஆயிரங்கள் (ஆயிரம் திருத்தமாக)

எண்	தோராய மதிப்பு
18,85,79,432	18 கோடிகள் (கோடிக்குத் திருத்தமாக)
68,768	68.8 (முதல் தசம இடம் திருத்தமாக)
174.35	174.4 (முதல் தசம இடம் திருத்தமாக)
64,500	64,000 (ஆயிரம் திருத்தமாக)

2. அடுத்த முழு எண்ணுக்குத் தோராயமாக்குதல் :

தோராயப்படுத்த வேண்டிய பகுதி சரிபாதியாக, அல்லது பாதிக்கும் அதிகமாக, அல்லது பாதிக்கும் குறைவாக எப்படியிருந்தாலும் அப்பகுதிக்கு முந்திய இடத்திலுள்ள எண்ணுடன் 1-ஐ கூட்டித் திருத்தமாகக் கூறுவது மற்றொரு தோராய முறையாகும்.

எண்	தோராய மதிப்பு
7,825	8,000 (ஆயிரம் திருத்தமாக)
3,25,657	4,00,000 (இலட்சம் திருத்தமாக)
12.84	13.00 (முழு எண் திருத்தமாக)
1.5725	1.573 (மூன்று தசம இடங்கள் திருத்தமாக)
4,500	5,000 (ஆயிரம் திருத்தமாக)

3. தோராயப்படுத்தும் பகுதியை விட்டுவிடுதல் :

எண்	தோராய மதிப்பு
9,728	9,000 (ஆயிரம் திருத்தமாக)
7,42,789	7,00,000 (இலட்சம் திருத்தமாக)
87.94	87.00 (முழு எண் திருத்தமாக)
8.765	8.76 (இரண்டு தசம இடங்கள் திருத்தமாக)
2,500	2,000 (ஆயிரம் திருத்தமாக)

(ஈ) ***சாத்தியப் பிழையும் நிகழத்தக்க பிழையும்*** (Possible error and Probable error) :

தோராய மதிப்புக்களைக் குறிப்பிடும்போது, அந்த மதிப்பு எத்தனை இடங்களுக்குத் திருத்தமான மதிப்பு என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும். ஏனெனில் அத்தோராய மதிப்பின் சரியான இறுதி இட எண்ணிலிருந்துதான் அதனுடைய உண்மை மதிப்பின் எல்லைகளைத் தெரிந்துகொள்ள முடியும். உதாரணமாக, 10 ஆண்டுகளில் மதுரை நகரின் மக்கள்தொகை அதிகரிப்பு 7.4% என்று ஒரு தசம இடத்திற்குத் திருத்தமாக கூறப்பட்டால், அதன் உண்மையான மதிப்பு 7.35%க்கும் 7.45%க்குமிடையேயுள்ளது என்று தெரிந்து கொள்ளலாம். அதாவது, உண்மையான மதிப்பு $(7.4 \pm 0.05)\%$ என்று கொள்ளலாம். எனவே, தோராய மதிப்பாகிய 7.4-க்கும் உண்மை மதிப்புக்குமுள்ள வித்தியாசம் 0.05 அல்லது 0.05-க்குக் குறைவாகயிருக்கும் என்று தெரிகிறது. அதாவது, மக்கள்தொகை அதிகரிப்பை 7.4% என்று தோராயமாகக் கொள்வதனால் ஏற்படுகின்ற உண்மையான பிழையின் மேல் எல்லை (Uppe. limit) 0.05 ; கீழ் எல்லை 0.05 ஆகும். ஒரு தோராய மதிப்பின் உண்மையான பிழையின் எல்லைகள் சாத்தியப் பிழைகள் (Possible error) எனப்படும். மேற்கூறப்பட்ட உதாரணத்தில் சாத்தியப்பிழை $= 0.05$ ஆகும். இப்பொழுது முதல் தசம இடத்திற்குத் திருத்தமாகக் கூறப்பட்டுள்ள 12.8, 7.5, 3.1, 13.6 என்ற நான்கு எண்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் (arithmetic average) கணக்கிடுவதாகக் கொள்வோம். இந்த நான்கு தோராய மதிப்புக்களின் கூட்டுச்சராசரி

$$= \frac{12.8 + 7.5 + 3.1 + 13.6}{4}$$

$$= \frac{37.0}{4}$$

$$= 9.25$$

இத்தோராய சராசரியின் மேல் எல்லையானது, நான்கு தோராய மதிப்புக்களின் மேல் எல்லைகளின் சராசரியாகும். ஆகவே சராசரியின்

$$\text{மேல் எல்லை} = \frac{12.85 + 7.55 + 3.15 + 13.65}{4}$$

$$= \frac{37.20}{4}$$

$$= 9.30$$

சராசரியின் கீழ் எல்லை $= \dfrac{12.75+7.45+3.05+13.55}{4}$

$$= \frac{36.80}{4}$$

$$= 9.20$$

ஆகவே தோராய மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியை 9.25±0.05 என்று கூறலாம். அதாவது கூட்டுச் சராசரியின் சாத்தியப்பிழை = 0.05 ஆகும்.

ஆனால் தோராய மதிப்புக்களின் பிழைகள்யாவும் எப் பொழுதும் ஒரே அடையாளமுள்ளவையாக இருக்குமென்று கூறமுடியாது. 5.7ஐ 6.0 என்று தோராயமாக்கினால் தோராயப் பிழை = 6.0 — 5.7 = 0.3 ஆகும். ஆனால், 5.3ஐ 5.0 என்று தோராயமாக்குவதனால் ஏற்படும் பிழை 5.0 — 5.3 = 0.3 ஆகும். ஆகவே, தோராயப் பிழைகள் நேர் அல்லது எதிர் அடை யாளங்களுடன் இருக்கலாம். ஆகவே, பல தோராய மதிப்புக் களைக் கொண்டு கணக்கிடும்போது சில பிழைகள் ஈடு செய்யப் படலாம். இவ்வாறு ஈடுசெய்யக் கூடிய பிழைகளைக் கொண்ட கணக்கீடுகளில் ஏற்படக்கூடிய பிழையின் எல்லை நிகழத்தக்க பிழை (Probable Error) என்று அழைக்கப்படுகிறது. நிகழத்தக்க பிழையின் மதிப்பானது சாத்தியப்பிழையை உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையின் வர்க்கமூலத்தினால் வகுத்துப் பெறப்படு கிறது. N என்பது மொத்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட்டால்,

$$\text{நிகழத்தக்கப்பிழை} = \frac{\text{சாத்தியப்பிழை}}{\sqrt{N}} \text{ ஆகும்.}$$

மேலே பெறப்பட்ட சராசரியில்,

$$\therefore \text{ நிகழத்தக்க பிழை} = \frac{\pm 0.05}{\sqrt{4}} = \frac{\pm 0.05}{2} = \pm 00.25 \text{ ஆகும்.}$$

பிழைகளுக்கான மூலகாரணங்கள் :

ஓர் ஆய்விற்காக விவரங்கள் சேகரிக்கப்படும்போதோ அல்லது சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆய்வு செய்யப்படும்

போதோ, கீழ்க்காணும் பலவகையான காரணங்களினுல் பிழைகள் ஏற்படலாம்.

1. ஒரு சார்பான தன்மை :

ஆய்வாளரோ அல்லது கணிப்பாளரோ ஒரு சார்பாக செய்முறைப் பரிசோதனையை நடத்துவதாலும் அல்லது குறை பட்ட அளவுக் கருவியால் அளவுகளை அளவிடுவதாலும் ஒரு சார்பான பிழைகள் ஆய்வாளருக்குத் தெரிந்தும் ஏற்படலாம் ; தெரியாமலும் ஏற்படலாம். ஆய்வாளருக்குத் தெரிந்து ஒரு சார்பான பிழைகள் ஏற்பட்டிருந்தால் அப்பிழைகளுக்குத் தக்க வாறு ஆய்வின் இறுதி முடிவுகளை ஓரளவுக்குச் சரிப்படுத்திக் கொள்ளலாம். ஆனல், ஆய்வாளருக்குத் தெரியாமலேயே விவரங்களிலோ அல்லது கணக்கீடு முறைகளிலோ ஏற்படு கின்ற ஒரு சார்பான பிழைகள் மிகவும் ஆபத்தானவை. ஏனெ னில், ஆய்வாளர் தானறியாமலே முற்றிலும் தவருன முடிவு களுக்கு வர நேரிடலாம்.

2. முக்கியமான விவரத்தை விட்டுவிடுதல் :

ஓர் பரிசோதனையை நடத்தும்போதோ, விவரங்களைச் சேகரிக்கும்போதோ மிகவும் முக்கியமான குறிப்புக்களைக் கவனிக்காமல் அல்லது அலட்சியமாக விட்டுவிட்டால் ஆய் வின் முடிவுகள் பெரிதும் பாதிக்கப்படலாம். கார்களின் மேலே கூரையில் போடப்படுகின்ற கூரைத்தகடுகள் எந்த உலோகத் தால் செய்யப்பட்டிருந்தாலும் ஒரே அளவில்தான் சூடு காருக் குள்ளிறங்குமா என்று சோதித்துப் பார்ப்பதற்கான பரிசோதனை யில் பளபளப்பான பல உலோகத்தகடுகள் சோதித்துப் பார்க்கப்பட்டால் முடிவு தவருனதாகவே யிருக்கும். ஏனெனில் பொதுவாகக் கார்களுக்குப் போடப்படுகின்ற கூரைத்தகடு களில் கருப்பு வர்ணமோ, அல்லது இருண்ட வர்ணமோ பூசப் பட்டிருக்கும் ; கருப்பு அல்லது இருண்ட வர்ணங்களில் அதிக அளவு சூட்டை உள்ளிழுத்துக் கொள்ளும் தன்மை வாய்ந்தவை என்ற உண்மையை கருத்திற்கொள்ளாது விட்டுவிடுவதால் தவருன முடிவை அடையநேரிடுகிறது.

3. ஒப்பிடக்கூடாத விவரங்களை ஒப்பிடுதல் :

ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட தன்மைகளைக் கொண்ட, சீரற்ற இருவகை விவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பெறுகின்ற முடிவுகள் பெரும்பாலும் சரியானவையாகயிரா. இருகல்லூரி மாணவர் களுக்கிடையே புள்ளியியல் பாடத்தில் நடத்தப்பட்ட ஓர்

போட்டித் தேர்வில் முதல் கல்லூரி மாணவர்கள் புள்ளியியலை முக்கிய பாடமாகக் கொண்ட பட்டமேற்படிப்பு மாணவர்களாயும் இரண்டாவது கல்லூரி மாணவர்கள் பட்டபடிப்பு மாணவர்களாயுமிருந்தால் இரு கல்லூரி மாணவர்களும் போட்டித் தேர்வில் பெறுகின்ற மதிப்பெண்களை ஒப்பிட்டு அவர்களின் தரங்களை ஒப்பிடுவது பொருளற்றதாகிவிடும்.

4. முழுத்தொகுதியின் தன்மைகளைப் பிரதிபலிக்காத விவரங்கள் :

ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் தரத்தை மதிப்பிட, வகுப்பின் முன்வரிசை மாணவர்களை மட்டும் சோதித்து அவர்களின் தரத்தைக்கொண்டு வகுப்பிலுள்ள மொத்த மாணவர்களின் தரத்தை நிர்ணயித்தால் முடிவு பெரும்பாலும் தவருனதாகவேயிருக்கும். ஏனெனில், முன் வரிசை மாணவர்களடங்கிய கூறு (Sample), வகுப்பின் மொத்த மாணவர்களின் தரத்தைப் பிரதிபலிக்கக் கூடிய கூருகாது. மற்ருெரு உதாரணமாகக் கீழ்க்காணும் நிகழ்ச்சியினைக் கூறலாம்.

1951-ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்காவில் ஓர் மாநிலத்தில் கல்லூரி மாணவர்களுக்காக வெளியிடப்படுகின்ற ஒரு பத்திரிகையின் ஆசிரியர், அமெரிக்காவில் வாக்குரிமை வயதை 21-லிருந்து 18-க்குக் குறைக்கவேண்டுமா, வேண்டாமா என்பது பற்றி மாணவர்களின் கருத்தை அறிவதற்காகத் தம் பத்திரிகையின் மூலம் ஒரு வாக்கெடுப்பு நடத்தினர். மொத்தமுள்ள 20,000 மாணவர்களில் 1,400 மாணவர்கள் வாக்களித்தனர். வாக்களித்தவர்களில் 65 சதவீதத்தினர் வாக்குரிமை வயது குறைப்பை ஆதரித்து வாக்களித்திருந்தனர், உடனே தம் பத்திரிகையில் 65 சதவீத மாணவர்கள் வாக்குரிமை வயதைக் குறைக்க விரும்புவதாக விளம்பரப் படுத்திவிட்டனர். சிறிது சிந்தித்துப் பார்த்தால் இது எவ்வளவு தவருன விளம்பரம் என்பது தெரியவரும். மொத்தமுள்ள 20,000 மாணவர்களில் 1,400 மாணவர்களே வாக்கெடுப்பில் கலந்துகொண்டனர். அதாவது, மொத்த மாணவர்களில் 7 சதவீத மாணவர்களே வாக்குரிமை வயதுக்குறைப்பை ஆதரித்துள்ளனர். வாக்களித்த 1,400 மாணவர்கள் அடங்கிய இந்தக்கூறு பிரதிநிதித்துவக்கூறு முறைப்படியோ (representative sampling method) அல்லது சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல் முறைப்படியோ (random sampling method) தெளிவு செய்யப்படாததால் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணங்களைப் பிரதிபலிக்க முடியாது. பொதுவாக, பத்திரிகைமூலம் நடத்தப்படுகின்ற

வாக்கெடுப்பு நடத்துகின்ற பத்திரிகையைப் படிப்பவர்களாக வும், பத்திரிகையின் கருத்துக்களை ஆதரிப்பவர்களாகவுமே இருப்பார்கள். மற்றவர்கள் இத்தகைய வாக்கெடுப்புக்களில் கலந்துகொள்ள விரும்பமாட்டார்கள்.

5. *தற்செயல் தொடர்பைக் காரணத் தொடர்பாகக் கருது தல்* (Consideration of Casual relationship as causal relationship) :

இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற தற்செயல் தொடர்பு (casual relationship) அல்லது ஒற்றுமையைக் காரணத் தொடர்பாகக் கருதி, அதன்மூலம் முடிவுகளெடுப்பது பெருந் தவருக முடியும். உதாரணமாக, குறைந்தவிலை வானெலிப் பெட்டிகளின் உற்பத்தி காரணமாக வானெலிப் பெட்டிகள் வைத்திருப்போரின் எண்ணிக்கைக் கடந்த 5 ஆண்டு காலத் தில் அதற்கு முந்திய 5 ஆண்டுகளிலிருந்ததைவிட இரு மடங்காக அதிகரித்துள்ளது. இதே 5 ஆண்டுகாலத்தில் காது கேளாதோரின் எண்ணிக்கையும் அதற்கு முன்னிருந்ததைவிட 80 சதவீதம் அதிகரித்துள்ளது. இவ்விரு விவரங்களிலிருந்து, வானெலி கேட்கும் பழக்கமும், செவிட்டுத்தன்மையும் காரண விளைவுத் தொடர்பு (Cause and effect relationship) கொண்ட வையாகக் கருதி வானெலி, கேட்பதால் காது செவிடாகிவிடும்; ஆகையால் வானெலி கேட்பது நல்லதல்ல, என்பது தவருகும். ஏனெனில், காது செவிடானவர்களில் எவ்வளவுபேர்கள் தாங்கள் செவிடாவதற்குமுன் வானெலி கேட்கும் பழக்க முடையவர்களாயிருந்தனர் ? அவர்களின் செவிட்டுத்தன்மை வானெலிக் கேட்டுக்கொண்டிருந்ததால் ஏற்பட்டதுதானு ? என்ற விவரங்களைத் தெரிந்துகொள்ளாமல், வானெலி கேட் பதையும், செவிடாவதையும், காரணவிளைவுத் தொடர்பாகக் கருதி, முடிவு செய்வது பெருந்தவருகும்.

6. *மறைக்கப்பட்ட விவரங்கள் :*

தேவையற்றவை என்று அலட்சியமாக விடப்பட்ட அல்லது மறைக்கப்பட்ட விவரங்கள் முடிவுகளைப் பெரிதும் பாதிக்கப் படும். உதாரணமாக, திரைப்படம் பார்க்கும் சிறுவர்கள் பகல் காட்சியை விரும்புகிருர்களா அல்லது இரவுக் காட்சியை விரும்பு கிருர்களா என்ற ஆய்வில், பகலில் காட்டப்படுகின்ற சிறப்புத் திரைப்படக் காட்சிகளுக்குச் சிறுவர்கள் திரள்திரளாகச் சென்று பார்க்கின்றனர் என்ற விவரத்தின் அடிப்படையில் இரவுக்காட்சிகளைவிடப் பகல்காட்சிகளையே சிறுவர்கள் பெரிதும் விரும்பிப்பார்க்கின்றனர் என்ற முடிவுசெய்யப்பட்டது.

ஆனால், மேலும் விவரங்கள் சேகரித்து ஆராய்ந்து பார்த்ததில் சிறுவர்கள் பகற்காட்சியை விரும்புவதன் காரணம் தாங்கள் பெற்றோர்க்குத் தெரியாமல் பார்க்கும் வசதியும் பகல் சிறப்புக் காட்சிகளுக்கான குறைந்த கட்டணங்களுமே எனத் தெரிய வந்தது.

7. அலகுகளை வரையறுக்கத் தவறிவிடல் :

புள்ளியியல் அளவுகளைக் குறிப்பிடும்போது அவற்றின் அலகுகளும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். ஒரே அலகுடன் குறிப்பிடப்பட்ட இரண்டு அளவுகளைத்தான் ஒப்பிடமுடியும் 'உங்கள் சொந்தக் காரில் பயணம் செய்வதைப்போன்று இருமடங்குப் பத்திரமாக எங்கள் விமானத்தில் பயணம் செய்யலாம்' இதுபோன்ற விளம்பரங்களைப் பத்திரிகைகளில் பார்த்திருக்கிறோம். விமானப்பயணம் ஆபத்து நிறைந்தது என்பது எல்லோருக்கும் தெரியும். ஆனால் காரில் செல்லும் நேரத்தில் விமானத்தில் செல்லமுடியும், ஆகவே ஆபத்தும் பாதிக்குக் குறைவாகிறது என்ற விளக்கமும் தரப்படும். இத்தகைய ஒப்புமை மிகத்தவறான முடிவையே தரும். ஏனெனில், விமானப் பயணத்தின் ஆபத்தைக் கார்ப் பயணத்தின் ஆபத்தையும் அளவிடக்கூடிய அலகு ஒன்றை நிர்ணயித்தாலன்றி இரு ஆபத்துக்களையும் ஒப்பிடமுடியாது. விமான, கார்ப் பயண விபத்துக்களைப் பற்றிய ஒரு ஆய்விலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்களிலிருந்து விமானப்பயண ஆபத்து 10 கோடி மைல் பயணத்திற்கு 1.10 விபத்து என்ற வீதத்திலும், 10 இலட்ச மணி நேரப்பயணத்திற்கு 2.41 விபத்துக்கள் என்ற வீதத்திலும் சொந்தக்கார்ப் பயண ஆபத்து 10 கோடி மைல் பயணத்திற்கு 0.17 விபத்து என்ற வீதத்திலும், 10 இலட்ச மணி நேரப்பயணத்திற்கு 0.07 விபத்து என்ற வீதத்திலும் இருப்பதாகக் கணிக்கிடப்பட்டன. இப்புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது விமானப்பயணம்தான் கார்ப் பயணத்தைவிட ஆபத்து நிறைந்தது என்று தெரிகிறது.

8. தவறான கூட்டல்கள் :

புள்ளிவிவர ஆய்வின் முடிவுகள் தவறாகயிருப்பதற்குத் தவறான கூட்டல்களும் காரணமாகலாம். திரைப்பட விநியோகஸ்தர்கள் தங்கள் படங்கள் வெளியிடப்பட்டபின் 'ஒரே வாரத்தில் 4,79,061 மக்கள் கண்டுகளித்த அற்புதத் திரையோவியம்' என்றெல்லாம் விளம்பரப்படுத்துவதை நாமறிவோம். ஆனால் இந்தப் புள்ளிவிவரம் சரியானக்கணக்

கெடுப்பன்று. ஏனெனில் ஒரு வாரத்தில் குறிப்பிட்ட திரைப் படத்திற்காக விற்கப்பட்ட அனுமதிச்சீட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கைதான் மேற்கூறப்பட்ட 4,79,061 ஆகும். பலர் அந்தத் திரைப்படத்தைப் பல தடவைகள் பார்த்திருக்கலாமாகையால், 4,79,061 என்பது அந்தப்படத்தைப் பார்த்த மக்களின் சரியான எண்ணிக்கையாகாது.

9. *சரியாகத்திட்டமிடப்படாத பரிசோதனை :*

குழல் மின் விளக்குகள் முதன்முதல் பழக்கத்திற்கும் வந்ததும், முதல் மின்விளக்கு வெளிச்சத்தின் கீழ் வாழ்ந்து வருபவர்கள் நாளடைவில் மலடாகிவிடுவர் என்ற ஒரு தவறான நம்பிக்கை மக்களிடம் பரவத்தொடங்கியது. அந்த நம்பிக்கை தவறானது என்று நிரூபிக்க, அக்குழல் விளக்குகளைச் செய்த மின்சார நிறுவனத்தினர் ஒரு பரிசோதனையை நடத்தினர். 12 எலிகள் கொண்ட கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்து அவற்றைக் குழல் மின் விளக்கு வெளிச்சத்திலும், இதுபோன்று 12 எலிகள் கொண்ட மற்றொரு கூறு தெரிவு செய்து அவற்றைச் சாதாரண விளக்கு வெளிச்சத்திலும் வளர விட்டனர். சில மாதங்களுக்குப் பின் பார்த்தபோது, சாதாரண வெளிச்சத்தில் வளர்ந்த 12 எலிகள் இயல்பான எண்ணிக்கையில் குட்டிகள் போட்டிருந்தன. ஆனால், மின் குழல் விளக்கு வெளிச்சத்தில் வளர்ந்த 12 எலிகளும் ஒரு குட்டியும் போடாமல் அப்படியே இருந்தன. மக்களின் நம்பிக்கைச் சரியானதாயிருக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருந்தருவாயில் அந்த 12 எலிகளையும் சோதித்துப் பார்த்த போது அந்த பன்னிரண்டு எலிகளுமே ஆண் எலிகளாகயிருப்பதைக்கண்டனர். ஆகவே, தவறான முறையில் நடத்தப்படுகின்ற சோதனைகளிலிருந்து சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் தவறான முடிவுகளையே தருமாகையால் செய்முறைப் பரிசோதனைகள் எப்பொழுதும் நன்கு திட்டமிடப்பட்டு மிகுந்த கவனத்துடன் செய்யப்பட வேண்டும்.

2. *வினாத்தொகுதிகளும், வினாப்பட்டியல்களும் தயாரித்தல் :* (Preparing Questionnaires and Schedules)

புள்ளி விவர ஆய்வுக்காகச் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் அவைகளைக் குறித்துக் கொள்வதற்கென்றே மிகவும் கவனமாகத் தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியல்களில் குறிக்கப்படவேண்டும். இத்தகைய பட்டியல்கள் இரண்டு வகைப்படும்.

(i) வினாத் தொகுதி (Questionnaire)

(ii) வினாப்பட்டியல் (Schedule)

வினாத் தொகுதி என்பது ஆயவுக்குத் தேவையான விவரங்களை விவரம் தருவோரிடமிருந்து பெறும் பொருட்டு அவர்களுக்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட பலவகையான வினாக்களும் அவ்வினாக்களுக்கு நேரே அவற்றிற்குரிய விடைகளை எழுதுவதற்குத் தேவையான காலியிடங்களும் கொண்ட ஒரு பட்டியலாகும். இப்பட்டியல்களைப் பொதுவாக விவரந்தருவோர் தாமாகவே நிரப்புவர்.

வினாப்பட்டியல் என்பதும் வினாத்தொகுதியைப்போன்று பலவகையான வினாக்களையும், அவற்றிற்கான விடைகளை எழுதுவதற்குப் போதுமான காலியிடங்களையும் கொண்ட ஓர் பட்டியல்தான். ஆனால் இப்பட்டியல்கள் வினாத்தொகுதிகளைப் போன்று விவரந் தருவோரால் நிரப்பப்படுவதன்று. கணிப்பாளர்கள் விவரந்தருவோரை அணுகி, வினாப்பட்டியலிள்ள வினாக்களை விவரந்தருவோரிடம் வினவி, அவற்றிற்கான விடைகளை அவர்களிடமிருந்து அறிந்து, அவ்விடைகளை அவ்வினாப்பட்டியல்களில் குறித்துக்கொள்வர். ஆகவே, கணிப்பாளர்கள் நன்கு பயிற்சி பெற்றவர்களாயும் நல்ல அனுபவம் வாய்ந்தவர்களாயுமிருத்தல் அவசியம்.

ஒரு வினாப்பட்டியல் அல்லது வினாத்தொகுதியில் கேட்கப்படுகின்ற வினாக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பாகுபாடு செய்யலாம்.

வெளிப்படை வினாக்கள்.

(1) இத்தகைய வினாக்களுக்கு விவரந்தருவோர் தாம் விரும்பிய விடைகளைத் தங்களது சொந்த சொற்களிலேயே தரலாம் (உ-ம்.) 'இந்தியாவின் வெளிநாட்டுக் கொள்கை பற்றி உங்கள் கருத்து என்ன?' 'ஓய்வு நேரத்தில் உங்கள் பொழுது போக்கு என்ன ?'

(2) ஆம்-இல்லை, மெய்-பொய், தெரியும்-தெரியாது, ஆதரிக்கிறேன்-எதிர்க்கிறேன், இவ்வாறு இரண்டில் ஏதாவது ஒரே சொல்லில் விடையைத் தரக்கூடிய வினாக்கள். (உ.ம்.) திருமணமானவரா ? மதுவிலக்கு ரத்தை ஆதரிக்கிறீர்களா ?

(3) பல விடைகளுள் ஒன்றைத் தெரிவு செய்யக் கூடியதாக அமைகின்ற வினாக்கள். (உ-ம்.) திருமணம் பற்றிய வினா ஒன்றிற்கான பல்வேறு மாறுபட்ட விடைகள் :- 'மணமாகாதவர்', 'மணமாகி மனைவி/கணவர்-உடன் வசிப்பவர்', 'மனைவி/கணவனை இழந்தவர்', மனைவி/கணவனைத் திருமண ரத்துச்

செய்தவர்', 'மனைவி/கணவனைப் பிரிந்து வாழ்பவர்' இத்தகைய வினுக்களுக்குச் சாத்தியமான எல்லாவித விடைகளும் வினுத் தொகுதி/வினுப்பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(4) எண்ணுலான விடைகளைக் கொண்ட வினுக்கள். (உ-ம்.) வயது என்ன? எத்தனைக் குழந்தைகள்?

ஒரு சிறந்த வினுப்பட்டியல்/வினுத்தொகுதிக்குத் தேவையான சிறப்பியல்புகள்.

(1) வினுப்பட்டியல்/வினுத்தொகுதி ஏராளமான, நீண்ட வினுக்களுடன் இருத்தல் கூடாது. பெரிய வினுக்களையும் சிக்கலான வினுக்களையும் ஏராளமான வினுக்களையும் கொண்ட வினுத் தொகுதிகளுக்கு உரிய விடைகளை விவரந் தருவோரிடமிருந்து பெறுவது கடினம். ஆகவே, வினுப்பட்டியல் கூடுமானவரை எளியதாகவும், சுருக்கமானதாகவும் இருக்க வேண்டும். சிக்கலான வினுக்களையும், நீளமான கேள்விகளையும் கூடுமானவரைத் தவிர்க்கவேண்டும்.

(2) விடைகள் ஒரு சொல்லாகவோ அல்லது ஓர் எண்ணுகவோ திட்டவட்டமாக இருக்குமாறு வினுக்கள் அமைதல் வேண்டும். 'சுமாராக', 'உத்தேசமாக', ஏராளமாக', போன்ற திட்டவட்டமில்லாத விடைகள் புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு எவ்வகையிலும் பயன்படமாட்டா.

(3) ஆத்திரமூட்டக்கூடிய வினுக்களும், விவரந்தருவோரின் அந்தரங்க வாழ்க்கை பற்றிய வினுக்களும் வினுப்பட்டியலில் இடம் பெறக்கூடாது. உதாரணமாக, ஓர் பெண்ணிடம் 'கணவனுடன் வாழ்கிறீர்களா அல்லது கணவனைப் பிரிந்து வாழ்கிறீர்களா' என்றும் 'கணவனிடம் சண்டையிடுவதுண்டா' என்றும் கேட்பதால் அப்பெண் ஆத்திரமடைந்து ஏனைய வினுக்களுக்கும் விடையளிக்க மறுத்துவிடக் கூடும். இதுபோல் ஒரு வியாபாரியிடம் 'இரவில் வீடு திரும்பும் போது எவ்வளவு பணம் ரொக்கமாக உங்களுடன் எடுத்து வருவீர்கள்'; பொதுவாக, வீட்டில் எவ்வளவு பணம் ரொக்கமாக வைத்திருப்பீர்கள்' போன்ற வினுக்களைக் கேட்டால் அவர் எந்தக் கேள்விக்குமே விடையிறுக்க மறுத்து விடுவார். இத்தகைய வினுக்களுக்குரிய விடைகள் குறிப்பிட்ட ஓர் ஆய்வுக்குத் தேவையெனில் இக்கேள்விகள் வினுப்பட்டியலின் இறுதியில் கேட்கப்படவேண்டும்.

(4) வினுக்களுக்குரிய விடைகளைத் தாமாகவே அளிக்கக் கூடிய வகையில் வினுக்கள் தொடர்ச்சியான பொருளுடன் அமைதல் வேண்டும். உதாரணமாக, ஓர் பெண்ணிடம், வயது என்ன? திருமணமானவரா? கணவர் பெயரென்ன? மணமாகி எத்தனை ஆண்டுகளாகின்றன? எத்தனை குழந்தைகள்? இதுபோன்று வரிசையாக வினவினுல் இக்கேள்விகளுக்குரிய விடைகளை அப்பெண்ணிஞல் எவ்விதத் தயக்கமு மின்றிக் கூற முடியும். ஓர் பெண்ணிடம் 'குழந்தைகள் எத்தனை' என்று கேட்பதற்கு முன்னுல் 'மணமாகிவிட்டதா' என்று கேட்பது நல்லது.

(5) சிக்கலான கேள்விகளுக்குரிய விளக்கங்கள் குறிப்புக்களாக வினுப்பட்டியலின் அடியில் கொடுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(6) விவரந்தருவோர் அளிக்கின்ற விவரங்கள் எக்காரணத்தை முன்னிட்டும் அவர்களுக்குத் தீங்கு ஏற்படும் வகையில் பயன்படுத்தப்படமாட்டா என்ற விளக்கமும் உறுதியும் வினுத்தொகுதியில் இடம் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

மாதிரி வினுப்பட்டியல் :

சென்னை நகரில் தெருக்களில் பிச்சை எடுப்பதை ஒழிப்பதற்காக ஓர் ஆய்வுக்கான திட்டங்கள் வகுக்குமாறு நீங்கள் கேட்டுக்கொள்ளப்படுகிறீர்கள். நீங்கள் மேற்கொள்ளும் நடவடிக்கைகளைச் சுருக்கமாக விளக்கி, தேவையான விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கான ஓர் வினுப்பட்டியலையும் தயார் செய்க.

(சென்னை பி. காம். 1967 ஏப்)

1. பிச்சைக்காரரின் பெயரும் அடையாளக் குறியும் ....
2. அ) பால் ... ... ஆண்/பெண்
   ஆ) வயது ... ...
   இ) வகுப்பு, மதம் ... ...
   ஈ) தங்குமிடம் ... ...
3. மணமானவரா? ... ...
4. சார்ந்தவர்கள் இருக்கிருர்களா? ...
5. பிச்சையெடுக்கக் காரணங்கள் ...

அ) அனாதை

ஆ) வயோதிகம்

இ) போதிய வருமானமின்மையும், கடன் தொல்லையும்.

ஈ) வேலையில்லாமை

உ) குடும்பத் தொல்லைகள்

ஊ) வேலை செய்ய விருப்பமின்மை

6. பிச்சையெடுக்கும் முறை ... ...

அ) சாதாரணமாக முறையிடுவது

ஆ) ஊனங்களைக் காட்டுதல்

இ) தெருக்களில் ஆடிப்பாடுதல்

ஈ) ஊனமுற்றவர்களை உடன் அழைத்துச் செல்லல்

உ) சிறு குழந்தையை எடுத்துச் செல்லல்

ஊ) மதசம்பந்தமான வேண்டுதல்

எ) பக்தரைப்போல் ஏமாற்றுதல்

ஏ) ஊனமுற்றிருப்பதாக ஏமாற்றுதல்

7. படிப்பு ... ...

அ) படிக்காதவர்

ஆ) எழுதப்படிக்கத் தெரியும்

இ) தொடக்கப்பள்ளிரை படித்தவர்

ஈ) உயர்நிலைப்பள்ளிவரை படித்தவர்

உ) உயர்கல்வியை முடித்தவர்

8. நாள்முழுவதும் பிச்சையெடுப்பதுண்டா :

9. இல்லையெனில், மற்ற நேரங்களில் பொழுது போக்கு :

10. பிச்சையெடுப்பதன் மூலப்பணமாகக் கிடைப்பது எவ்வளவு :

11. பணத்தை எவ்வாறு செலவிடுகிறீர்கள் :

12. வேலை செய்ய விருப்பமுண்டா :

3. *கூறுகளைத் தெரிவு செய்தல் :*

ஆய்வுத்தளம் மிகப் பரந்ததாயிருந்தால் முழு அளவிலான கணக்கெடுப்பிற்கு ஏராளமான பணமும், நீண்ட கால இடைவெளியும் தேவைப்படலாம். போதிய பணவசதியில்லாவிடினும், குறுகிய கால இடைவெளியில் ஆய்வை முடிக்க வேண்டிய நிர்பந்தம் இருந்தாலும் முழு அளவில் கணக்கெடுப்புச் செய்ய முடியாது. இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் முழுத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்புக் கூறு (random) ஒன்றைத் தெரிவு செய்து, அக்கூறிலிருந்து விவரங்கள் சேகரித்து, ஆராய்ந்து பெறுகின்ற முடிவுகளை அந்த முழுத் தொகுதியின் (population) முடிவுகளாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். ஆனால், தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறு முழுத் தொகுதியின் பண்பியல்களைப் பிரதிபலிப்பதாகயிருந்தால்தான் இந்தமுறையில் எதிர்பார்க்கப் பட்ட பலன் கிடைக்கும்; இல்லாவிடில் ஆய்வு முழுவதும் வீண்வேலையாகிவிடும். முழுத்தொகுதியின் பண்பியல்புகளைப் பிரதி பலிக்குமாறு கூறுகளைத் தெரிவு செய்யப் பலமுறைகளுள்ளன. கூறெடுத்தல் முறைகளும், கூறுகளின் பண்புகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுயின் பண்புகளை நிர்ணயிக்கும் முறைகளும் பிறிதோர் அத்தியாயத்தில் விளக்கப் பட்டுள்ளன.

4. *விவரங்கள் சேகரித்தல் :*

புள்ளியியல் விவரங்களை முதனிலை விவரங்கள் (primary data), இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் (Secondary data), என இருவகையாகப் பாகுபாடு செய்யலாம்.

முதனிலை, இரண்டாம்நிலை விவரங்கள் : (Primary and Secondary data)

ஓர் குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்காக ஆய்வாளரால் அல்லது அவருடைய பணியாளர்களால் முதன்முதலாக விவரந் தருவோரிடமிருந்து நேரடியாகச் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்களுக்கு முதனிலை விவரங்கள் என்று பெயர். வேறொரு ஆய்வுக்காக இன்னொருவரால் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் மற்றொரு ஆய்வுக்காகப் பயன்படுத்தப்பட்டால், அவ்வாறு பயன்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கு இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் என்று பெயர். உதாரணமாக, மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்புக் குழுவினால் சேகரிக்கப் படுகின்ற விவரங்கள் மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்புக் குழுவிற்கு முதனிலை விவரங்களாகும். அவ்விவரங்களை மற்றவர்கள் பயன்படுத்தினால் அவை இரண்டாம் நிலை விவரங்களாகின்றன. முதனிலை விவரங்களைச்

சேகரித்து அளிப்பவர் முதனிலை மூலாதாரம் (Primary source) ஆவார். முதனிலை மூலாதாரத்தினின்றும் விவரங்களைப் பெற்று பிறருக்கு அளிப்பவர் இரண்டாம் நிலை மூலாதாரம் (Secondary Source) ஆவார். மேற்கூறப்பட்ட உதாரணத்தில், மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்புக் குழு முதனிலை மூலாதாரமாகும். மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்புக் குழுவிடமிருந்து விவரங் களைப் பெற்று, அவற்றை வெளியிடுகின்ற ஓர் நாளிதழ் இரண் டாம் நிலை மூலாதாரமாகும்.

i) ஆய்வாளர் தானே நேரடியாகச் சேகரித்தல்

ii) வினாத்தொகுதிகளை அஞ்சலில் அனுப்பி அஞ்சல் மூலம் விவரங்களைப் பெறுதல்

iii) விவரந்தருவோரை அணுகி விவரம் சேகரிக்குமாறு வினாப்பட்டியல்களுடன் கணிப்பாளர்களை அனுப் புதல்.

ஆழ்ந்த ஆய்வுக்காகவும், ஆய்வுத்தளம் குறுகிய பரப் புடையதாயிருந்தாலும் ஆய்வாளர் தானே நேரடியாக விவரம் சேகரிக்கும் பணியில் ஈடுபடலாம். இம்முறையில் ஆய்வாளர் தானே விவரங்களைச் சேகரிப்பதால் சேகரிக்கப் படுகின்ற விவரங்கள் பிழையேதுமின்றி மிகச் சரியானவையாக யிருக்கும். ஆகவே, ஆய்வின் முடிவுகளும் சரியாக யிருக்கும். ஆனால், இம்முறை மிகச்சிறிய கூறுகளுக்கே நல்ல பலன் தரமுடியும், ஏனெனில், பெரிய அளவில் இம்முறையைப் பின்பற்றி ஆய் வாளர் விவரம் சேகரிக்கத் தொடங்கினல் சேகரிப்புப்பணி முடியும் முன்னரே ஆய்வாளருக்கு அலுப்புத் தட்டிவிடலாம். அதன் காரணமாக வேலை சரிவர முடியாமற்போகலாம்.

பரந்த அளவிலான கணக்கெடுப்புப் பணிகளுக்கு அஞ்சல் மூலம் வினாத்தொகுதிகளை அனுப்பி, அஞ்சல் மூலமே விவரங் களைப் பெறும் முறை மிகவும் பொருத்தமானதாகும். விவரந் தருவோருக்கு வினாத்தொகுதிகளுடன், நிரப்பப்பட்ட வினாத் தொகுதிகளைத் திருப்பி அனுப்புவதற்கான அஞ்சல் உள்ளுறை களும் சேர்த்து அனுப்பப்பட வேண்டும். விவரந்தருவோர் வினாத்தொகுதிகளைக் கவனமாக நிரப்பி மீண்டும் ஆய்வாள ருக்கு அஞ்சல் மூலம் அனுப்பி வைப்பர். இந்த முறையினல் செலவும் வேலையும் மிகவும் குறைகிறது. ஆனல் விவரந் தருவோர் கற்றறிந்தவர்களாக இருந்தால் மட்டுமே இம் முறையைப் பின்பற்ற முடியும். அவ்வாறு கற்றவர்களாகயிருந்

தாலும் வினுத்தொகுதிகளைக் கவனமாக நிரப்பிக் குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள், பொறுப்புடன் அனுப்பி வைப்பவர்களாகயிருக்க வேண்டும். எல்லோரும் வினுத்தொகுதிகளை நிரப்பி அனுப்புவர்களாக யிருந்தாலும் பலர் குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் அனுப்பாமல் இருந்துவிடக் கூடும். குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் அனுப்பப்பட்ட வினுத்தொகுதிகள் பல சரியாக நிரப்பப் படாமலிருக்கலாம்.

வினுப்பட்டியல்களுடன் கணிப்பாளர்களை அனுப்பி விவரம் சேகரிக்கும் முறை ஏராளமாகச் செலவாகக் கூடிய முறையாகும். இருப்பினும் கல்லாதவரைப் பெரும்பான்மையாகக் கொண்ட எல்லா நாடுகளிலும் இம்முறை ஒன்றன் மூலம்தான் விவரம் சேகரிக்க முடியும். சேகரிப்புப் பணிக்காகப் பல கணிப்பாளர் நியமிக்கப்பட்டு பயிற்சியளிக்கப்படுவர். வினுக்களைப்பற்றியும் அவ்வினுக்களுக்கு எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற விடைகளின் தன்மைகளைப் பற்றியும் அவ்விடைகளை விவரந்தரு வோரிடமிருந்து எவ்வாறு நயமான முறைகளில் பெறுவது என்பது பற்றியும் அவர்களுக்கு விளக்கஞ் செய்யப்படும். இத்தகைய பயிற்சிகளால் பல கணிப்பாளர்களாலும் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் ஒரே சீராக அமையும். பயிற்சி பெற்ற கணிப்பாளர்கள் விவரந்தருவோரின் இல்லங்களுக்குச் சென்று அவர்களைச் சந்தித்து, அவர்களிடமிருந்து விவரங்களைச் சேகரித்து, வினுப்பட்டியல்களை நிரப்புவர். எல்லா வினுப்பட்டியல்களும் நிரப்பப்பட்ட பின்னர், அவை ஆய்வுக்காக ஆய்வாளருக்கு அல்லது தலைமை ஆய்வகத்திற்கு அனுப்பிவைக்கப்படும்.

இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பயன்படுத்துதல் :

முதனிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கப் போதிய பண வசதியில்லாவிடினும் போதிய கால இடைவெளி யில்லாவிடினும் மற்ற வசதிக்குறைவுகளிருந்தாலும் இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் ஆய்வு செய்யலாம். ஆனால் இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பயன்படுத்து முன்னர், அவ்விவரங்கள் யாரால், எப்போது எதற்காகச் சேகரிக்கப் பட்டன? எந்த முறையைப் பின்பற்றி அவை சேகரிக்கப் பட்டன? அவற்றின் பிழையின்மைத் தரம் என்ன? என்பது போன்ற விவரங்களை நன்கு அறிந்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி ஆய்வு செய்தால் ஆய்வின் முடிவுகள் பாதிக்கப்படுமா என்பதையும் நன்கு ஆராய்ந்து கொள்ள வேண்டும். இல்லையெனில் மொத்த ஆய்வுப்பணியும் வீணுகிவிடும்.

5. *விவரங்களைச் சோதித்துத் தொகுத்தல் :*

நிரப்பப்பட்ட வினுத்தொகுதிகளும், வினுப்பட்டியல்களும் ஆய்வாளரின் அலுவலகத்திற்கு வந்து சேர்ந்தபின், அவை சரியாக நிரப்பப்பட்டுள்ளனவா, நிரப்பப்பட்டுள்ள விவரங் கள் சரியானவைதாஞ என்று சோதிக்கப்படுகின்றன. தவருன விவரங்கள் திருத்தப்படக்கூடியவையாகயிருப்பின் அவற்றை அழிக்காமல், அவைகளின் பக்கங்களில் பென்சிலால் திருத்தங் கள் செய்யப்படுகின்றன. பின்னர், வினுத்தொகுதிகளிலும், வினுப்பட்டியல்களிலுமுள்ள விவரங்கள் விரிவான பெரிய பட்டியல்களில் தொகுத்து எழுதப்படுகின்றன. பின்னர், அவ் விவரங்கள் இனவாரியாகப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டு, பட்டியல் படுத்தப்பட்ட விவரங்களாகவும், அறிக்கைகளாகவும், வரை படங்களாகவும், வெளியிடப்படுகின்றன. இம்மாதிரியான வேலைகளுக்குப் பரந்த அனுபவமும், மிகுந்த கவனமும், நுண்ணிய திறமையும் தேவை. விவரங்கள், பாகுபாடு செய்யப் பட்டு பட்டியல்கள், படங்கள், வரைபடங்கள் மூலம் எவ்வாறு வெளியிடப்படுகின்றன என்பதுபற்றி அடுத்த இரு அத்தியாயங் களில் ஆராய்வோம்.

வினுத்தாள்—2.

1. புள்ளியியல் ஆய்வுப்பணிகளைத் தொடங்குமுன் அவற்றைக் கவனமாகத் திட்டமிட்டு அமைத்துக் கொள்ள வேண்டியதன் அவசியம் யாது?

2. ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நிலைகளை விளக்குக.
(மதுரை பி.ஏ., 1970 செப்.)

3. புள்ளிவிவரக் கணக்கெடுப்பின் முக்கிய நிலைகளை விளக்குக.

4. பல்வேறு வகையான புள்ளிவிவர கணக்கெடுப்பு முறைகளை விளக்கி கூறுக.

5. புள்ளியியல் அலகு என்ருல் என்ன? புள்ளியியல் அலகுக்குத் தேவையான அடிப்படை பண்பியல்புகள் யாவை?

6. புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பில் முழுக்கணிப்பு முறை, கூறுக் கணிப்புமுறை ஆகியவற்றின் தராதரங்களை ஒப்பிடுக.
(மதுரை பி.ஏ., 1970 ஏப்.)

7. முழுக்கணிப்பு முறையில் புள்ளிவிவரங்களை சேகரிப்பதை விளக்கிக் கூறுக.

(சென்னை பி. எஸ். ஸி. 1966 ஏப்.)

8. பல்வேறு வகையான புள்ளிவிவரக் கணக்கெடுப்பு முறைகளையும் அவைகளுள் ஒவ்வொன்றும் எத்தகைய சூழ்நிலைகளில் நல்லபலனைத் தரும் என்பதையும் சுருக்கமாக விவரிக்கவும்.

9. முழுக்கணிப்பு முறை, கூறுக்கணிப்பு முறை ஆகியவற்றின் நன்மை தீமைகளை ஒப்பிடுக.

(சென்னை, பி.காம்., 1960 செப்.)

10. புள்ளியியற் பிழை என்றால் என்ன? தவறு (Mistake) என்பதினின்று அது எவ்வாறு மாறுபடுகிறது?

11. ஓர் புள்ளியியற் பிழை கணக்குப்பதிவியல் பிழையினின்றும் எவ்வாறு மாறுபடுகிறதென்பதைச் சான்றுகளுடன் விளக்குக. புள்ளியியற் பிழைகளின் வகைகள் யாவை? அவற்றை எவ்வாறு அளவிடுவீர்?

(சென்னை, பி.காம்., 1965 ஏப்.)

12. ஈடுசெய்யும் பிழைகள் யாவை? திரளாகக் கூடும் பிழைகள் யாவை? புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிப்பின் போது ஏன் அவைகளைப்பற்றிச் சிந்திக்க வேண்டும்?

13. ஒருசார்பான பிழைகள் பொதுவாகத் திரளாகக் குவிவதும், சார்பற்ற பிழைகள் ஈடுசெய்வதும் எப்படி என்று காட்டுக. இப்பொதுவிதிக்கு விதிவிலக்குகள் உள்ளனவா?

(சென்னை, பி.காம். 1969 செப்.)

14. புள்ளியியல் பிழைகளின் மூலாதாரங்களையும், அவற்றினாலேற்படும் விளைவுகளையும் விவரிக்கவும், முக்கியமான தோரய முறைகளையும் அவற்றின் பயன்களையும் கூறுக.

(சென்னை, பி.காம்., 1966 செப்.)

15. புள்ளியியல் ஆய்வில் புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு, புள்ளிவிவரம் பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றின் பல்வேறு நிலைகளையும், ஒவ்வொரு நிலையிலும் மேற்கொள்ள வேண்டிய முன்னெச்சரிக்கைகளைக் குறிப்பிட்டு விளக்குக.

(சென்னை, பி. எஸ். ஸி. 1968 ஏப்.)

16. முதனிலை விவரங்கள், இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் ஆகியவற்றை அவை எப்பொழுது, எவ்வாறு பயன் படுகின்றன என்று குறிப்பிட்டு விளக்குக.

(சென்னை, பி. எஸ். ஸி. 1967 ஏப்.)

17. முதனிலை, இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் என்பவற்றி லிருந்து நீவிர் அறிந்துகொள்வது யாது? முதனிலை விவரங்களின் சேகரிப்பில் பயன்படுகின்ற பல்வேறு முறைகள் யாவை? அவற்றை விரிவாக விவாதிக்கவும்)

(சென்னை, பி.காம்., 1963 ஏப்.)

18. தொழிலாளர் குடும்பங்களின் வரவு செலவுக் கணக்கைப்பற்றி ஆராய்வதற்கான ஓர் வினாப்பட்டி யல் தயார் செய்க. (மதுரை நகரில் நூறு தொழிலாளர் குடும்பங்கள் கொண்டதோர் கூறு எடுத்துக்கொள்ளப் படுகிறதென ஏற்கலாம்) வினாத்தாளை அமைக்கும் போது என்ன பொதுக் கொள்கைகள் நம் கவனத்தி லிருக்க வேண்டுமென்பதைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

(மதுரை, பி.ஏ., 1971 ஏப்.)

19. இந்தியாவில் தொழில் நிறுவன ஊழியர்களுக்குப் பொருத்தமான தரமான அளவில் குறைந்தபட்ச ஊதியத்தை நிர்ணயிக்குமாறு நீங்கள் கேட்டுக் கொள்ளப்படுகிறீர்கள். அந்நோக்கத்திற்காக ஒரு கூறு அளவெடுப்பின் திட்ட அமைப்பை எவ்வாறு உருவாக்குவீர்கள் என்பதை குறிப்பிடுக.

(சென்னை, பி காம்., 1965 ஏப்)

20. ஓர் தொழில் நிறுவனத்தின் நிருவாகி என்ற முறையில் அந்நிறுவனத்தில் உற்பத்தியில் ஊதிய உயர்வின் விளைவுகளை நிர்ணயிக்குமாறு கேட்டுக்கொள்ளப்படு கிறீர்கள். அந்நோக்கத்திற்கும் பொருத்தமான வினாத் தொகுதி ஒன்றை வரைக.

(சென்னை, பி.காம். 1965 செப்.)

21. கல்லூரி மாணவர்களின் வகைகளைப் பற்றியும், செல விடுவதற்கான வசதிகளைப் பற்றியும் ஆராயத் திட்ட மிடப்பட்டுள்ளது. எவ்வாறு அளவெடுப்பை அமைப் பீர்களென்பதைச் சுருக்கமாக விவரிக்கவும். ஓர் பொருத்தமான வினாத்தொகுதியைத் தயார் செய்யவும்.

(சென்னை, பி.காம்., 1967 செப்.)

22. சென்னை நகரின் குடிசைவாழ் மக்களைப்பற்றிய சமூகப் பொருளாதார அளவெடுப்பு ஒன்றை நடத்துவ தென்று கருதப்பட்டுள்ளது. எவ்வாறு செயல்படத் தொடங்குவீர்? அந்நோக்கத்திற்காக ஓர் பொருத்த மான வினாப்பட்டியல் – வினாத்தொகுதியை வரையவும்.
(சென்னை, பி.காம்., 1968 ஏப்.)

23. *சிறு குறிப்பு வரைக:*

(i) முதனிலை விவரங்கள் (மதுரை, பி.எஸ்.ஸி. 1971 ஏப்., பி.ஏ., 1971 செப்)

(ii) முதனிலை, இரண்டாம்நிலை விவரங்கள்
(சென்னை, பி.காம்., 1968 செப்., மதுரை, பி.காம்., 1970 செப்., பி.எஸ்.ஸி. 1970 செப்.)

(iii) வினாத்தொகுதி தயாரித்தல்
(மதுரை, பி.எஸ்.ஸி. 1970 செப்.)

(iv) வினாத்தொகுதியும், வினாப்பட்டியலும்
(மதுரை, பி.காம்., 1970 செப்.)

(v) பிழையின்மையும், தோராயமும்
(மதுரை, பி.காம்., 1970 செப்.)

(vi) ஒரு சார்பான பிழைகள்
(மதுரை, பி.காம்., 1970 செப்.)

(vii) ஓர் நல்ல வினாத்தொகுதியின் பண்பியல்புகள்
(சென்னை, பி.காம்., 1967 ஏப்., மதுரை, பி.காம்., 1970 ஏப்.)

3. பட்டியலமைத்தல்

(Tabulation)

நிரப்பப்பட்ட வினுத்தொகுதிகளும், வினுப்பட்டியல்களும் தலைமை ஆய்வகத்திற்கு வந்துசேர்ந்தபின், அவைகள் கவனமாகப் பரிசோதிக்கப்படுகின்றன. நிரப்பப்படாமல் விடப்பட்ட பகுதிகளிருப்பின் அவைகள் நிரப்பக்கூடியவையாக இருந்தால் நிரப்பப்படுகின்றன. உதாரணமாக, ஆணு அல்லது பெண்ணு என்ற கேள்விக்குப் பதில் எழுதப்படாமலிருந்தால் அவருடைய பெயரிலிருந்து அவர் ஆணு அல்லது பெண்ணு என்பதை நிர்ணயித்து நிரப்பப்படாமல் விடப்பட்ட இடத்தை நிரப்பி விடலாம். இதுபோல், திருத்தப்படக்கூடிய தவறுகளிருந்தால் திருத்தப்படுகின்றன. உதாரணமாக, விவரந்தருபவருடைய வருமானம் பற்றிய விவரத்தில், வியாபாரத்திலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், வாடகையாகக்கிடைக்கும் வருமானம், நில வருமானம் முதலிய பலவகையான வருமானங்களும் எழுதப்பட்டு, அவருடைய மொத்தவருமானம் தவருன கூட்டலாக எழுதப்பட்டிருந்தால் அக்கூட்டலைத் திருத்தி எழுதலாம். ஆனால், அவ்வாறு திருத்தும்போது, கணிப்பாளர் எழுதப்பட்ட விவரத்தை, அது முழுத்தவருகயிருந்தாலும், அழிக்காமல், அதன்பக்கத்தில் பென்சிலால் திருத்தம் செய்யவேண்டும். இவ்வாறு நிரப்பக்கூடியதாகவும், திருத்தக்கூடியதாகவும் இல்லாமல் சரியாக நிரப்பப்பட்டாலும், தவறுகள் நிறைந்துள்ள வினுத்தொகுதி அல்லது வினுப்பட்டியலைக் கணக்கெடுப்பில் சேர்க்காது தள்ளிவிடவேண்டும். இவ்வாறு திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டுத் தொகுக்கப்பட்ட பின்னர், வினுத்தொகுதிகளிலும் வினுப்பட்டியல்களிலுமுள்ள விவரங்கள் யாவும் விரிவான செய்முறைப் பட்டியல்களில் வரிசைப்படுத்தி எழுதப்படுகின்றன. பின்னர், இச்செய்முறைப் பட்டியல்கள் யாவும் மீள்பார்வைச் செய்யப்பட்டுப் பின்னர் இறுதிப்பட்டியல்களாகவும், அறிக்கைகளாகவும், படங்களாகவும், வரைபடங்களாகவும் வெளியிடப்படுகின்றன.

விவரங்களை வகுப்பாக்கம் செய்தல் (Classification of Data):

புள்ளியியல் தலைமை அலுவலகத்தில் விவரங்கள் யாவும் தொகுக்கப்பட்டபின், அவ்விவரங்கள் யாவும் பட்டியல் படுத்தப்படுகின்றன. ஆகவே, விவரங்களுக்கேற்ற வகையில் தேவையான பட்டியல்களின் அமைப்புக்களை நிர்ணயிக்க வேண்டும். பட்டியலமைக்கும் பணி சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பல்வேறு இனங்களாகப் பிரித்து வகுப்பாக்கம் செய்யும் பணியுடன் தொடங்குகிறது. சென்ற அத்தியாயத்தில் குறிப்பிடப்பட்டதுபோல், நன்கு திட்டமிடப்பட்டுச் செய்யப்படுகின்ற புள்ளியியல் ஆய்வில் வகுப்பாக்கம் செய்யும் முறைகள் யாவும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுமுன்னரே நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. இருப்பினும், விவரங்களை வரிசைப்படுத்தி எடுத்து எழுதுவதற்குத் தேவையான செய்முறைப் பட்டியல்களில் அமைப்புக்களை நிர்ணயிக்கும்போதுதான் முழு வகுப்பாக்கமும் (Complete Classification) செய்யப்படுகிறது.

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை அவைகளின் பல்வேறு வகையான பண்பியல்புகளுக்கேற்ப பல்வேறு வகுப்புக்களாக (Classes) பாகுபாடு செய்யும் முறைக்கும் வகுப்பாக்கம் செய்தல் (Classification) என்று பெயர்.

வகுப்பாக்கத்தின் நோக்கங்கள் :

(1) சீர்படா விவரங்களைச் (Raw data) சுருக்கித் தெளிவாக, எளிதில் புரிந்துகொள்ளக்கூடிய வகையில் பாகுபாடு செய்தல்.

(2) ஒத்த பண்புகளைக் கொண்ட விவரங்கள் யாவும் ஒரே வகுப்பிலிருக்குமாறு விவரங்களின் பல்வேறுபட்ட பண்புகளுக்கேற்ப பல்வேறு வகுப்புகளாகப் பிரித்தல்.

(3) பல்வேறு இனங்களைச் சார்ந்த விவரங்களையும் எளிதில் ஒப்பிடக்கூடிய வகையில் ஒழுங்குபடுத்தி அமைத்தல்.

வகுப்பாக்கம் செய்யும்போது கவனிக்கவேண்டிய விதிகள் :

வகுப்பாக்கத்தில் இடம்பெறுகின்ற பல்வேறு வகுப்புக்களின் பண்பியல்புகளும் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட வேண்டும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஓர் வகுப்பு இருக்கவேண்டும். ஒரே உறுப்பு ஒன்றுக்குமேற்பட்ட வகுப்புகளில் இடம்பெறுகின்றமாதிரி வகுப்பாக்கத்தில், 'கற்றவர்' 'கல்லாதவர்' என இரு வகுப்புக்களை அமைத்தால் கற்றவர் யார்? கல்லாதவர் யார்?

என்ற விவரம் தெளிவாக விளக்கப்படல் வேண்டும். 10-ஆம் வகுப்புவரை படித்தவரைக் கற்றவராகக் கொண்டால், 10-ஆம் வகுப்புத் தேர்வில் தோற்றவரைக் கற்றவராகக் கொள்வதா ? 10–ஆம் வகுப்புவரை படித்து, இறுதித் தேர்வு எழுதாதவரை எந்தவகுப்பில் சேர்ப்பது போன்ற ஐயப்பாடுகள் யாவும் தெளிவாக, திட்டவட்டமாக விளக்கப்படல் வேண்டும்.

ஆய்வு முழுவதும் வகுப்பாக்கம் ஒரே சீராகச் செய்யப் படவேண்டும். உதாரணமாக, ஒரு தொழில் நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களை அவர்கள் பெறும் ஊதியத்திற் கேற்ப வகுப்பாக்கம் செய்யும்போது, ஓர் இடத்தில் ‘ரூ. 1(0க்குக் கீழ்’, ‘ரூ. 100 முதல் 300 வரை’, ‘ரூ. 300க்கு மேல்’ என்ற வகுப்புக்களாகவும், பிறிதோரிடத்தில் ‘ரூ. 150க்குக் கீழ்’, ‘ரூ. 150க்கு மேல்’ என்ற வகுப்புக் களாகவும் பிரித்தல் கூடாது.

குறிப்பிட்டகால இடைவெளிகளில் மீண்டும் மீண்டும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்ற ஆய்வுகளில் வகுப்பாக்கப் பிரிவுகள் எப்பொழுதும் ஒரே மாதிரியாக யிருக்குமாறு பிரிக்க வேண்டும். உதாரணமாக, மக்கள்தொகை கணிப்பு 10 ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறை செய்யப்படுகிறது. ஒவ்வொரு மக்கள்தொகை கணிப்பின்போதும் ஒவ்வொருமாதிரியாக வகுப்பாக்கம் செய்தால் பல்வேறு மக்கள் கணிப்பு விவரங்களை யும் ஒப்பிட்டுப்பார்க்க முடியாது.

காலப்போக்கிலேற்படக் கூடிய மாறுதல்களுக் கேற்றவாறு பலவிவரங்கள் விடப்படலாம். புதிதாக பலவிவரங்கள் சேர்க்கப்படலாம். இவைகளுக் கேற்றவாறு மாறுதல் செய்யப் படத்தக்க வகையில் வகுப்பாக்கம் நெகிழ்ந்துகொடுக்கும் தன்மையுடையதா யிருக்கவேண்டும்.

வகுப்பாக்கத்தின் வகைகள் (Types of Classification) :

(அ) பண்பின் வகுப்பாக்கம் (Qualitative Classification) :

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் மதம், இனம், மண வாழ்க்கை, முதலிய பல்வேறு பண்புகளுக்கேற்ற பாகுபாடு செய்யப்படு கின்ற வகுப்பாக்கத்திற்கு பண்பின வகுப்பாக்கம் என்று பெயர். பண்பின வகுப்பாக்கத்தை ஒருவழி வகுப்பாக்கம், இருவழி வகுப்பாக்கம், பல்வழி வகுப்பாக்கம் என கீழ்க்கண்டவாறு பிரிக்கலாம்.

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஒரே இனமாகப் பட்டியலில் அமைக்கப்பட்டால் அத்தகைய பாகுபாட்டிற்கு ஒருவழி வகுப்பாக்கம் என்று பெயர். உதாரணமாக, சென்னை நகரிலுள்ள 10 முக்கிய தொழில் நிறுவனங்களின் வேலைசெய்து வருகின்ற தொழிலாளரின் வாழ்க்கைத் தரம் பற்றிய ஆய்விற்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை வகுப்பாக்கம் செய்வதாகக் கொள்வோம். 10 தொழில்நிறுவனங்களிலும் வேலைசெய்கின்ற மொத்த தொழிலாளர்களடங்கிய பட்டியலை ஒருவழி வகுப்பாக்கம் என்று கூறலாம். இங்கு 10 தொழில் நிறுவனங்களின் பெயர்களும் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக எழுதப்பட்டிருக்கும். ஒவ்வொரு நிறுவனத்திற்கும் நேராக அந்நிறுவனத்தில் வேலை பார்க்கின்ற தொழிலாளர்களின் மொத்த எண்ணிக்கைக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் இத்தகைய வகுப்பாக்கத்திற்கு ஒருவழி வகுப்பாக்கம் அல்லது ஒருவழிப் பாகுபாடு (One way Classification) என்று பெயர். இவ்வாறு பாகுபாடு செய்யப்பட்ட தொழிலாளர்களை ஆண், பெண் என்ற பண்புகளின் அடிப்படையில் மேலும் பாகுபாடு செய்தால் அதற்கு ‘இருவழிப் பாகுபாடு’ அல்லது ‘இருபண்பு வகுப்பாக்கம்’ (Two-fold Classification) என்று பெயர். இவ்வாறு ஆண், பெண் ஆகிய இருபண்புகளுக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்ட ஆண் – பெண் தொழிலாளர்களைத் தனித்தனியே மீண்டும் மணமானவர், மணமாகாதவர் என்ற இருபண்புகளுக்கேற்ப வகுப்பாக்கம் செய்வதற்கு ‘பல்வழிப் பாகுபாடு’ அல்லது ‘பல்வழி வகுப்பாக்கம்’ அல்லது பல்பண்பு வகுப்பாக்கம் (Manifold Classification) என்று பெயர். இந்த வகுப்பாக்கத்தில் ஆண் – பெண் என்ற இருவகுப்புக்களுடன், ஆண் வகுப்பில் மணமானவர் - மணமாகாதவர் என்ற இரு உட்பிரிவுகளும், பெண் வகுப்பில் மணமானவர் - மணமாகாதவர் என்ற இரு உட்பிரிவுகளும் சேர்ந்து மொத்தம் நான்கு வகுப்புக்கள் இருக்கும். இதுபோன்று விவரங்களில் பற்பல பண்புகளுக்கேற்ப பற்பல வகுப்புக்களாக வகுப்பாக்கம் செய்து, ஒவ்வொரு வகுப்பையும் உட்பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்யலாம்.

(ஆ) அளவின வகுப்பாக்கம் (Quantitative Classification) :

விவரங்கள் எண்சார் அளவுகளுக்குத் தக்கவாறு பல்வேறு வகுப்புக்களாகப் பாகுபாடு செய்யப்படுகின்ற வகுப்பாக்கத்திற்கு அளவின வகுப்பாக்கம் (Quantitative Classification) என்று பெயர். உதாரணம்: சென்னை நகரிலுள்ள குடும்பங்களைத் தக்கவாறு பாகுபாடு செய்தல்; தொழில் நிறுவனங்களைத் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கைக் கேற்ப வகுப்பாக்கம் செய்

தல்; உற்பத்தி நிலையங்களை உற்பத்தி அளவிற்குத் தக்கவாறு பாகுபாடு செய்தல், தமிழ்நாட்டு மக்களை அவர்கள் செலுத்து கின்ற வருமான வரிக்கேற்ப வகுப்பாக்கம் செய்தல்.

காலவாரியான வகுப்பாக்கம் (Chronological Classification) :

பல்வேறு குறிப்பிட்ட காலங்களுக்குரிய விவரங்களில் வரிசைக்கிரமமான தொகுப்பிற்குக் 'காலவாரியன விவரங்கள்' (Chronological Data) அல்லது 'காலம் சார் தொடர் வரிசை' (Time-Series) என்று பெயர். ஓர் கல்லூரி மாணவனின் மாதாந்தரச் செலவு, ஒரு விற்பனை நிலையத்தின் தினசரி விற்பனை, ஓர் உற்பத்தி நிலையத்தின் வருடவாரியான உற்பத்தி அளவுகள், முதலியன காலம்சார் தொடர்வரிசையாகும். இத்தகைய காலம் சார் விவரங்கள் அவைகளுக்குரிய காலங்களுக்கேற்பப் பிரிக்கப் படுகின்ற வகுப்பாக்கத்திற்குக் 'காலவாரியான வகுப்பாக்கம்' என்று பெயர்.

பூகோள ரீதியிலான வகுப்பாக்கம் (Geographical Classification) :

விவரங்களைப் பூகோளப் பகுதிகளுக்குத் தக்கவாறு பாகு பாடு செய்வதற்குப் 'பூகோளரீதியிலான வகுப்பாக்கம்' என்று பெயர். உதாரணம்: உலக மக்கள்தொகையை நாடு வாரியாகப் பாகுபாடு செய்தல்; உலக அரிசி உற்பத்தியை நாடுவாரியாகப் பிரித்தல் முதலியன.

ஆய்வுக்குரிய விவரங்களின் பண்பியல்புகளுக்கேற்ப மேற் கூறப்பட்ட வகுப்பாக்கம் முறைகளுள் பொருத்தமானவற்றைத் தெளிவு செய்து அவைகளுக் கேற்றவாறு பட்டியல்களை அமைக்க வேண்டும்.

பட்டியலமைத்தல் (Tabulation) :

பட்டியல் என்பது புள்ளியியல் விவரங்களை எளிதாகப் புரிந்துகொள்ளும் வகையில் ஒழுங்காக வரிசைப்படுத்தி எழுதத்தக்கவாறு பல நிரல்களையும் (Colum), நிரைகளையும் (row) கொண்ட ஓர் அமைப்பாகும். புள்ளிவிவரங்களை அவற் றின் பண்புகளுக்கும் அளவுகளுக்கும் ஏற்றவாறு பல்வேறு வகுப்புகளாகப் பாகுபாடு செய்தபின் ஒவ்வொரு வகுப்புக்கும் ஒவ்வொரு நிரல் அல்லது நிரையிருக்குமாறு பட்டியல் அமைக் கப்படுகின்றது; துணை வகுப்புக்களாக (Sub-Classes) பாகுபாடு செய்யப்பட்டுள்ள வகுப்புக்கள் பெரும்பாலும் நிரல்களிலேயே

குறிக்கப்பட வேண்டும். ஓர் வகுப்பிலுள்ள துணை வகுப்புக் களின் எண்ணிக்கைக்குத் தக்கவாறு அவ்வகுப்புக்குரிய நிரலும் துணை நிரல்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு துணை நிரலிலும் ஒரு துணைவகுப்புக் குறிப்பிட வேண்டும். நிரைகளில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள பண்புகளுள் ஒன்றையும், கொண்ட உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அக்குறிப்பிட்ட நிரைக்கு நேர்வரிசையில் குறிப்பிட்ட நிரலுக்கு நேர்கீழேயுள்ள சிறிய கட்டத்தில் (Cell) எழுதப்படும். இவ்வாறு பல்வேறு வகுப்புக்களையும் சார்ந்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளைக் பட்டியலில் அவற்றிற்குரிய சிறிய கட்டங்களில் எழுதுவதற்குப் 'பட்டியலில் அமைத்தல்' அல்லது 'பட்டியல் படுத்துதல்' என்று பெயர்.

பட்டியல்களின் வகைகள் :

பட்டியல்கள் அவற்றின் தன்மைகளுக்கும், பயன்பாடு களுக்கும் ஏற்றவாறு இருவிதமாக வகைப்படுத்தப் படுகின்றன. அவையாவன : (1) பொதுநோக்குப் பட்டியல் (General purpose table), (2) சுருக்கப்பட்டியல் (Summary table) அல்லது தனி நோக்குப் பட்டியல் (Special purpose table).

1. பொதுநோக்குப் பட்டியல் (General Purpose Table) :

பொதுநோக்குப் பட்டியல் என்பது மிகவும் விரிவான பட்டியலாகும். ஆய்வுக்காகச் சேகரிக்கப்பட்டுள்ள முதலிய விவரங்கள் யாவும் முழுமையாக இப்பட்டியலில் குறிப்பிடப்பட் டிருக்கும். ஆகவே இது எண் விவரங்களைக் கொண்ட ஒரு பட்டியலாக அமைந்திருக்குமேயன்றி, இதிலிருந்து ஆய்வு பற்றிய எந்த விளக்கத்தையும் எளிதில் பெறமுடியாது: உதாரணமாக, வேலையின்றி யிருப்போர் பற்றிய ஆய்வு ஒன்றில் ஒறி குறிப்பிட்ட பகுதியைச் சார்ந்த வேலையில்லாத 300 பேர் களிடமிருந்து 300 விஞப்பட்டியல்களில் அவர்களைப்பற்றிய கீழ்க்கண்ட ஏழு விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவதாகக் கொள் வோம். (1) வயது, (2) செய்யக்கூடிய தொழில், (3) இதற்கு முன் செய்துவந்த தொழில், (4) கிடைத்த ஊதியம், (5) தற் போது வேலையில்லாத நாட்கள், (6) மணமானவரா (7) அவரைச்சார்ந்த குடும்பத்தினரின் எண்ணிக்கை. முதலில் 300 விஞப்பட்டியல்களும் வரிசைப்படுத்தப்பட்டு, அவற்றில் வரிசை எண்கள் குறிப்பிடப்படுகின்றன. பின்னர், வரிசை எண்களை குறிப்பதற்காக ஓர் நிரலும், சேகரிக்கப்பட்ட ஏழு விவரங்களுக்காக ஏழு நிரல்களுமாக மொத்தம் எட்டு

நிரல்களடங்கிய ஓர் பட்டியலமைக்கப்படுகிறது. வரிசை எண் நிரலில் 300 வரிசைகளில் வேலையில்லாத 300 பேர்களைக் குறிப்பிடுகின்ற 300 வரிசை எண்களும் வரிசையாக எழுதப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் நேராக, அவ்வரிசை யெண்ணுக்குரியவர் பற்றிய ஏழு விவரங்களும் அவைகளுக்குரிய ஏழு நிரல்களில் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறு 300 வரிசைகளிலும் 300 பேர்களுடைய விவரங்களும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. 300 வரிசைகளிலும் 300 பேர்களுடைய விவரங்களும் குறிப்பிட்டப்பின் கிடைக்கப்பெறும் பட்டியல்தான் பொதுநோக்குப் பட்டியலாகும்.

2. *தனிநோக்குப் பட்டியல்* (Special Purpose Table):

பொதுநோக்குப் பட்டியலிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்குத் தேவையான விவரங்களை தெளிவு செய்து, தேவைப்பட்டால் அவற்றை மீண்டும் பாகுபாடு செய்து அவைகளுக்கு ஏற்றவாறு நிரைகளும், நிரல்களும் கொண்ட ஓர் தனிப் பட்டியலில் அமைக்கலாம். இவ்வாறு ஓர் தனி நோக்கத்திற்காக அமைக்கப்படுகின்ற பட்டியலுக்குத் தனிநோக்குப் பட்டியல் (Special Purpose table) என்று பெயர். தேவையான விவரங்களை மட்டும் கொண்டு சுருக்கமாக அமைக்கப்படுவதால் இப் பட்டியல் சுருக்கப் பட்டியல் (Summary table) என்றும் அழைக்கப்படும். இப்பட்டியலில் ஒப்பிடப்படவேண்டிய பண்புகள் அடுத்தடுத்த நிரல்களில் குறிப்பிடப் படுமாகையால் அவைகளை எளிதில் ஒப்பிட்டு அறியமுடியும்.

பட்டியலமைக்கும்போது கவனிக்கவேண்டிய விதிகள் :

1. பட்டியலுக்குரிய தலைப்பு மிகவும் தெளிவாகவும், முழுமையாகவும், விளக்கமாகவும், ஆனால் சுருக்கமாகவும் எழுதப்படவேண்டும்.
2. பட்டியல் கூடுமானவரை எளியதாயிருக்க வேண்டும்.
3. நிரல்களிலும், நிரைகளிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற பண்புகள் ஆய்வுக்கேற்ற வகையில் ஒப்பிடக்கூடியவாறு ஒழுங்குகாக அமைக்கப்பட வேண்டும்.
4. ஒப்பிடப்படவேண்டிய விவரங்கள் அடுத்தடுத்த நிரல்களில் இடம்பெறவேண்டும்.

5. நிரல் தலைப்புக்களும், நிரை தலைப்புக்களும் மிகவும் சுருக்கமாகவும் ஆனால் தெளிவாகவும் எழுதப்பட வேண்டும்.

6. அளவின விவரங்களைக் குறிப்பிடுகின்ற நிரல்களில் தலைப்புக்கள் அலகுகளுடன் எழுதப்படவேண்டும். (உ-ம்.) விலை (ரூபாயில்), மக்கள்தொகை (ஆயிரத்தில்), எடை (கிலோ கிராமில்).

7. தனிநோக்குப் பட்டியல்களில் எண்கள் பல இலக்கங்களுடன் குறிப்பிடபடாமல் குறைந்த இலக்கங்களைக் கொண்ட முழு எண்களுக்குத் திருத்தமாகக் குறிப்பிடப் படவேண்டும். அதற்கேற்ப, நிரல் தலைப்புக்கள் செலவு (இலட்சம் ரூபாயின்) உற்பத்தி (1000 டன் களில்), மக்கள்தொகை (கோடிகளில்) என்பவை போன்ற தோராய விளக்கங்களுடன் எழுதப்பட வேண்டும்.

8. நிரல் தலைப்புக்கள் அல்லது நிரை தலைப்புக்கள் முழு விளக்கங்களுடன் குறிப்பிடப்பட முடியாவிடில், அவற்றிற்கான விளக்கங்கள் பின்குறிப்புகளாகப் பட்டியலின் அடியில் கொடுக்கப்பட வேண்டும். இது போன்று, பட்டியலில் இடம்பெற முடியாத ஆனால் முக்கியமான விவரங்களும் பின்குறிப்புக்களாகப் பட்டியலின் அடியில் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

9. எண்கள் ஒழுங்கான வரிசைகளில் (ஒன்றுவது இலக்கத்திற்கு நேர் பத்தாவது இலக்கமும் தசம புள்ளிக்கு நேர் தசம புள்ளியும் இருக்குமாறு) எழுதப் படவேண்டும்.

10. நிரல் தலைப்புக்களடங்கிய முதல் வரிசையும், நிரைத் தலைப்புகளடங்கிய முதல் நிரலும் இரட்டைக் கோடுகளால் அல்லது தடித்த கோடுகளால் வரையப்பட வேண்டும். இது போன்று கூட்டல்களைக் குறிப்பிடுகின்ற நிரைக்கும், நிரல்களும் மற்றும் முக்கிய விவரங்களைக் குறிப்பிடுகின்ற நிரை, நிரல்களும் இரட்டைக் கோடுகளால் அல்லது தடித்த கோடுகளால் வரையப் பட வேண்டும்.

மாதிரி 1.

1971, 1972 ஆகிய ஆண்டுகளில் தமிழ்நாட்டின் ஏழு முக்கிய சந்தைகளில் 100 கிலோ கொண்ட ஒரு மூட்டை அரிசி, சோளம் ஆகியவற்றின் விலைகளைக் குறிப்பிடுவதற்கு ஏற்றவாறு ஒரு வெற்றுப் பட்டியல் தயார் செய்க.

தீர்வு :

முக்கிய சந்தைகளில் 1971, 1972 ஆண்டில் அரிசி, சோளம் ஆகியவற்றின் விலைகள்

சந்தை	100 கிலோ மூட்டை ஒன்றின் விலை (ரூபாயில்)			
	1971		1972	
	அரிசி	சோளம்	அரிசி	சோளம்
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

மாதிரி 2,

பால், மணம், கல்வி ஆகிய பண்புகளுக்கேற்ப சென்னையிலுள்ள ஒரு தொழில் நிறுவனத்தில் வேலை செய்கின்ற தொழிலாளர்களின் பரவலைக் காட்டக் கூடிய ஒரு வெற்றுப் பட்டியல் வரைக.

தீர்வு :

சென்னை............தொழில் நிறுவனத்திலுள்ள தொழிலாளர்களின் பட்டியல்

	ஆண்			பெண்			மொத்தம்		
	மணமானவர்	மணமாகாதவர்	மொத்தம்	மணமானவர்	மணமாகாதவர்	மொத்தம்	மணமானவர்	மணமாகாதவர்	மொத்தம்
படித்தவர்									
படிக்காதவர்									
மொத்தம்									

மாதிரி 3.

உடற்பயிற்சிக்கு ஒழுங்குபடுத்துவதற்காக மதுரையிலுள்ள ஓர் கல்லூரி மாணவர்களில் வயது, வகுப்பு, உறைவிடம் ஆகியவற்றிற்கேற்ப பாகுபாடுசெய்து காட்டக்கூடிய ஒரு வெற்றுப் பட்டியல் தயார் செய்க.

தீர்வு :

மதுரை.........கல்லூரி உடற்பயிற்சி மாணவர்களின்

	விடுதி மாணவர்			வெளி மாணவர்			மொத்தம்		
	18 வயது வரை	18-ம் அதற்கு மேலும்	மொத்தம்	18 வயது வரை	18-ம் அதற்கு மேலும்	மொத்தம்	18 வயது வரை	18-ம் அதற்கு மேலும்	மொத்தம்
புகுமுக வகுப்பு									
முதல் ஆண்டு									
2-ம் ஆண்டு									
3-ம் ஆண்டு									
மொத்தம்									

மாதிரி 4.

கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் குறிப்பிடுவதற்குப் பொருத்தமான தலைப்பும் பிரிவுகளும் அடங்கிய ஒரு பட்டியல் தயார் செய்க.

(அ) 1955-56ஆம் ஆண்டு முதல் 1960-61ஆம் ஆண்டு வரை கிழக்கு ஆப்பிரிக்கா, மத்திய கிழக்கு ஆசியா ஆகிய பணிகளுக்கு இந்தியாவிலிருந்து பருத்தித் துணிகளின் ஏற்றுமதி.

(ஆ) இப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஏற்றுமதியாகும் துணிகளின் தொகையும் மதிப்பும்.

(இ) ஒவ்வொரு வருட ஏற்றுமதியின் மொத்தத் தொகையும் மொத்த மதிப்பும்.

(மதுரை பி.காம். 1969 ஏப்ரல்)

தீர்வு :

இந்தியாவிலிருந்து பருத்தித் துணிகளின் ஏற்றுமதி

ஆண்டு	ஏற்றுமதியாகும் துணிகளின் தொகையளவு					ஏற்றுமதியாகும் துணிகளின் மதிப்பு				
	கிழக்கு ஆப்பிரிக்கா	மத்திய கிழக்கு ஆசியா	ஐரோப்பா	கிழக்கு ஆசியா	மொத்தம்	கிழக்கு ஆப்பிரிக்கா	மத்திய கிழக்கு ஆசியா	ஐரோப்பா	கிழக்கு ஆசியா	மொத்தம்
1955-56										
1956-57										
1957-58										
1958-59										
1959-60										
1960-61										

மாதிரி 5.

1951-ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகை மதிப்பீட்டில் **249** மில்லியன் பேர்கள் (இந்தியாவின் மொத்த மக்கள் தொகையாகிய 357 மில்லியனில்) விவசாயத்தில் ஈடுபட்டிருந்ததாகவும், அவர்களுள் நகர்ப்புறத்தில் காணப்பட்ட 9 மில்லியனைத் தவிர பெரும்பான்மையோர் நாட்டுப்புறங்களைச் சேர்ந்தவர்களென்றும் காணப்படுகிறது. விவசாயத்திலீடுபடாத மக்களுள் பாதிக்கும் சிறிது அதிகமானவர்கள் நாட்டுப்புறப் பகுதிகளிலேயே காணப்படுகிறார்கள். சரியாகச் சொன்னால் அவர்களின் எண்ணிக்கை சுமார் 55 மில்லியன்களாகும். மொத்தத்தில் சொந்தக்காலில் நிற்கின்ற 105 மில்லியன் பேர்களுள் 71 மில்லியன்பேர்கள் விவசாயத்தொழிலை நம்பிப் பிழைப்பவர்கள். ஆனால் அதிகச் சுமையுள்ள விவசாய உற்பத்தியாளர்களைச் சார்ந்து சுமார் 147 மில்லியன் வருமானமற்றோரும் விவசாயமல்லாத வருமானமுள்ளோரைச் சார்ந்து 67 மில்லியன் வருமானமற்றோரும் இருக்கிறார்களென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

மேலே காணப்படுகின்ற அறிக்கையை 'சொந்தக்காலில் நிற்பவர்', 'வருமானத்துடன் சார்ந்திருப்பவர்' 'வருமானமின்றி சார்ந்திருப்பவர்', 'மொத்தம்', 'நாட்டுப்புறம்', நகர்ப்புறம் என்ற ஆறு நிரல்களும் மூன்று நிரைகளும் கொண்ட பட்டியலில் அமைக்கவும். நிரைகள் 'விவசாயம்', 'விவசாயம் அல்லதாவர்', 'மொத்தம்', என்று குறிப்பிடபடவேண்டும். (சென்னை, பி.காம்., 1962 ஏப்.)

தீர்வு :

	சொந்தக் காலில் நிற்பவர்	வருமானத் துடன் சார்ந் திருப்பவர்	வருமான மின்றிச் சார்ந் திருப்பவர்	மொத்தம்	நாட்டுப்புறம்	நகர்ப்புறம்
விவசாயம்	71	31	147	249	240	9
விவசாயம் அல்லாதவர்	34	7	67	108	55	53
மொத்தம்	105	38	214	357	295	62

புள்ளிவிவர உறுப்பு: (Statistical item)

எண்களாலான விவரங்களடங்கியவைப் புள்ளி விவரங்களாகும். அப்புள்ளி விவரங்களுளடங்கிய ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரு புள்ளிவிவர உறுப்பு (Statistical item) எனப்படும். உதாரணமாக, 'மதுரைப் பல்கலைக் கழக அறிக்கையின் படி, பல்கலைக் கழகம் 1971 ஏப்ரல் மாதம் திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் நடத்திய பி.எஸ்ஸி கணிதம்-முதலாண்டு பட்டத் தேர்வில் தேறியவர்கள் 61% என்பது ஒருபுள்ளி விவரமாகும். இங்கு 61 என்பது இப்புள்ளி விவரத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எண்ணாகும். இது ஓர் புள்ளிவிவர உறுப்பு ஆகும். இவ்வுறுப்பினைப் பற்றிய முழு விளக்கமும் மிகவும் தெளிவாகக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய விளக்கத்தை அவ்வுறுப்பின் தலைப்பு எனலாம். ஆகவே, மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்தில் 61 என்ற உறுப்புக்கு ஒரு தலைப்பு உள்ளது. தவிர 61 என்பது சதவீத அலகுடன் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. மேலும் அவ்விவரத்தின் மூலாதாரம் (Source) மதுரைப் பல்கலைக் கழக அறிக்கை என்றும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு எல்லா விளக்கங்களுடனும் குறிப்பிடப்படுகின்ற ஓர்புள்ளி விவர எண்ணுக்குப் 'புள்ளி விவர உறுப்பு' (statistical item) என்று பெயர். ஆகவே, ஓர் புள்ளிவிவர உறுப்பு கீழ்க்கண்ட இயல்புகளுடன் அமைந்திருக்க வேண்டும்.

1. ஒவ்வொரு புள்ளிவிவர உறுப்பும் அதன் தன்மைகளையும், சிறப்பியல்புகளையும் பற்றிய விளக்கத்தைக் கொண்ட ஒரு தலைப்புடன் அமைந்திருக்கவேண்டும்.

2. ஒவ்வொரு புள்ளிவிவர உறுப்புடனும் அது அளவிடப்பட்டுள்ள அலகும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

3. புள்ளிவிவர உறுப்பு சேகரிக்கப்பட்ட மூலாதாரம் பற்றிய விளக்கம் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட மூன்று தன்மைகளையும் பெற்றிருக்கும் ஓர் புள்ளிவிவர எண்ணைப் புள்ளிவிவர உறுப்பு என்று சொல்லலாம். ஒரே தன்மைகளைப் பெற்ற பல புள்ளிவிவர உறுப்புக்களை ஒரே தலைப்பின் கீழ் அல்லது ஒரு பட்டியலில் அமைத்துக் குறிப்பிடலாம்.

(உ-ம்) மதுரைப்பல்கலைக் கழக அறிக்கையின்படி, திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் 1971 ஏப்ரலில் நடைபெற்ற

பி. ஏ. (இரண்டாம் ஆண்டு) பட்டத் தேர்வுகளில் தேறியவர்களின் விவரம்.

முக்கிய பாடம்	தேறியவர்கள்
வரலாறு	82%
அரசியல்	96%
சமூக அறிவியல்கள்	100%
பொருளாதாரம்	71%
பூகோளம்	94.4%
ஆங்கிலம்	74.3%

மேலே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் யாவும் புள்ளிவிவர உறுப்புக்களாகும்,

புள்ளிவிவரத் தொடர்: (Statistical Series)

ஒன்றுக்கொன்று ஏதாவதொரு தொடர்பு கொண்ட பல உறுப்புக்களடங்கிய ஒரு தொகுப்புக்குப் புள்ளி விவரத்தொடர் (Statistical Series) என்று பெயர். மேலே பட்டியலில் காணப்படுகின்ற 82, 96, 100, 71, 94.4, 74.3 என்ற உறுப்புக்கள் யாவும் 1971 ஏப்ரல் மாதத்திய மதுரைப் பல்கலைக்கழகத் தேர்வுகளில் பல்வேறு பாடங்களில் தேறியவர்களின் சதவீதங்களைக் குறிப்பிடுகின்றன வாகையால் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒப்பிடக் கூடியனவாயுள்ளன. ஆகவே, இவ்வெண்களடங்கிய தொகுப்பைப் புள்ளிவிவரத்தொடர் என்று சொல்லலாம். மேலும், இவ்வுறுப்புக்கள் யாவும் பல்வேறு பாடங்களுக் குரியனவாக வகுப்பாக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளன. ஆகவே புள்ளி விவரத் தொடரின் வரையறையைக் கீழ்க்கண்டவாறு திருத்திக் கூறலாம். ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பியல்புக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யக்கூடிய வகுப்பாக்க விதிகளின் மூலம் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பு கொண்ட பல உறுப்புக்கள் அடங்கிய ஒரு தொகுப்புக்குப் புள்ளி விவரத் தொடர் என்று பெயர்.

தொடர்களின் வகைகள்:

ஏதாவதொரு பண்பியல்புக்கேற்பப் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடருக்குப் ‘பண்பியல் தொடர்’ (categorical series) என்று பெயர் (உ-ம்) மதுரைப் பல்கலைக்கழகத் தேர்வுகளில் தேர்ச்சி பெற்றவர்களைப் பல்

வேறு பாடங்களுக்கேற்ப வகுப்பாக்கம் செய்யப்பட்ட ஒரு தொடர் பல்வேறு தொழில்களுக்கு ஏற்பப் பாகுபாடு செய்யப் பட்ட தினக்கூலி விகிதங்களடங்கிய தொடர், ஓர் குறிப்பிட்ட ஆண்டில் மாவட்ட வாரியாக பாகுபாடுசெய்யப்பட்ட மாவட்ட அரிசி உற்பத்திகளின் அளவுகளைக் கொண்ட ஓர் புள்ளி விவரத் தொடர் முதலியன. புள்ளிவிவர உறுப்புக்கள் அவற் றிற்குரிய காலங்களுக்கேற்பப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டிருந்தால் அப்புள்ளி விவர உறுப்புக்களடங்கிய ஒரு தொடருக்குக் காலம்சார் தொடர் (item series) என்று பெயர். (உ-ம்) பல்வேறு ஆண்டுகளில் தமிழ்நாட்டின் மக்கள்தொகைகளைக் கொண்ட தொடர்; ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஓர் குறிப்பிட்ட நாளில் பல்வேறு நேரங்களில் அளவிடப்பட்ட வெப்ப நிலைகளைக் கொண்ட தொடர், முதலியன பல்வேறு பரி மாணங்களில் கண்டறியப்பட்ட பொருட்களை அவற்றின் பல் வேறு வகை பரிமாணங்களுக்குக்கேற்ப பாகுபாடு செய்து ஒவ்வொருவகைப் பரிமாண வகுப்பிற்கும் எதிரே அவ்வகுப் பைச் சேர்ந்த பொருட்களின் எண்ணிக்கை எழுதப்பட்டு ஒரு பட்டியலமைப்பிலுள்ள ஓர் தொடருக்கு நிகழ்வெண் தொடர் (frequency series) என்று பெயர். ஒவ்வொரு பரிமாண வகுப் பிற்கும் எதிரே எழுதப்பட்டுள்ள அவ்வகுப்பைச் சேர்ந்த பொருட்களின் எண்ணிக்கைக்கு 'நிகழ்வெண்' (frequency) என்று பெயர். இத்தகைய பல்வேறு வகுப்புக்களையும் அவற்றிற் குரிய நிகழ்வெண்களையும் கொண்டமைந்த ஒரு பட்டியலுக்கு நிகழ்வெண் பட்டியல் அல்லது நிகழ்வுப் பட்டியல் (frequency table) என்று பெயர். உதாரணமாக, ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை அவர்கள் தேர்வில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண் களுக்கேற்றவாறு கீழ்க்கண்டவாறு பாகுபாடு செய்யலாம்.

மதிப்பெண்	மாணவர் எண்ணிக்கை
0-10	3
10-20	18
20-30	27
30-40	15
40-50	7
	70

வகுப்பிலுள்ள 70 மாணவர்களும் 0–10, 10-20, 20-30, 30-40 40-50 என்று பல்வேறு வகுப்புக்களைச் சார்ந்தவர்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளனர். 3, 18, 27, 15, 7 என்பன முறையே 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 ஆகிய வகுப்புக்களின் நிகழ்வெண்களாகும். இவ்வாறு ஒரு நிகழ்வுப் பட்டியலிலமைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் புள்ளிவிவரத்தொடருக்கு 'நிகழ்வெண் தொடர்' (frequency series) என்று பெயர். இத்தகைய புள்ளிவிவரத் தொடர்கள் தாம் புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு அடிப்படையாக அமைகின்றன. ஒன்று அல்லது பல புள்ளிவிவரத் தொடர்களிலுள்ள பல்வேறு உறுப்புக்களையும் ஒப்பிட்டு அவற்றின் ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளை ஆராய்வது புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கங்களுள் ஒன்ருகும்.

மாறி (Variable)

புள்ளியியலில், ஓர் புள்ளியியல் அளவு (statistical magnitude) பல்வேறு பரிமாணங்களைப் (sizes) பெற்று ஓர் புள்ளிவிவரத் தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களாகக் காட்சி யளிப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு பல்வேறு பரிமாணங்களில் காட்சியளிக்கக் கூடிய ஓர் அளவுக்கு 'மாறி' (variable) என்று பெயர். உதாரணமாக, ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள், அவர்களின் உயரங்களுக்கேற்ப பல இனங்களாகப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இத்தகைய பாகுபாட்டின் மூலம் கிடைக்கப்படுகின்ற புள்ளிவிவரத் தொடரில் 'உயரம்' என்பது மாறியாகும்; ஏனெனில், உயரம் என்பது மாணவனுக்கு மாணவன் மாறுபட்ட மதிப்பைப் பெறுகிறது. புள்ளியியலில் இருவகையான மாறிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவையாவன: (1) பண்பின மாறிகள், (2) அளவின மாறிகள்.

1. *பண்பின மாறிகள்* (Quantitative variables):

ஓர் புள்ளிவிவரத் தொடரிலுள்ள பல்வேறு உறுப்புக்களும் ஓர் குறிப்பிட்ட சிறப்பியல்பில் பல்வேறு பண்புகளால் மாறுபட்டிருந்தால் அச்சிறப்பியல்பு அப்பண்புகளைக் குறிப்பிடுகின்ற மாறியாகும். உதாரணமாக, ஓர் தொழில் நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களைப் 'பால்' என்ற சிறப்பியல்பின் கீழ் 'ஆண்', 'பெண்' என்ற பாகுபாடு செய்யலாம். இங்கு 'பால்' என்ற மாறியானது 'ஆண்', 'பெண்' என்ற இருபண்புகளைப் பெறுகிறது. இவ்வாறு பல்வேறு பண்புகளைப்

பெறுகின்ற ஒரு மாறி 'பண்பின மாறி' என்று அழைக்கப்படுகிறது.

2. *அளவின மாறிகள்* (Quantitative variables) :

ஒரு புள்ளிவிவரத் தொடரிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஏற்ப ஓர் எண்ணலான மதிப்பைப் பெறுகின்ற ஓர் மாறியானது 'அளவினமாறி' என்று அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணம் : ஓர் தொழில் நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் மாதவருமானம். இங்கு மாதவருமானம் என்பது அளவின மாறியாகும். ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் வயது : இங்கு வயது என்பது அளவின மாறியாகும் : ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ; இங்கு மதிப்பெண்கள் என்பது அளவின மாறியாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட பண்டத்தின் மாதாந்திர விலைகள் இங்கு விலை என்பது அளவின மாறியாகும். அளவின மாறி இருவகைப்படும். அவையாவன :

தனித்தனி மாறியும் தொடர் மாறியும் (Discrete variable and continuous variable) :

ஓர் அளவினமாறி பெறக்கூடிய மதிப்புக்கள் ஒன்றுக்கொன்று ஓர் குறிப்பிட்ட தொகை வித்தியாசத்தில்-அத்தொகை எவ்வளவு குறைந்த மதிப்புடையதாகவும் இருக்கலாம்-தனித்தனியாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தால் அது ஓர் தனித்தனி மாறி (discrete variable) என்று அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைக்குத் தக்கவாறு பாகுபாடு செய்யப்பட்ட ஒரு கிராமத்திலுள்ள குடும்பங்களைக் குறிக்கின்ற ஓர் புள்ளிவிவரத் தொடரில் 'ஒரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை என்ற மாறியானது 0, 1, 2, 3 என்ற மதிப்புக்களைப் பெறமுடியும். இம்மதிப்புக்களுள் ஏதாவது இரண்டு மதிப்புக்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் குறைந்தது 1 ஆகும். ஆகவே, இந்த மாறியின் மதிப்புக்கள் குறைந்தது ஒரு குழந்தை வித்தியாசத்தில் தனித்தனியாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே 'ஒரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை, என்பது ஒரு தனித்தனி மாறியாகும். இது போல். ஒரு செடியிலுள்ள காய்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு விற்பனை நிலையத்தில் ஒரு நாளில் விற்கப்பட்ட பேனாக்களின் எண்ணிக்கை, ஓர் கல்லூரியில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை முதலியன தனித்தனி மாறிகளா

கும். தனித்தனி மாறிகள் பெறுகின்ற மதிப்புக்கள் முழு எண் அலகுகளிலேயே (integral units) இருக்குமல்லாது பின்ன அலகு களில் இருக்க முடியாது.

ஒரு அளவின மாறியின் மதிப்புக்களை அளவிடுகின்ற அலகு எவ்வளவு சிறிய பின்ன அலகாகப் பிரிக்கப்பட்டாலும், அப் பின்ன அலகு மதிப்பை, அந்த மாறி பெறக்கூடியதாகயிருப் பின், அது ஒரு தொடர் மாறி (continuous variable) எனப்படும். ஆகவே, ஒரு தொடர்மாறியின் ஏதாவது இரண்டு மதிப்புக் களுக்கிடையே அந்த மாறியின் எத்தனை மதிப்புக்கள் வேண்டு மாயினும் இருக்க முடியும். உதாரணமாக, ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் உயரம் 50 அங்குலம் முதல் 70 அங்குலம் வரை இருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு உயரம் என்பது 50 முதல் 70 வரையுள்ள எண் மதிப்புக்களைப் பெறுவதால் உயரம் என்பது ஒரு அளவின மாறியாகும். மாணவர்களின் உயரங் கள் அங்குலத்திற்குத் திருத்தமாகக் கூறப்பட்டால், உயரம் என்ற மாறி பெறக்கூடிய மதிப்புக்கள் 50, 51, 52......70 ஆகும். ஆகவே, மாறி பெறுகின்ற மதிப்புக்களின் அலகு 1 அங்குலமாகும். ஆனல் மாணவர்களின் உயரங்களை .1″, .01″, .001″..... ஆகிய பின்ன அலகுகளுக்கும் திருத்தமாகக் கூறமுடி யும். மேலும், இரு மாணவர்களின் உயரங்கள் முறையே 54.57″, 54.58″ என்று மிகச்சிறிய வித்தியாசத்திலிருந்த போதி லும் அவர்களுக்கிடையே 54.571″, 54.572″...54.579″ என்ற உயரங்களில் பல மாணவர்கள் இருக்க முடியும். ஆகவே உயரம் என்பது ஒரு தொடர் மாறியாகும். ஆனல், உயரம் என்பது அங்குலத்தின் பின்னங்களாக அளவிடப்படாமல் அங்குலத்திற்குத் திருத்தமாகவே அளவிடப்படும்போது, உயரம் என்ற தொடர் மாறி 50″, 51″, 52″......என்ற முழு எண் மதிப்புக்களாகவே பெறுவதால், அது ஒரு தனித்தனி மாறி போலவே கருதப்படுகிறது. இதுபோன்று, ஒரு பொருளின் விலை எவ்வளவு சிறிய பின்னமதிப்பையும் பெறமுடியுமாகையால் அது ஒரு தொடர்மாறியாகும். ஆனல், அப்பொருளின் விலை யிலுள்ள ஏற்ற இறக்கம் முழு ரூபாயிலிருந்தால், விலை என்ற தொடர் மாறி ஒரு தனித்தனி மாறி போன்றே கருதப்படும். ஓர் இடத்தின் தினசரி வெப்பநிலை, ஓர் பிரசவ விடுதியில் பிறந்த குழந்தைகளின் எடை முதலியன தொடர்மாறிகளாகும்.

நிகழ்வெண் பரவல் (Frequency distribution):

ஒரு மாறியின் மதிப்புக்கள் மிகப்பெரிய எண்ணிக்கையி லிருந்தால், அவற்றைச் சுருக்கி, எல்லோரும் எளிதில் புரிந்து

கொள்ளக்கூடிய வகையில் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்ட வேண்டியது புள்ளியியல் ஆய்வாளரின் முக்கிய பணிகளுள் ஒன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களிலிருந்து அம்மாணவர்களின் தரத்தை நிர்ணயிக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம். இங்கு மதிப்பெண் என்பது மாறியாகும். இந்த மாறியின் 100 மதிப்புக்கள், 100 எண்களாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த 100 மதிப்பெண்களிலிருந்து மாணவர்களின் தரத்தை நிர்ணயிப்பது மிகவும் கடினமாகும். ஆகவே, 100 மாணவர்களையும் அவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களுக் கேற்பப் பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். உதாரணமாக, 10 மதிப்பெண்ணுக்குக் குறைவாகப் பெற்றவர்கள், 10 முதல் 25 வரை மதிப்பெண் பெற்றவர்கள், 25 முதல் 35 வரை பெற்ற வர்கள், 35 முதல் 40 வரை பெற்றவர்கள், 40 முதல் 50 வரை பெற்றவர்கள், 50 முதல் 60 வரை பெற்றவர்கள், 60 முதல் 75 வரை பெற்றவர்கள்: 75-ம் அதற்குமேலும் மதிப்பெண் பெற்ற வர்கள் என்று பல பிரிவுகளாகப் பிரித்துக் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு பட்டியலில் அமைக்கலாம்.

மதிப்பெண்	மாணவர் எண்ணிக்கை
10க்குக் கீழ்	4
10 முதல் 25 வரை	12
25 முதல் 35 வரை	18
35 முதல் 40 வரை	22
40 முதல் 50 வரை	27
50 முதல் 60 வரை	10
60 முதல் 75 வரை	5
75-ம் அதற்குமேலும்	2
மொத்தம்	100

இத்தகைய பாகுபாட்டின் மூலம் மாறியின் மதிப்புக்கள் எவ்வளவு பெரிய எண்ணிக்கையிலிருந்தாலும், மிகக் குறைந்த எண்ணிக்கையிலான பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்து பட்டிய லில் அமைக்க முடியும். இங்கு மாறியின் மதிப்புகளுக்கேற்ப பாகுபாடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும்.

மேற்கண்ட பட்டியலில் மொத்தம் 8 பிரிவுகள் (classes) இருப்பதைக் காணலாம். ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் எதிரில் அப்பிரிவைச் சேர்ந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பிரிவைச் சேர்ந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையானது அப்பிரிவின் 'நிகழ்வெண்' (frequency) எனப்படும். ஆகவே, 10க்குக் கீழ் என்ற முதல் பிரிவின் நிகழ்வெண் 4 ஆகும்; '10 முதல் 25 வரை' என்ற இரண்டாவது பிரிவின் நிகழ்வெண் 12 ஆகும். மேலும் ஒவ்வொரு மாணவனும் தான் பெற்ற மதிப்பெண்ணுக்கேற்ப ஏதாவதொரு பிரிவில் இடம் பெறுவதோடு, ஒரேயொரு பிரிவில்தான் இடம்பெற முடியும் என்ற வகையில் மேற்கண்ட பட்டியலில் பாகுபாடுகள் அமைந்துள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும். இவ்வாறு, மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் ஒரு பிரிவில் இடம்பெறுவதோடு, ஒரேயொரு பிரிவில்தான் இடம் பெறுகின்ற வகையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்டப் பிரிவுகளுக்கு 'ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற பிரிவுகள்' (mutually exclusive classes) என்று பெயர். இவ்வாறு, ஒரு மாறியின் மதிப்புக்கள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, அப்பிரிவுகளின் மதிப்புகளுக்கேற்ப ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையிலிருக்குமாறு ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் எதிரில் அப்பிரிவுக்குரிய நிகழ்வெண்ணுடன் அமைக்கப்பட்ட ஒரு பட்டியலுக்கு 'நிகழ்வெண் பரவல்' (frequency distribution) அல்லது நிகழ்வுப் பட்டியல் (frequency table) என்று பெயர். ஓர் நிகழ்வெண் பரவல் கீழ்க்காணும் இரண்டு சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(அ) நிகழ்வெண் பரவலிலுள்ள மாறியின் மதிப்புக்கள் யாவும் ஒரே நேரத்தில் பெறப்படுகின்றன. மேற்கண்ட உதாரணத்தில் மாறியின் 100 மதிப்புக்கள் யாவும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெற்ற ஒரு தேர்வில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும். இச்சிறப்பியல்பு ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை ஒரு காலத்தொடரினின்றும் வேறுபடுத்திக் காட்டுகின்றது; ஏனெனில் ஒரு காலத் தொடரில் மாறியின் மதிப்புக்கள் யாவும் வெவ்வேறு காலங்களில் பெறப்படுகின்றன.

(ஆ) ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் மாறியின் மதிப்புக்களுக்கேற்ப பாகுபாடுகள் செய்யப்படுகின்றன. ஆனால், ஒரு காலத் தொடரில் மாறியின் மதிப்புக்கள் பெறப்பட்ட காலங்களுக்கேற்ப பாகுபாடுகள் செய்யப்படுகின்றன. ஒரு பண்பினத் தொடரில் மாறியின் வெவ்வேறு பண்புகளுக்கேற்ப பாகுபாடுகள் செய்யப்படுகின்றன.

நிகழ்வெண் பட்டியலமைத்தல் (Construction of frequency table) :

நிகழ்வெண் பட்டியலமைக்கும் பணியினை இரண்டு கட்டங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(அ) பிரிவு இடைவெளிகளையும், பிரிவு எல்லைகளையும் நிர்ணயித்தல்.

(ஆ) ஒவ்வொரு பிரிவுக்கு உரிய நிகழ்வெண்களைப் பதிவு செய்தல்.

(அ) *பிரிவு இடைவெளிகளையும், பிரிவு எல்லைகளையும் நிர்ணயித்தல்.*

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறியின் மதிப்புக்களுள் மீப்பெரு (maximum) மதிப்புக்கும், மீச்சிறு (minimum) மதிப்புக்குமுள்ள வித்தியாசம் வீச்செல்லை (range) எனப்படும். ஒரு பிரிவில் மாறி பெறக்கூடிய மதிப்புக்களுள் மீப்பெரு மதிப்பு அப்பிரிவின் 'மேல் எல்லை' (upper limit) அல்லது 'மேல்பிரிவு எல்லை' (upper class limit) என்றும், மீச்சிறு மதிப்பு அப்பிரிவின் 'கீழ் எல்லை' (lower limit) அல்லது 'கீழ்ப்பிரிவு எல்லை' (Lower class limit) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை அவர்கள் பெற்ற மதிப்பு பெண்களுக்கேற்றவாறு 10–19, 20-29, 30-34, 35-39........என்று பல பிரிவுகளாகப் பிரித்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு 10–19 என்ற பிரிவின் கீழ்எல்லை 10 என்றும், மேல்எல்லை 19 என்றும் தோன்றும். ஆனால், மாணவர்கள் மதிப்பெண்கள் பின்ன மதிப்புக்களாக அளிக்கப்படாமல் முழு என் மதிப்புக்களுக்குத் திருத்தமாக அளிக்கப்பட்டிருப்பதால், 10-19 என்ற பிரிவில் 9.5ம் அதற்கு மேலும் ஆனால் 19.5க்குக் குறைவாயுமுள்ள மதிப்பெண்கள் யாவும் அடங்குகின்றன. ஆகவே, 10-19 என்ற பிரிவின் உண்மையான மேல்எல்லை (true upper limit) 19.5 ஆகும். உண்மையான கீழ்எல்லை (true upper limit) 9.5 ஆகும். இவ்விரு உண்மையான எல்லைகளுக்குமுள்ள வித்தியாசம் தான் அப்பிரிவின் உண்மையான பிரிவு இடைவெளி (true class interval) ஆகும். ஆகவே, 10-19 என்ற பிரிவின் உண்மையான பிரிவு இடைவெளி 19.5-9.5 = 10 ஆகும். பொதுவாக, பிரிவு இடைவெளி என்பது உண்மையான பிரிவு இடைவெளியையே குறிக்கப் பயன்படுவதால், ஒரு பிரிவின் இடை

வெளியை அப்பிரிவின் உண்மையான எல்லைகளின் வித்தியாசத்தின் மூலமே கணக்கிட வேண்டும். இதுபோல் 20-29 என்ற பிரிவின் எல்லைகள் 19.5, 29.5 ஆகும். ஆகவே, அப்பிரிவின் இடைவெளி 29.5-19.5 = 10 ஆகும். 30-34 என்ற பிரிவின் எல்லைகள் 29.5, 34.5 ஆகும். ஆகவே, அப்பிரிவின் இடைவெளி 34.5-29.5 = 5 ஆகும். மேலும் 19.5 என்ற உண்மையான மேல் எல்லையானது 9.5-19.5 என்ற பிரிவுக்கும் 19.5-29.5 என்ற பிரிவுக்கும் பொது எல்லையாக அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே 19.5 என்பது 9.5-19.5 என்ற பிரிவின் 'மேல் பொது எல்லை' (Upper common boundary or Simply upper boundary) என்றும் 19.5-29.5 என்ற பிரிவின் 'கீழ்ப் பொது எல்லை' (lower common boundary or simply lower boundary) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இதுபோல் 30-34 என்ற பிரிவின் கீழ்ப்பொது எல்லை 29.5 என்றும், மேல் பொது எல்லை 34.5 என்றும் காணலாம். ஆகவே, ஒரு பிரிவின் பிரிவு இடைவெளி என்பது அப்பிரிவின் மேல் பொது எல்லைக்கும், கீழ்ப் பொது எல்லைக்குமுள்ள வித்தியாசம் என்று அறியப்படுகிறது. மேலும், ஒரு பிரிவின் பிரிவு இடைவெளியை அப்பிரிவின்கீழ் எல்லைக்கும், அதற்கு அடுத்த பிரிவின்கீழ் எல்லைக்குமுள்ள வித்தியாசத்தினின்றும் கணக்கிடலாம். ஒரு பிரிவின் கீழ் எல்லைக்கும் மேல் எல்லைக்கும் (அல்லது கீழ்ப்பொது எல்லைக்கும் மேல் பொது எல்லைக்கும்) மத்தியிலுள்ள மதிப்பு அப்பிரிவின் நடு மதிப்பு அல்லது மையமதிப்பு (mid-value) எனப்படும். 10-19, 20-29, 30-34, 35-39 ஆகிய பிரிவுகளின் நடு மதிப்புக்கள் முறையே 14.5, 24.5, 32, 37 ஆகும்.

சம அசம இடைவெளி நிகழ்வெண் பரவல்கள்:

பொதுவாக, ஒரு நிகழ்வெண்பரவலிலுள்ள எல்லாப் பிரிவுகளின் இடைவெளிகளும் சமமாக இருக்குமாறே நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கப்படுகின்றது. ஆயினும், ஏதாவது ஒரு பிரிவிலுள்ள உறுப்புக்களைப் பற்றிய விவரங்கள் இன்னும் தெளிவாக வேண்டப்படின், அப்பிரிவைக் குறுகிய இடைவெளிகளுடன் கூடிய இரண்டு அல்லது மூன்று சிறு பிரிவுகளாகப் பிரித்துக் காட்டுவதும் உண்டு. உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைக் காட்டக்கூடிய ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவுகள் 0-9, 10-19, 20-29, 30-39, 40-49, 50-59, 60-69 என்று ஒரே சீராக சம இடைவெளிகளில் அமைக்கப்படலாம். இத்தகைய ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு 'சம இடைவெளி நிகழ்வெண் பரவல்' (frequeney distribution

with equal inverval) அல்லது 'சீரான பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவல்' (frequency distribution with uniform class intervals) என்று பெயர்.

ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களுள் பின்தங்கிய மாணவர்களுக்கு மட்டும் தனிப் பயிற்சியளிப்பதால் தகுந்த பலன் ஏற்படுமா, ஏற்படாதா என்ற ஆய்வுக்காக ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும் போது சில குறிப்பிட்ட பிரிவுகளுக்கு மட்டும் அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படலாம்; இன்னும் சில பிரிவுகள் தேவையற்றுப் போகலாம். உதாரணமாக, மாதிரித் தேர்வில் 20 மதிப்பெண்ணுக்குக் குறைவாகப் பெற்றவர்களுக்குத் தனிப் பயிற்சியளிப்பதால் எவ்விதப் பலனும் ஏற்படாதென்று கருதினுல் 0 முதல் 19 வரை மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களை ஒரே பிரிவில் சேர்த்துக் கொள்ளலாம். இதுபோல், 20 முதல் 29 வரை மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் தனிப்பயிற்சியின் மூலம் ஓரளவு பலனடையலாம் என்று கருதினுல் அவர்களை 20-29 என்ற பிரிவிலும், 30 முதல் 34 வரை மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் தனிப்பயிற்சியின் மூலம் நிச்சயமாகத் தேர்ச்சி பெறக்கூடும் என்று கருதினுல் அவர்களை 30-34 என்ற பிரிவிலும் சேர்த்துக் கொள்ளலாம். இன்னும் இதுபோன்று ஆய்வின் நோக்கத்திற்கேற்றவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்துக் கொள்ளலாம். அதாவது, மேற்கண்ட ஆய்வுக்கான நிகழ்வெண் பரவலை 0-19, 20-29, 30-34, 35-39, 40-49, 50-59, 60-க்கு மேல் என்ற அசம இடைவெளிகளையுடைய பிரிவுகளுடன் அமைத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறு அசம இடைவெளிகளுடன் அமையப் பெற்ற ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு 'அசம இடைவெளி நிகழ்வெண் பரவல்' (frequency distribution with unequal intervals) அல்லது 'சீரற்ற பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவல்' (frequency distribution with non-uniform class intervals) என்று பெயர். ஆகவே ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும்போது அப்பரவல் எந்த ஆய்வுக்காகத் தயாரிக்கப்படுகிறதென்பதைக் கருத்திற்கொள்ள வேண்டியதவசியம். ஆயினும் சம இடைவெளி நிகழ்வெண் பரவல்களே பகுப்பாய்வுக்கும், கணக்கீடுகளுக்கும் எளிதாகயிருக்கு மாகையால் பெரும்பாலான நிகழ்வெண் பரவல்கள் சம இடைவெளிகளிலேயே அமைக்கப்படுகின்றன.

பிரிவு இடைவெளியின் பரிமாணத்தை (size) நிர்ணயிக்கும் போது கீழ்க்காணும் நான்கு முக்கிய குறிப்புக்களைக் கருத்திற் கொள்ள வேண்டும்.

1. வீச்செல்லை (range)
2. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை
3. பிரிவு எல்லைகளின் நிலைகள்
4. நடுமதிப்புக்களின் பிரதிநிதித்துவத் தன்மை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் வீச்செல்லையும், நிகழ்வெண் பரவலில் இருக்கவேண்டிய பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையும் சேர்ந்து பிரிவு இடைவெளியின் பரிமாணத்தை நிர்ணயிக்கின்றன. சில முக்கிய விதிவிலக்குகளிருந்த போதிலும், பொதுவாக ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலுள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 10க்குக் குறையாமலும், 25க்கு மிகைப்படாமலுமிருக்க வேண்டுமென்று கருதப்படுகிறது. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 10க்குக் குறைவாகயிருந்தால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் மிக அதிகமாகச் சுருக்கப்பட்டிருப்பதால், பரவல் தெளிவில்லாமலிருப்பதோடு, அப்பரவலை ஆராய்ந்து பெறப்படும் முடிவுகளும் சரியானவையாக இருக்கமாட்டா. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 25க்கும் அதிகமாகயிருந்தால், நிகழ்வெண் புரவல் சீர்படாவிவரங்களைப் (raw data) போன்றே மிக விரிவானதாகயிருப்பதோடு, அப்பரவலைப்புள்ளியியல் முறைப்படிக் கணக்கிட்டு ஆராய்வது கடினமாகிவிடும். ஆகவே. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை மிகக்குறைவாகயில்லாதவாறும், மிக அதிகமாகயில்லாதவாறும் நிர்ணயித்துக்கொள்ளவேண்டும். பின்னர் வீச்செல்லையைப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பிரிவு இடைவெளியின் பரிமாணத்தைத் தோராயமாகப் பெறலாம். ஆகவே, வீச்செல்லை பெரியதாகயிருந்தால் பிரிவு இடைவெளியும் பெரியதாகயிருக்கும், வீச்செல்லை சிறியதாகயிருந்தால் பிரிவு இடைவெளியும் சிறியதாகவேயிருக்கும்.

பிரிவு இடைவெளிகள் முழு எண்களாகவும், 2, 5, 10, 20, 50, போன்ற முழு எண்களாகவோ அல்லது இவற்றின் மடங்குகளாகவோ இருந்தால் நிகழ்வெண் பரவல் பகுப்பாய்வுக்கு மிகவும் எளிதானதாகயிருக்கும். பிரிவு இடைவெளிகள் பின்ன மதிப்புக்களிலிருந்தால் அவை .1, .2, .5, .75, .8. என்றோ அல்லது .01, .02, .05, .08, என்றோ அல்லது அவற்றின் மடங்குகளாகவோ இருப்பது நல்லது.

சில ஆய்வுகளில் நிகழ்வெண் பரவலிலுள்ள பல்வேறு பிரிவுகளின் நடு மதிப்புக்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றனவாகையால் ஆய்வின் வெற்றிக்குப் பிரிவுகளின் நடு மதிப்புக்களின்

பொருத்தமான அமைப்புக்களும் காரணமாகின்றன. இத்தகைய ஆய்வுகளில், ஒரு பிரிவிலுள்ள நடுமதிப்பு அப்பிரிவைச் சேர்ந்த எல்லா உறுப்புக்களின் மதிப்பாகப் பயன்படுகின்றது. ஆகவே, ஒரு பிரிவின் நடுமதிப்பு அப்பிரிவைச் சேர்ந்த எல்லா உறுப்புக்களின் பிரதிநித்துவ மதிப்பாகயிருக்குமாறு (representative value) பிரிவு இடைவெளியையும், அப்பிரிவின் எல்லைகளையும் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். சிலவகையான விரைங்களுக்கு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும்போது, மிகக் குறைந்த நிகழ்வெண்களுடன் கூடிய பல பிரிவுகள் பரவலின் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் அமைக்கப்பட நேரிடலாம். உதாரணமாக, ஒரு தொழில் நிறுவனத்தைச் சேர்ந்த 500 தொழிலாளர்களின் மாத வருமானம் பற்றிய நிகழ்வெண் பரவலில் பெரும்பாலானவர்களின் மாதவருமானம் ரூ 80 முதல் 180 வரையும்; ரூ 80 க்குக் கீழே வருமானமுள்ளவர்கள் :- ரூ 60 முதல் ரூ 70 வரை 3, 30 முதல் 40 வரை 2, என்றும், ரூ 180க்கு மேலே வருமானமுள்ளவர்கள் :- ரூ 180 முதல் 200 வரை 3, 250 முதல் 300 வரை 2, 400 முதல் 450 வரை 1 என்றும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு, பெரும்பான்மையோர் ரூ 80 முதல் ரூ 180 வரை வருமானமுள்ளோராகயிருப்பதால் ரூ 10ஐப் பிரிவு இடைவெளியாகக் கொண்டு 80-89, 90-99, 170-179 என்று பிரிவுகள் அமைப்பதே பொருத்தமாகயிருக்கும். ஆனல், தொடக்கத்திலும் இறுதியிலுமுள்ள மதிப்புக்களையும் இதே இடைவெளியில் பாடுபாடு செய்தால் 30-49, 40-49, என்று தொடங்கி 440-449 வரை பிரிவுகள் செய்ய வேண்டும். மொத்தப் பிரிகளின் எண்ணிக்கை 40க்கு மேலாகி விடுவதால் புள்ளியியல் ஆய்வுக்குப் பொருத்தமாகயிராது. இடைவெளியை ரூ. 40 என்று பெரிதாக எடுத்துக் கொண்டால் ரூ 80 முதல் 180 வரை வருமானமுள்ள பெரும்பான்மையோர் 3 பிரிவுகளில் அடக்கப்பட்டுவிடுவதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரம் மிகவும் சுருக்கப்பட்டு விடுகிறது. ஆகவே, ரூ 80க்குக் கீழே வருமானமுள்ள 5 தொழிலாளர்களையும் 'ரூ 80க்குக் கீழ்' என்ற முதற் பிரிவிலும், ரூ 180க்கு மேல் வருமானமுள்ள 6 தொழிலாளர்களையும் 'ரூ 180ம் அதற்கு மேலும்' என்ற இறுதிப் பிரிவிலும் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும். இத்தகைய நிகழ்வெண் பரவல்களில் முனைப் பிரிவுகள் (extreme classes) திட்டவட்டமான எல்லைகளின்றிருப்பதால் இவைகள் 'திரந்த முனைப்பிரிவுகள்' (open end classes) என்று அழைக்கப்படுகின்றன, இத்தகைய திறந்த முனைப்பிரிவுகளைக்

கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்குத் 'திறந்த முனை நிகழ்வெண் பரவல்' (Open end frequency distribution) என்று பெயர்.

(ஆ) பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களைப் பதிவு செய்தல் :-

நிகழ்வெண்பரவலுக்குரிய பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை, பிரிவு இடைவெளி, இடைவெளி எல்லைகள் யாவற்றையும் நிர்ணயித்தபின், பிரிவுகள், கணிப்புக்குறிகள் (tally marks), நிகழ்வெண் ஆகிய மூன்று நிரல்களடங்கிய ஓர் கணிப்புத்தாள் (tally Sheet) ஒன்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பிரிவுகள்	கணிப்புக்குறிகள்	நிகழ்வெண்
0 – 9	‖	2
10 – 19	𝍸 |	6
20 – 29	𝍸 𝍸 |||	13
30 – 39	𝍸 |	6
......	....	...
......	....	...
மொத்தம்		...

பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்களை ஒவ்வொன்றாகக் கவனித்து, அம்மதிப்புக்குரிய பிரிவுக்கு நேர் ஒரு கணிப்புக் குறியிட வேண்டும் ஒரே பிரிவிலிடப்படுகின்ற முதல் நான்கு குறிகள் அடுத்தடுத்து வரிசையாகவும், ஐந்தாவது குறி அந்த நான்கு குறிகளுக்கும் குறுக்காகப் பட்டியலில் காட்டப் பட்டிருப்பது போலிட வேண்டும். பின்னர் அதே பிரிவில் இடப்படுகின்ற ஆறுவது குறி சிறிது இடைவெளி விட்டு இடப் பட வேண்டும். இவ்வாறு ஐந்து குறிகள் சேர்ந்த தொகுதி களாகக் குறிகள் இடப்படுவதால் எண்ணுவதற்குச் சுலபமாக யிருக்கும். எல்லா உறுப்புக்களுக்குரிய கணிப்புக்குறிகளும் இடப்பட்டபின் ஒவ்வொரு பிரிவுக்குமுரிய கணிப்புக்குறிகள் எண்ணப்பட்டு, அப்பிரிவுக்கு நேர் நிகழ்வெண் நிரலில் எழுதப் படவேண்டும். இவ்வாறு கணிப்புத்தாளை நிரப்பியபின் 'பிரிவுகள்', 'நிகழ்வெண்', ஆகிய இரு நிரல்களைக்கொண்ட

நிகழ்வெண் பரவலைத் தயாரிக்கலாம். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலுள்ள பிரிவுகளை மூன்று வகையாகக் குறிப்பிடலாம். (1) கணிப்புத்தாளில் உள்ளதுபோல் 0-9, 10-19, 20-29, போன்ற பிரிவு எல்லைகளாகக் குறிப்பிடலாம். அல்லது (2) –0 5–9.5, 9.5–19.5 19.5-29.5 போன்ற பிரிவுப் பொது எல்லைகளால் குறிப்பிடலாம். அல்லது (3) 4.5, 14.5, 24.5 போன்ற நடு மதிப்புக்களால் குறிப்பிடலாம். இம்மூன்று வகைகளுக்கேற்ப மூன்றுவகையான நிகழ்வெண் பரவல்கள் கிடைக்கின்றன. இவற்றுள் முதல்வகை நிகழ்வெண் பரவல் ஆய்வுக்குப் பயன்படுவதில்லை. மற்ற இரண்டுவகைப் பரவல்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு வகையில் ஆய்வுக்குப் பயன்படுகின்றன. கீழ்க்காணும் மாதிரிக் கணக்கிலிருந்து நிகழ்வெண் பரவல் தயாரிக்கும் முறை நன்கு விளங்கும்.

மாதிரி 6.

ஒரு அரசாங்க அலுவலகத்தைச் சேர்ந்த 52 ஊழியர்களின் வயதுகளைக் கொடுக்கின்ற பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளியெடுத்து ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கவும்.

67,	34,	36,	48,	49,	31,	61,	34,	43,	45,	38,
32,	27,	61.	29,	47,	36,	50,	46,	30,	46,	32,
30,	33,	45,	49,	48,	41,	53,	36,	37,	47,	47,
30,	46,	50,	28,	35,	35,	38,	36,	46,	43,	34,
62,	69,	50,	28,	44,	43,	60,	39.			

(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

தீர்வு.

மீப்பெரு வயது = 69

மீச்சிறு வயது = 27

வீச்செல்லை = 42

ஆகவே, பிரிவு இடைவெளியை 5வயது எனக்கொண்டால் 9 பிரிவுகளிருக்கும். எனவே பரவலின் பிரிவுகளை 25-29, 30-34, 35-39, என அமைக்கலாம்.

52 அரசாங்க ஊழியர்களுடைய வயதுகளின் பரவல்.

வயது	கணிப்புக் குறிகள்	நிகழ்வெண்
25 – 29	IIII	4
30 – 34	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
35 – 39	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
40 – 44	~~IIII~~	5
45 – 49	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
50 – 54	IIII	4
55 – 59		0
60 – 64	IIII	4
65 – 69	II	2
மொத்தம்		52

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் மற்ற இரு அமைப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

வயது	நீகழ் வெண்
24.5 - 29.5	4
29.5 - 34.5	10
34.5 - 39.5	10
39.5 - 44.5	5
44.5 - 49.5	13
49.5 - 54.5	4
54.5 - 59.5	0
59.5 - 64.5	4
64.5 - 69.5	2
மொத்தம்	52

வயது	நிகழ் வெண்
27	4
32	10
37	10
42	5
47	13
52	4
57	0
62	4
67	2
மொத்தம்	52

மாதிரி 7 :

ஒரு புள்ளியியல் தேர்வில் 82 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொருத்தமான இடைவெளியுடன் ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கவும்.

57, 64, 58, 51, 64, 96, 78, 28, 94, 79, 44,
66, 83, 88, 56, 48, 54, 90, 33, 8, 72, 20,
17, 80, 20, 55, 38, 38, 75, 51, 70, 100, 73,
64, 52, 33, 84, 60, 0, 69, 57, 64, 50, 66,
20, 30, 61, 18, 34, 28, 36, 46, 63, 7, 54,
58, 30, 38, 45, 58, 22, 34, 48, 47, 53, 100,
20, 10, 14, 38, 37, 24, 36, 4, 0, 50, 48,
0, 34, 0, 34.

தீர்வு.

மீப்பெரு மதிப்பெண்	100
மீச்சிறு மதிப்பெண்	0
வீச்செல்லை	100

ஆகவே, பிரிவு இடைவெளியை 10 மதிப்பெண்ணுகைக் கொண்டால் 10 பிரிவுகள் இருக்கும். ஆகவே, பிரிவுகளை 0-9, 10-19, 20-29 என்று கொள்ளலாம். இறுதிப் பிரிவு 90-99 ஆகும். ஆனால் இரண்டு 100 மதிப்பெண்கள் உள்ளன. இருப்பினும் இவைகளை 90-99 என்ற இறுதிப் பிரிவிலேயே சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டுமேயன்றி அவைகளுக்கென்று 100-109 என்ற பிரிவை அமைக்கக்கூடாது. ஏனெனில் 100க்கு மேற்பட்ட மதிப்புக்களை மதிப்பெண் என்ற மாறி பெறமுடியாது.

மதிப்பெண்	கணிப்புக் குறிகள்	நிகழ்வெண்
0-9		7
10-19		4
20-29		9
30-39		15
40-49		7
50-59		15
60-69		10
70-79		6
80-89		4
90-99		5
மொத்தம்		82

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் மற்ற இரு அமைப்புக்கள் வருமாறு.

மதிப்பெண்	நிகழ் வெண்	மதிப்பெண்	நிகழ் வெண்
—.5 - 9.5	7	4.5	7
9.5 - 19.5	4	14.5	4
19.5 - 29.5	9	24.5	9
29.5 - 39.5	15	34.5	15
39.5 - 49.5	7	44.5	7
49.5 - 59.5	15	54.5	15
59.5 - 69.5	10	64.5	10
69.5 - 79.5	6	74.5	6
79.5 - 89.5	4	84.5	4
89.5 - 99.5		94.5	5
மொத்தம்	82	மொத்தம்	82

வினாத்தாள் 3

1. விவரங்களின் வகுப்பாக்கம் என்றால் என்ன? வகுப்பாக்கம் செய்யும் முறையினை விளக்குக.

2. விவரங்களை வகுப்பாக்கம் செய்ய வேண்டிய அவசியம் யாது? வகுப்பாக்கம் செய்யும்போது கவனிக்க வேண்டிய விதிகளைக் கூறுக.

3. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை வகுப்பாக்கம் செய்யும் முறை யாது? பல்வேறு வகையான வகுப்பாக்க முறைகளை விளக்குக.

4. பட்டியலமைத்தல் என்றால் என்ன? பட்டியலமைத்தலின் நோக்கம் என்ன?

5. கண்டறியப்பட்ட விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்யும் முறையினை விளக்குக. அவைகளைப் பட்டியலமைக்கும் போது என்ன விதிகளைக் கருத்திற்கொள்ள வேண்டும்? எவ்வகைப்பட்டியல்கள் பொதுவாகப் பயன்பட்டு வருகின்றன.

(சென்னை பி.காம். 1962 செப்., 1965 செப்.)

6. புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு, பட்டியலமைத்தல் ஆகியவை பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக.

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

7. ஒரு ஆய்வுக்கான திட்டத்தில் பட்டியலமைத்தலின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

(மதுரை பி.காம். 1966 செப்.)

8. பட்டியலமைத்தலின் முக்கிய பணிகள் யாவை? பட்டியலமைக்கும்போது நீங்கள் எடுத்துக்கொள்ளும் முன்னெச்சரிக்கைகளைக் குறிப்பிடுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

9. புள்ளியியல் விவரங்களைப் பட்டியலமைக்கத் துணை புரியும் விதிமுறைகளைக் கூறுக.

(சென்னை பி.காம். 1961 செப்.)

10. பொதுநோக்கு, தனிநோக்கு பட்டியல்களின் வேறு பாடுகளை விவரிக்கவும்.

11. புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்க வினாப்பட்டியல்கள் விடுத்துப் பெறப்படும் பதில்களை எப்படிப் பாகுபடுத்தி திருத்தியமைத்து, பட்டியலமைப்பிடுவது என்பதைப் படிப்படியாக விளக்குக. (இருபக்கங்களுக்கு மேற் படாமல்) (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

12. நிகழ்வுப்பட்டியல் என்றால் என்ன ? இத்தகைய ஒரு பட்டியலைத் தயாரிக்கும்போது கவனிக்க வேண்டிய பல்வேறு குறிப்புக்களையும் ஆராய்க.

(சென்னை பி.காம். 1963 செப்.)

13. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய வீச்செல்லை, பிரிவு எல்லைகள், நடு மதிப்புக்கள் ஆகியவற்றின் வரையறை களைக் கூறுக. பிரிவு இடைவெளியை நிர்ணயிக்கும் போது கவனிக்க வேண்டியவை யாவை ?

14. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலினால் நீவிர் அறிவது யாது என்பதை விளக்குக. அதை அமைக்கும்போது கவனிக்க வேண்டிய அடிப்படைக் கொள்கைகளைக் குறிப்பிடுக. (மதுரை பி ஏ. 1970 ஏப்.)

15. சிறு குறிப்பு வரைக :

(அ) பட்டியலமைத்தல் (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1962. ஏப்., பி.காம். 1965 ஏப்.)

(ஆ) வகுப்பாக்கமும் பட்டியலமைத்தலும் (மதுரை (பி. காம்., 1970 செப்.)

(இ) பல்பண்பு வகுப்பாக்கம் (மதுரை பி. எஸ்ஸி(1971 செப்)

(ஈ) பிரிவு இடைவெளிகள் தேர்ந்தெடுத்தல்

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்

(உ) தனித்தனி மாறியும் தொடர் மாறியும்

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1968 செப். மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 ஏப்)

பயிற்சி 1

1. இரண்டு வெவ்வேறு நாட்களில் ஐந்து தொழில் நிறுவனங்களில் ஆண்கள், பெண்கள், 8வயதும் அதற்குமேல் 18வயதுக்குள், 18வயதுக்குமேல் ஆகிய நான்கு வகுப்புக்களின் சராசரி ஊதியங்களைக்காட்டக் கூடிய ஒரு வெற்றுப்பட்டியலை வரைக.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1966 செப்)

2. ஒரு தோழிற்சாலையிலுள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை மதம், நான்கு வகையான வயதுத் தொகுப்புக்கள் (four age-groups), பால், பயிற்சித்திறன் ஆகியவற்றிற்கேற்ப பாகுபடுத்திக் காட்டுவதற்கு ஓர் வெற்றுப்பட்டியல் தயார் செய்க.

3. கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் காட்ட ஒரு பட்டியல் வரைக.

(அ) பால்

(ஆ) மூன்று தரங்கள் (மேற்பார்வையாளர், உதவி யாளர், எழுத்தர்)

(இ) ஆண்டுகள் 1970, 1972

(ஈ) வயதுத் தொகுப்புகள்—18வயதும் அதற்குக் கீழும் 18வயதுக்குமேல் 55க்குள் 55 வயதுக்கு மேல்

4. பால், நான்கு மதங்கள், ஐந்து வயதுத் தொகுப்புக்கள் ஆகியவற்றிற்கேற்ப தமிழ்நாட்டின் ஏழு முக்கிய நகரங்களிலுள்ள மக்களின் பரவலைக் காட்ட ஒரு வெற்றுப்பட்டியல் வரைக.

5. இந்தியாவிலுள்ள ஒரு மாநிலத்திலுள்ள மக்களின் கல்வியறவு பற்றிய ஓர் கணக்கெடுப்பில். "மொத்த முள்ள 17, 65, 910 மக்கள் தொகையில் நகர்ப்புறங் களில் காணப்பட்ட 7,22,195, பேர்களைத் தவிர பெரும்பான்மையோர் நாட்டுப்புறங்களில் வாழ்ந்தார் கள் என்று காணப்பட்டது. நாட்டுப்புற மக்களுள்

பாதிக்குக் கொஞ்சம் குறைவானவர்கள் ஆண்கள்; அவர்கள் எண்ணிக்கை 5,01,237. அவர்களுள் 1,87,648 பேர் கற்றவர்கள். மொத்தத்தில் 10,95,884 பேர் கல்லாதவர்; அவர்களுள் 4,66,656 பேர் ஆண்கள். படித்த பெண்களின் எண்ணிக்கை 2,67,356 என்று காணப்பட்டது; அவர்களுள் 7,19,245 பேர் நாட்டுப்புறங்களில் வாழ்ந்து வந்தார்கள். மேலேயுள்ள அறிக்கையை ஆண்கள், பெண்கள் ஆகிய ஒவ்வொரு வகுப்புக்கும் கற்றவர், கல்லாதவர், மொத்தம் ஆகிய மூன்று நிரல்களும், மொத்தக் கூட்டலுக்காக ஏழாவது நிரலும் கொண்ட ஒரு பட்டியலிலமைக்கவும். நிரல்கள் நாட்டுப்புறம், நகர்ப்புறம், மொத்தம் ஆகியவற்றைக் குறிக்க வேண்டும்.

6. ஒரே குடும்பத்தில் வாழ்ந்துவரும் சயரோகத்தால் பாதிக்கப்பட்டவர்களுள் குளிர் - சளிக்காய்ச்சலால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் பற்றி செய்தித்தாளில் காணப்பட்ட அறிக்கையொன்றில் கீழ்க்காணும் குறிப்புக் காணப்பட்டது.

"10,000 பேர்களுள் சரியாக ஐந்திலொரு பகுதியினரிடம் சயரோகத்திற்கான அடையாளம் தெரிந்தது. அவர்களுள் 5,000க்குக் குறையாதவர்கள் குளிர்-சளிக் காய்ச்சலாலும் பாதிக்கப்பட்டிருந்தனர். ஆனால் அவர்களுள் 1,000 பேரே பாதிக்கப்படாத வீடுகளில் வாழ்ந்து வந்தனர். இதற்கு நேர்மாறாக, குளிர் சளிக் காய்ச்சலால் பாதிக்கப்படாமல் சயரோகத்தால் பாதிக்கப்படட்டவர்களுள் பதினைந்தில் ஒரு பகுதியினரே இன்னும் குளிர் சளிக்காய்ச்சலால் பாதிக்கப்பட்டும் நிலையிலிருந்தனர். மொத்தத்தில் 21,000 பேர் குளிர் சளிக்காய்ச்சலால் பாதிக்கப்பட்டிருந்தனர்; 41,000 பேர் பாதிக்கப்படும் ஆபத்திலிருந்தனர். ஆனால், குளிர் சளிக்காய்ச்சலால் பாதிக்கப்பட்டும், சயரோகத்தால் பாதிக்கப்படாமலும் குளிர் சளிக்காய்ச்சலால் பாதிக்கப்பட்ட வேறு சான்றுகளில்லாத வீடுகளில் வாழ்ந்து வருபவர்களின் எண்ணிக்கை 2,000 மட்டுமே.

மேற்கண்ட அறிக்கையை 'பாதிக்கப்பட்ட வீடுகள்' 'பாதிக்கப்படாத வீடுகள்' என்ற இருநிரல்களை ஒவ்வொன்றிலும் கொண்ட 'குளிர் சளிக்காய்ச்சலுள்ள',

'குளிர் சளிக்காய்ச்சலில்லாத' என்ற நிரல்களும், மொத்தத்தைக் குறிக்கின்ற ஐந்தாவது நிரலும் கொண்ட ஒரு பட்டியலில் அமைக்கவும். நிரைகள் 'சயரோகம் உள்ளது' 'சயரோகம் இல்லை', 'மொத்தம்' ஆகியவற்றைக் குறிக்க வேண்டும்.

7. 30 கல்லூரி மாணவர்களின் எடைகள் ராத்தலில் **(in pounds)** கொடுக்கப்பட்டுள்ள கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கவும்.

132, 104, 166, 143, 134, 129, 119, 108, 151, 111, 122, 121, 148, 144, 139, 114. 155, 138, 131, 124, 157, 130, 182, 132, 136, 145, 142, 126, 135, 147. (சென்னை பி.காம். 1960, ஏப்.)

8. ஒரு கூறிலுள்ள 50 ஆப்பிள் பழங்களின் எடைகள் கிராமில் **(in grams)** கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

106, 107, 76, 82, 109, 107, 115, 93, 187, 95, 123, 125, 111, 92, 82, 70, 126, 68, 130, 129, 139, 119, 115, 128, 100, 186, 84, 99, 113, 204, 111, 141, 136, 123, 90, 115, 98, 110, 78, 90, 107, 81, 131, 75, 84, 104, 110, 80, 118, 82.

மாறியின் வீச்செல்லையை 20 கிராம் சம இடைவெளியுடன் கூடிய பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்து ஒரு நிகழ்வெண் பரவலமைக்கவும்.

9. 1966–ஆம் ஆண்டில் 60 சரக்குகளின் விலை சார்புக் குறியீட்டெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொருத்தமான இடைவெளியுடன் ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் தயாரிக்கவும்.

76, 79, 81, 86, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 96, 97, 99, 99, 99, 100, 101, 101, 100, 102, 104, 104, 104, 105, 105, 106, 106, 106, 107, 108, 109, 109, 109, 108, 110, 110, 111, 112, 113, 114, 114, 115, 116, 116, 117, 118, 119, 120, 117, 121, 122, 123, 124, 125, 128, 129, 134.

10. 100 விற்பனையாளர்களின் விற்பனைக் குறியீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளியுடன் ஒரு நிகழ்வெண் பரவலமைக்கவும்.

50, 124, 174, 225, 221, 133, 141, 158, 125,
67, 71, 88, 168, 176, 187, 124, 90, 96,
105, 114, 133, 177, 215, 125, 176, 155, 165
121, 231, 248, 254, 135, 184, 192, 218, 253,
275, 283, 297, 231, 251, 276, 298, 251, 251,
304, 340, 370, 240, 76, 91, 126, 112, 138,
156, 176, 130, 137, 144, 147, 197, 214, 224,
293, 151, 157, 116, 165, 245, 254, 267, 276,
177, 188, 192, 195, 238, 297. 245, 261, 190,
201, 228, 231, 311, 281, 281, 363, 244, 254,
276, 294, 218, 276, 299, 254, 296, 348, 96,
114, 165.

4. விளக்கப்படங்கள்

(DIAGRAMS)

புள்ளிவிவர ஆய்வுக்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஒரே எண் குவியலாகத் தோன்றுமாகையால், அவற்றினின்றும் எதுவுமே அறிந்து கொள்ள முடியாது. ஆகவே, ஆய்வுப் பணிகளுள் முதன்மையான, முக்கியமான பணியாக சேகரிக்கப் பட்ட விவரங்கள் யாவும் வகுப்பாக்கம் பெய்யப்பட்டுப் பட்டியல்களிலமைக்கப்படுகின்றன. இதன் மூலம் குவியல் களாகயிருந்த விவரங்கள் யாவும் மிகவும் சுருக்கப்பட்டு சுருக்க மான பட்டியல்களில் ஒழுங்காக வரிசைப்படுத்தப்படுவதால், விவரங்களைப்பற்றிய தன்மைகளை ஓரளவு புரிந்துகொள்ள முடிகிறது. இருப்பினும் புள்ளிவிவர ஆய்வுக்கு இத்தகைய வகுப்பாக்கமும். பட்டியலிலமைத்தலும் போதுமானதெனக் கூறமுடியாது. ஆகவே, வகுப்பாக்கப் செய்யப்பட்டுப் பட்டியல்களிலமைக்கப்பட்ட விவரங்கள் யாவும் எண் கணிதப் பகுப்பாய்வின் (arithmetic analysis) மூலம் பல்வேறு புள்ளியியல் சூத்திரங்களையும் முறைகளையும் பயன்படுத்தி, புள்ளியியல் மாறிலிகள் (statistical constants) ஒன்று சொல்லப்படுகின்ற சுருக்கமான விளக்க எண்களாக (summary descriptive numbers) மாற்றப்படுகின்றன. இப்புள்ளியியல் மாறிலிகளின் மூலம்தான் ஆய்வின் இறுதிமுடிவுகள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய மாறிலிகளுள் முக்கியமானவை, சராசரிகள் (averages), பரவுகைக் கெழுக்கள் (Coefficients of dispersion), கோட்டக் கெழுக்கள் (Coefficients of skewness), தட்டை அளவுகள் (measures of kurtosis), ஒட்டுறவுக்கெழு (Coefficient of correlation) தொடர்புக்கெழு (coefficient of association), குறியிட்டெண்கள், முதலியனவாகும். இவைத்தவிர, தொடகபுச்சமன்பாடுகள் (regression lines), போக்குக் கோடு (line of trend) முதலியனவும் ஆய்வுக்குப் பெரிதும் பயன்படக்கூடியவையாகும். ஆகவே,

இவைகளைக் கணக்கிடுவதே புள்ளியியல் ஆய்வுப் பணிகளுள் பெரும் பணியாக அமைகின்றது. இவையாவற்றையும் கணக்கிடும் முறைகள் ஒவ்வொன்ருக அடுத்து வரும் அத்தியாயங்களில் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால், ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்கு மேற்கூறப்பட்ட எல்லாமுறைகளையும் பயன்படுத்த வேண்டிய அவசியமிருக்காது. ஆய்வின் நோக்கத்தையும், ஆய்வுக்காகச் சேகரிக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் தன்மைகளையும் பொறுத்து மேற்கூறப்பட்ட புள்ளியியல் மாறிலிகளுள் தேவையானவற்றை மட்டுமே கணக்கிட்டால் போதும். ஆகவே, புள்ளியியல் ஆய்வுக்குத் தேவையான புள்ளியியல் மாறிலிகளையும் கணக்கீட்டு முறைகளையும் நிர்ணயிப்பது புள்ளியியல் ஆய்வின் மற்ருெரு பணியாகிறது. பட்டியல் படுத்தப்பட்ட விவரங்களை விளக்கப் படங்களாகக் (diagrams) குறிப்பிடுவதன் மூலம் இப்பணியை மேற்கொள்ள முடியும். இத்தகைய விளக்கப் படங்கள் ஆய்வுக்குப் பயன்படக்கூடிய புள்ளியியல் மாறிலிகளையும், கணக்கீட்டு முறைகளையும் நிர்ணப்பதோடன்றி, ஆய்வின் தன்மை பற்றியும் இறுதி முடிவுகள் பற்றிய விளக்கத்தையும் தோராயமாகப் புரிந்து கொள்ள உதவியாகயிருக்கின்றன. புள்ளிவிவரங்களைப் பற்றிய முக்கியமானத் தன்மைகளையும் பல்வேறு புள்ளிவிவரத் தொடர்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் புள்ளிவிவர விளக்கப்படங்களைப் பார்த்தமாத்திரத்திலேயே எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

விளக்கப்பட வகைக் குறிப்பின் நன்மைகள் (Advantages of diagrammatic representation) :

1. விளக்கப் படங்கள் பார்ப்பவரின் கவனத்தை மிகவும் அதிசயிக்கத் தக்க முறையில் கவர்ந்து இழுப்பதோடு, முறையில் கவர்ந்து இழுப்பதோடு, பார்ப்பவர் மனதை விட்டு எளிதில் அகற்ற முடியாதவாறு மிகவும் ஆழமாகப் பதிந்து விடுகின்றன.

2. மிகவும் சிக்கலான விவரங்களையும் பாமர மக்களும் மிக எளிதில் தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ளும் வண்ணம் விளக்கப் படங்களின் மூலம் குறிப்பிட முடியும்.

3. நீண்ட பல பக்கங்களில் அமையப்பெற்ற புள்ளி விவரங்களைச் சிரமத்துடன் பல மணி நேரங்கள் செலவிட்டு வாசித்துப் புரிந்து கொள்வதை அவ்விவரங்களைப் பற்றிய

விளக்கப் படங்களின் மூலம் எளிதில் புரிந்துகொள்ள முடியு மாதலால் நேரமும், சக்தியும் மிஞ்சுகிறது.

4. ஒரு புள்ளிவிவரத் தொடரின் உட்பிரிவுகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்புகளையும், ஒவ்வொரு உட்பிரிவுக்கும், முழுத் தொடருக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பையும் விளக்கப் படத்தின் மூலம் எளிதில், தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

5. ஒரு தொடர்மாறியின் பல்வேறு மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு நீண்ட காலம் சார் தொடரின் போக்கை வரைபட முறையினால் நன்கு அறிந்துகொள்ள முடியும்.

6. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிவிவரத் தொடர்களின் தன்மைகளை ஒப்பிட விளக்கப்படங்கள் பெரிதும் பயன்படு கின்றன.

7. இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவை நிர்ணயிக்க விளக்கப் படங்கள் மிகவும் பயன்படுகின்றன.

8. புள்ளிவிவரத் தொடர்களின் வருங்காலப் போக்குகளை யும், மாறுதல்களையும் மதிப்பிட விளக்கப் படங்கள் பயன்படு கின்றன.

9. புள்ளிவிவரத் தொடர்களின் வளர் நிகழ்வெண் வரை களின் (Cumulative Prequency curves) மூலம் இடைநிலையளவு (median) முகட்டளவு (mode), கால்மங்கள் (quartiles), பதின்மங் கள் (deciles), நூற்றுமானங்கள் (Percentiles), ஆகிய புள்ளியில் மாறிலிகளைக் காண முடியும்.

விளக்கப்பட வகைக் குறிப்பின் தீமைகள் (Disadvantages of diagrammatic representation) :

1. பட்டியலிலமைத்துக் காட்டக் கூடிய அளவு அதிக மான எண்ணிக்கையிலான விவரத் தொகுப்புக்களை விளக்கப் படங்களின் மூலம் காட்டமுடியாது.

2. எண் விவரங்களின் சரியான பிரதியீடுகளாக விளக்கப் படங்களைக் கொள்ள முடியாது.

3. பட்டியல்களில் சரியான மதிப்புக்களைக் குறிப்பிட முடி யும்; ஆனால் விளக்கப் படங்களின் மூலம் தோராய மதிப்புக் களையே குறிப்பிட முடியும்.

4. படங்களின் மூலம் எந்த ஒரு கருத்தும் சரியென்றோ அல்லது தவறென்றோ நிரூபிக்க முடியாது.

5. விளக்கப் படங்களின் மூலம் மேற்கொண்டு ஆய்வு செய்ய முடியாது.

6. விளக்கப்படங்களின் மூலம் பெறப்படுகின்ற கருத்துக்களைச் சரியான முடிவுகளாகக் கொள்ள முடியாது.

7. விளக்கப் படங்கள் வரைய சிறிது திறமையும், நேரமும் தேவைப்படும்.

8. தவறாக வரையப்பட்ட படங்களின் மூலம் தவறான கருத்துக்களையே பெறமுடியும். விவரங்களுக்குப் பொருத்த மற்ற விளக்கப்படங்களும் தவறான கருத்துக்களையே பிரதி பலிக்குமாகையால், விளம்பரதாரர்களும், அரசியல்வாதிகளும், தங்களுடைய தவறான கருத்துக்களை வலியுறுத்திக்காட்ட விளக்கப் படங்களைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

விளக்கப் படங்கள் வரைவதற்கான பொது விதிகள் :

1. விளக்கப் படத்தின் நோக்கம் திட்டமாகத் தீர் மானிக்கப்பட வேண்டும்.

2. விளக்கப் படத்தின் வகை, பரிமாணம், அமைப்பு முதலியவற்றை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

3. விளக்கப்பட விவரங்களின் அளவுகளுக்கேற்றவாறு அளவுகோல் விகிதங்களை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

4. அளவுகளைக் குறிக்கின்ற அச்சுக்கள் தெளிவாகத் தெரிகிற மாதிரி அச்சுக்கோடுகளை அழுத்தமாக வரைய வேண்டும்.

5. கிடையளவு கோலில் (horizontal axis) அளவுக் குறிகள் இடமிருந்து வலமாகவும், நிலைக்குத்து அளவுகோலில் அளவுக்குறிகள் கீழிருந்து மேலாகவும் குறிக்கப்பட வேண்டும்.

6. நிலைக்குத்து அச்சில் அளவுக்குறிகள் கூடுமானவரை பூச்சியத்திலிருந்து தொடங்கப்பட வேண்டும். காலம் சார் தொடர் வரிசைகளைக் குறிக்கின்ற வரைப்படங்களில் மட்டும், பூச்சியத்திலிருந்து தொடங்க முடியாவிடில் வேறு பொருத்த மான அளவுக்குறியிலிருந்து தொடங்கலாம்.

7. கிடையச்சு, நிலைகுத்து அச்சு ஆகிய ஒவ்வொன்றும் குறிப்பிடுகின்ற மாறியைப் பற்றிய விவரம் அதற்குரிய அச்சை யொட்டி மிகத் தெளிவாகக் குறிப்பிடவேண்டும்.

8. அச்சுகளில் குறிக்கப்படுகின்ற அளவுக்குறிகள் மிகத் தெளிவாகவும் கூடுமானவரை முழு எண்களாகவும் குறிக்கப் பட வேண்டும்.

9. ஒப்பிடப்படவேண்டிய உறுப்புக்கள் அடுத்தடுத்து இருக்குமாறு அவற்றிக்குறிய படங்கள் வரையப்பட வேண்டும்.

10. வரைப்படங்களில் குறிக்கப்படுகின்ற புள்ளிகள் தெளி வாகத் தெரிகிற மாதிரி படத்தைப் பெரிய அளவில் வரைய வேண்டும்.

11. வரைப்படங்களில் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளைச் சுத்தமாகவும், தெளிவாகவும் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும். தொடர்ச்சியான தொடராக (continuous series) யிருப்பின் மெல் லிய வளைவினாலும், தனித்தனித் தொடராக (discrete series) யிருப்பின் நேர்கோடுகளாலும் புள்ளிகளை இணைக்கவேண்டும்.

12. எவ்வகைப் படமாகயிருப்பினும் முதலில் பென்சில் (pencil) கொண்டுதான் வரைய வேண்டும். ஆய்வுக்குப் பயன் படக்கூடிய படங்கள் பென்சிலினாலேயே வரையப்பட்டிருக்க வேண்டும். வெளியிடுவதற்குறிய படமாயின் மையினால் வரையப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

13. படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள உறுப்புகள் சிறு கூறு களாக (Components) பிரிக்கப்பட்டிருப்பின், அக்கூறுகள் பற் றிய விளக்கங்களைத் தனியாகக் குறிப்பிட வேண்டு.

14. படத்தின் தலைப்பு மிகத் தெளிவாகவும், சுருக்கமாக வும், முழுமையாகவும் பெரிய எழுத்துகளில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

15, கூடுமானவரை படத்தின் தலைப்பு படத்தின் உச்சி யிலேயே குறிப்பிடபட வேண்டும்.

விளக்கப்பட வகைகள் :

புள்ளி விவர ஆய்வுக்கேற்றவாறு பலவகையான விளக்கப் படங்கள் வரையப்படுகின்றன. அவற்றுள் முக்கியமானவை ;

(1) பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar diagrams) (2) செவ்வக விளக்கப்படங்கள் (Rectangular diagrams) (3) சதுர விளக்கப் படங்கள் (Square diagrams) (4) வட்ட விளக்கப்படங்கள் (Pie diagrams), (5) உருவக விளக்கப்படங்கள் (Pictograms), (6) புள்ளி விடக்கப்படங்கள் (Dot-diagrams), (7) பரவல் செவ் வகங்கள் (Histograms), (8) நிகழ்வுப் பலகோணங்கள் (Frequency polygons), (9) நிகழ்வெண் வரைகள் (Frequency curves), (10) வளர் நிகழ்வரைகள் (Cumulative frequency curves), (11) காலம் சார் தொடர்களின் வரைகள் (Graphs of time series), (12) மடக்கைவரைகள் (logarithmis graphs). இவற்றுள் காலம் சார் தொடர்களின் வரைகள் பற்றியும், மடக்கை வரைகள் பற்றியும் "காலம்சார் தொடர்கள்" என்ற அத்தியாயத்தில் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன.

1. பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar diagrams) :

விளக்கப்படங்களுள் பட்டை விளக்கப்படம்தான் விளக் கப்படங்களின் பொதுவான நோக்கங்களைத் திருப்திப்படுத்துவ தும், நடைமுறை சாத்தியமானதும், எளிதில் வரையக்கூடியது மாகும். எத்தகைய விவரமாயினும் பட்டை விளக்கப்படத்தின் மூலம் குறிப்பிட முடியும். ஆயினும் பண்பின் விவரங்களுக்கே இவ்வகைப் படங்கள் பொருத்தமானதாக கருதப்படுகின்றன. பல்வேறு இனத்தொகுதிகளில் காணப்படுகின்ற ஒரே பண்பின் அளவுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இந்த பட்டை விளக்கப்படங் கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. உதாரணமாக, பல்வேறு கல்லூரிகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வில் தேர்ச்சி பெற்ற மாண வர்களின் எண்ணிக்கைகளை ஒப்பிட பட்டை விளக்கப்படங் களைப் பயன்படுத்தலாம்.

பட்டை விளக்கப்படங்கள் வரைதலுக்கான விதிகள் :

1. கிடைப்பட்டைகளாக (horizontal bars) யிருப்பினும் அல்லது நிலைக்குத்துப் பட்டைகளாக (vertical bars) யிருப்பினும் எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரு பொதுவான அடிக்கோட்டிலிருந்தே தொடங்கி வரையப்பட வேண்டும்.

2. எல்லாப் பட்டைகளும் சம அகலமுடையவையாக யிருக்க வேண்டும்.

3. அடுத்தடுத்த இரண்டு பட்டைகளுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி ஒரே சீராக யிருக்க வேண்டும்.

4. பட்டைகளின் நீளங்கள் குறிக்கின்ற அளவுகளின் அளவுகோல்கள் தெளிவாகக் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

கிடைப்பட்டை விளக்கப்படத்தின் உச்சியிலும், நிலைக்குத்துப் பட்டை விளக்கப்படத்தின் இடப்பக்க ஓரத்திலும் அளவு கோல்கள் பூச்சியத்திலிருந்து தொடங்கி குறிப்பிடப்பட வேண்டும். தேவையானால், இந்த அளவு கோலுக்கு எதிர்பக்கத்திலும் மற்றுமொரு அளவுகோலைக் குறிக்கலாம். இவ்வாறு இரு அளவு கோல்கள் குறிப்பிடப்படுவதால், பட்டைகளின் நீளங்கள் குறிப்பிடுகின்ற உண்மை மதிப்புகளை சிரமமின்றி எளிதில் வாசிக்க முடியும்.

5. அளவுக் குறிகள் கூடுமானவரை முழு எண்களாகவே குறிப்பிடவேண்டும்.

6. அளவு கோல்கள் குறிப்பிடுகின்ற அலகுகள் அந்த அளவு கோல்களையொட்டி தெளிவாக எழுதப்படவேண்டும், நிலைக்குத்து அளவு கோலின் உச்சியில் இடமிருந்து வலமாகவும், கிடையளவு கோலின் இடப்பக்க ஓரத்தில் இடமிருந்து வலமாகவும் அலகுகளை எழுதுவதே சிறந்த முறையாகும்.

7. அளவுகோல்களின் அளவுக்குறிகளின் வழியே பட்டைகளின் பின்புறம் செல்வதுபோல் தோன்றும் வண்ணம் புள்ளிக் கோடுகளான துணைக்கோடுகள் (guide lines) வரைவதன் மூலம் பட்டைகளின் அளவுகளையும், பட்டைக் கூறுகளின் அளவுகளையும் அளவு கோலிலிருந்து எளிதில் வாசித்தறியலாம்.

8. பட்டைகளின் விளக்கக் குறிப்புகளைத் தெளிவாக எழுத வேண்டும். கிடைப்பட்டைகளின் குறிப்புகள் பட்டைகளின் இடப்பக்கங்களிலும் நிலைக்குத்துப் பட்டைகள் பற்றிய குறிப்புக்கள் பட்டைகளின் அடியிலும் எழுதப்பட வேண்டும்.

9. பட்டைகள் பல கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், பட்டைகளின் ஒத்த கூறுகள் யாவும் ஒரே மாதிரியான நிறத்தால் அல்லது புள்ளிகளால் அல்லது கோடுகளால் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். இவ்வாறு குறிப்பிடுகின்ற நிறம் அல்லது புள்ளிகள் அல்லது கோடுகள் ஆகியவற்றின் விளக்கக் குறிப்புக்கள் தனியாகவோ, அல்லது கூறுகளின் உட்புறமாகவோ கொடுக்கப்படவேண்டும்.

10. பட்டைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்கேற்ப ஏறு வரிசையில் அல்லது அவற்றிக்குரிய கால வரிசையில் அமைக்கப்படவேண்டும்.

பட்டை விளக்கப்படங்களின் வகைகள்:

(அ) தனிப்பட்டை விளக்கப்படம் **(Simple bar diagram)** *:*

புள்ளியியல் விளக்கப் படங்களுள் தனிப்பட்டை விளக்கப் படம்தான் மிகவும் எளிதானதாகும். சம அகலத்துடன் கூடிய

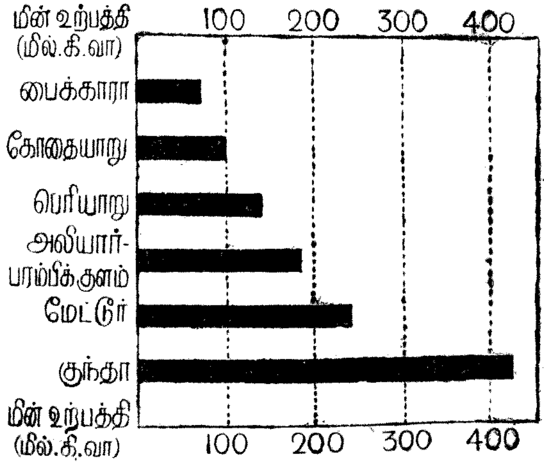
பல பட்டைகளைக் கொண்ட இப்படத்தில் எல்லா பட்டைகளும் கிடையாகவோ அல்லது நிலைக்குத்தாகவோ அமைந்திருக்கும். இப்பட்டைகளின் நீளங்களின் விகிதங்கள் அவை குறிப்பிடு கின்ற மாறிகளின் மதிப்புக்களின் விகிதங்களுக்குச் சமமாயிருக் கும். எல்லாப்பட்டைகளும் சம இடைவெளிகளில் அமைந் திருக்கும். இத்தகைய விளக்கப்படத்திற்குத் தனிப்பட்டை விளக்கப்படம் என்று பெயர். கிடைப்பட்டைகளைக் கொண்ட விளக்கப்படத்திற்குக் "கிடைப்பட்டை விளக்கப்படம்" **(horizontal bar diagram)** என்றும், நிலைக்குத்துப் பட்டைகளைக் கொண்ட விளக்கப்படத்திற்கு "நிலைக்குத்துப்பட்டை விளக் கப்படம்" **(Vertical bar diagram)** என்றும் பெயர்.

மாதிரி 8 :

1971-ஆம் ஆண்டில் தமிழ்நாட்டின் பல்வேறு நீர்மின் உற்பத்தி நிலையங்களில் உற்பத்தியான மின்சார அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கிடைப்பட்டை விளக்கப்படம் வரைந்து காட்டுக.

மின் நிலையம்		1971-இல் மின் உற்பத்தி அளவு (மில்லியன் வாட்)
குந்தா	...	425
மேட்டூர்	...	240
அலியார் பரம்பிக்குளம்	...	185
பைக்காரா	...	70
பெரியாறு	...	140
கோதையாறு	...	100

தீர்வு : *1971-ல் தமிழ்நாட்டின் மின் உற்பத்தி.*



படம் 1.

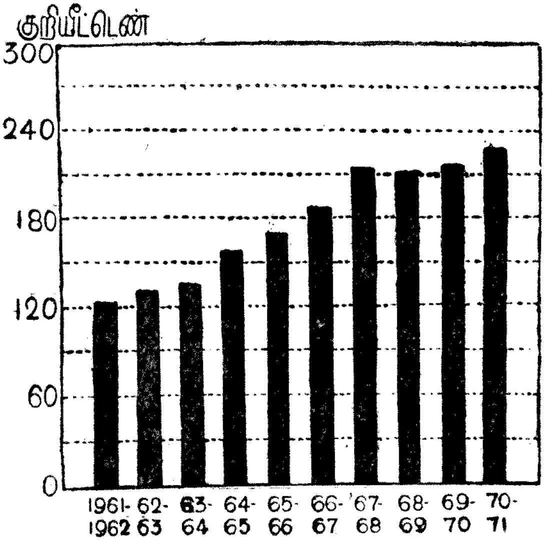
மாதிரி 9 :

1949–ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1961-62 முதல் 1970-71 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் இந்தியாவின் வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவ்விவரங்களை நிலைக்குத்துப்பட்டை விளக்கப் படத்தின் மூலம் குறிப்பிடுக.

ஆண்டு	வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண் (1949 = 100)
1961-62	123
1962-63	130
1963-64	133
1964-65	156
1965-66	168
1966-67	187
1967-68	214
1968-69	210
1969-70	216
1970-71	229

தீர்வு :

இந்தியாவின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள்
(1949 = 100)



படம் 2.

கூறுபட்டை விளக்கப் படம் (Component bar diagram) :

கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புக்கள் பல கூறுகளாகப் **(Components)** பிரிக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த மாறிகளைக் குறிப் பிடுகின்ற பட்டைகளும் அவற்றின் கூறுகளின் மதிப்புகளுக் கேற்க பல கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். எல்லாப் பட்டைகளிலும் ஒரே தன்மையைக் குறிப்பிடுகின்ற ஒத்த கூறு பிரிவுகள் யாவும் ஒரே நிறத்தால் அல்லது ஒரே மாதிரியான புள்ளிகளால் அல்லது கோடுகளால் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். இவ்வாறு எல்லாப் பட்டைகளும் பல்வேறு உட்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பின்னர், பல்வேறு பட்டைகளைப் பற்றிய விளக்கக் குறிப்புக்கள் தனியே கொடுக்கப்பட வேண்டும் இத் தகைய விளக்கப்படத்திற்குக் கூறுபட்டை விளக்கப்படம் **(Component bar diagram)** என்று பெயர்.

மாதிரி 10 :

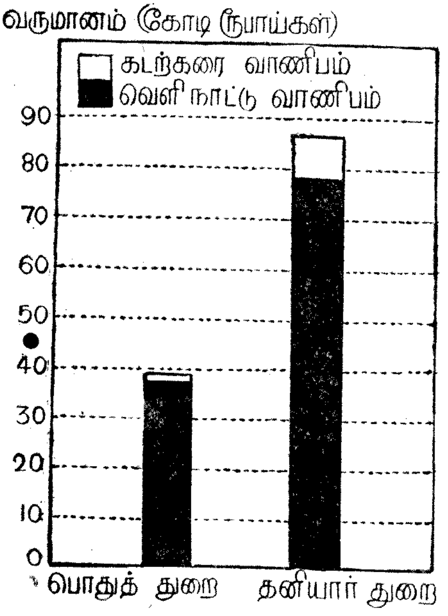
பின்வரும் பட்டியல் விவரங்களைக் கூறுபட்டை விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டுக.

1969-70ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் கடல் வாணிப வருமானம்

	வருமானம் (கோடி ரூபாய்கள்)	
	பொதுத் துறை	தனியார் துறை
அயல்நாட்டு வாணிபம்	37.68	75.31
கடற்கரை வாணிபம்	0.75	11.02
மொத்தம்	38.43	86.33

தீர்வு :

1969-70 இந்தியாவின் கடல் வாணிப வருமானம்



படம் 3.

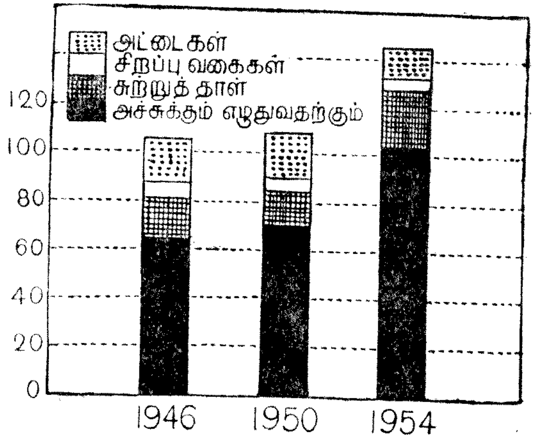
மாதிரி 11 :

இந்தியாவில் சில வருடங்களில் தாள் உற்பத்தி (ஆயிரம் டண்களுக்குத் திருத்தமாக) கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. பல்வேறு கூறுகளையும் எடுத்துக்காட்டுமாறு ஒரு பட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

	உற்பத்தி (1000 டன்களில்)		
	1946	1950	1954
அச்சுக்கும் எழுதுவதற்கும்	65	70	108
சுற்றுத்தாள்	16	15	14
சிறப்பு வகைகள்	7	5	5
அட்டைகள்	18	19	18
மொத்தம்	106	109	145

(சென்னை பி.காம்., 1960 ஏப்.

தீர்வு :



படம் 4.

(இ) *சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம்* **(Percentage bar diagram) :**

ஒவ்வொரு மாறியின் பல்வேறு கூறுகளின் மதிப்புக்களும் அந்த மாறியின் மொத்த மதிப்பின் சதவீத மதிப்புக்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், எல்லா மாறிகளுக்குமுரிய பட்டைகளும் சம நீளமுள்ளவையாக வரையப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு மாறியின் கூறு மதிப்புக்களின் சதவீத மதிப்புக்களுக்கேற்றவாறு அதற்குரிய பட்டையும் பலகூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். எல்லாப் பட்டைகளிலுமுள்ள ஒரே இனக் கூறுகள் யாவும் ஒரே நிறத்தில் அல்லது ஒரே மாதிரியான புள்ளிகள் அல்லது கோடுகளால் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். இத்தகைய படங்களிலிருந்து பல்வேறு கூறுகளின் விகிதங்களையும் எளிதில் அறிந்துகொள்ள முடிகிறது. இம்மாதிரியான படத்திற்குச் 'சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம்' **(Percentage bar diagram)** என்று பெயர்.

மாதிரி 12 :

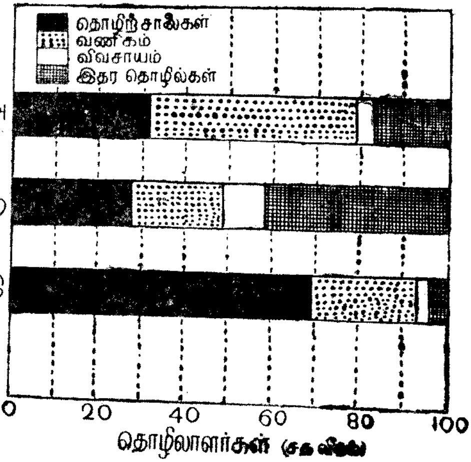
அ, ஆ, இ, என்ற வெவ்வேறு பகுதிகளில் வெவ்வேறு தொழில்களில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்கள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு பொருத்தமான படவிளக்கக் குறிப்பு தருக

	அ	ஆ	இ
தொழிற்சாலைகள்	31.5	27.5	69.0
வணிகம்	47.7	21.1	28.7

விவசாயம்	3.6	9.0	3.2
இதர தொழில்கள்	17.2	42.4	4.1

(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :



படம் 5.

மாதிரி 13 :

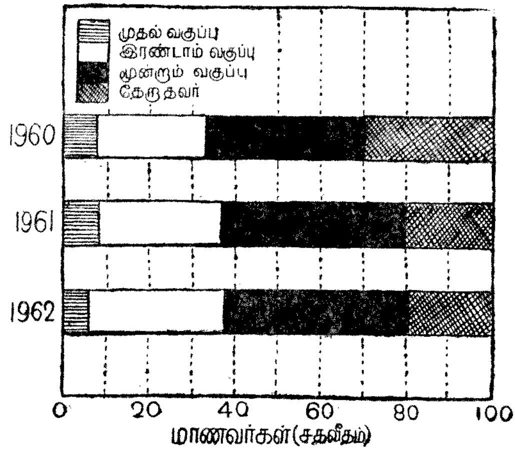
ஒரு பல்கலைக் கழகம் மூன்று ஆண்டுகளில் நடத்திய பி.காம். பட்டத்தேர்வின் முடிவுகள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விவரங்களை ஒரு சதவீத விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

மாணவர் எண்ணிக்கை

ஆண்டு	முதல் வகுப்பு	இரண்டாம் வகுப்பு	மூன்றும் வகுப்பு	தேருதவர்	மொத்தம்
1960	50	150	250	150	600
1961	60	200	300	140	700
1962	50	250	350	150	800

தீர்வு :

பி. காம். பட்டத் தேர்வு முடிவுகள்



படம் 6.

(ஈ) **கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Compound bar diagrams):**

ஒவ்வொரு மாறியின் இரு வேறுபட்ட தன்மைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டுமாயின், ஒவ்வொரு தன்மைக்கும் ஒரு பட்டை வீதம் ஒவ்வொரு மாறியும் இரண்டு பட்டைகளுடன் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். உதாரணமாக, 1969, 1970, 1971-ஆகிய வருடங்களில் தமிழ் நாட்டில் ஆண்கள் பிறப்பு வீதங்களையும், பெண்கள் பிறப்பு வீதங்களையும் விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டவேண்டுமாயின் ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ஆண்கள் பிறப்பு வீதத்தைக் குறிப்பிட ஒரு பட்டையும், பெண்கள் பிறப்பு வீதத்தைக் குறிப்பிட மற்ருெரு பட்டையும் வரையப் படவேண்டும்- இவ்விரண்டு பட்டைகளும் ஒன்றையொன்று ஒட்டினாற் போல் வரையப்பட வேண்டும். இத்தகைய விளக்கப் படத்தில் மாறிகளாகிய 1969, 1970, 1971 ஆகிய ஆண்டுகளில் ஒவ்வொன்றிற்கும் இரு பட்டைகள் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஒவ்வோரு மாறியும் இரு பட்டைகளின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்ற விளக்கப்படத்திற்கு இரட்டைப் பட்டை விளக்கப்படம் (double bar diagram) என்று பெயர். ஒவ்வொரு மாறியும் மூன்று பட்டைகளின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்ற விளக்கப் படத்திற்கு மூன்று பட்டை விளக்கப்படம் அல்லது முப்பட்டை விளக்கப்படம் (triple bar diagram) என்று

பெயர். பொதுவாக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பட்டைகளுடன் ஒவ்வொரு மாறியும் குறிப்பிடப்படுகின்ற ஒரு விளக்கப்படத்திற்குக் கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படம் **(compound bar diagram)** என்று பெயர். இத்தகைய கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படத்தின் மூலம் மிக அதிகமான விவரங்களைக் குறிப்பிட முடியும் என்பது இதன் தனிச் சிறப்பு ஆகும்.

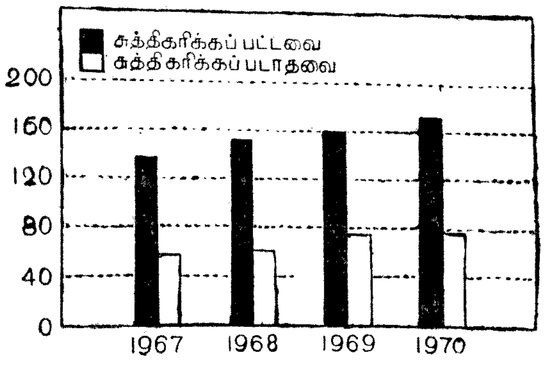
மாதிரி 14 :

இந்தியாவில் 1967 முதல் 1970 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் சுத்திரிக்கப்பட்ட, சுத்திரிக்கப்படாத பெட்ரோல் பொருட்களின் தேவை பற்றிய விவரங்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தேவை அளவுகளின் மாறுதல்களை ஒரு இரட்டைப்பட்டை விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	தேவை (லட்சம் டன்களில்)	
	சுத்திகரிக்கப்பட்ட பொருட்கள்	சுத்திகரிக்கப் படாதவைகள்
1967	137	57
1968	153	60
1969	160	73
1970	173	74

தீர்வு :

இந்தியாவில் பெட்ரோல் பொருட்களின் தேவைகள்:



படம் 7.

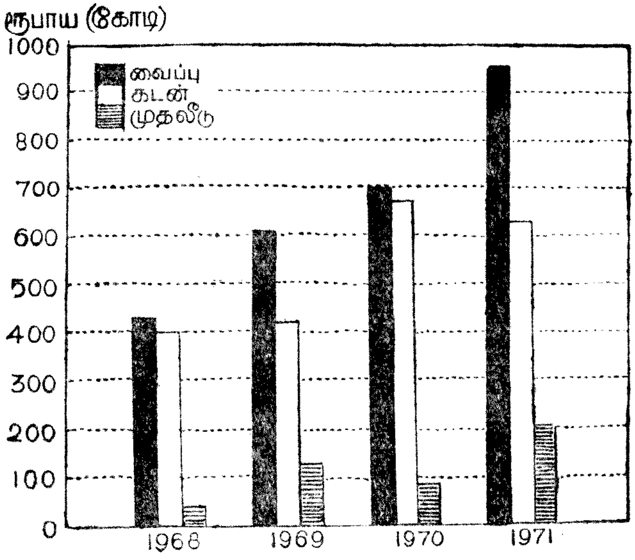
மாதிரி 15 :

1968 முதல் 1971 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் இந்தியாவிலுள்ள வணிக பாங்குகளின் வைப்புகள், கடன்கள், முதலீடுகள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களை ஒரு முப்பட்டை விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டுக.

(கோடி ரூபாய்)

ஆண்டு	வைப்பு	கடன்	முதலீடு
1968	428	400	37
1969	610	415	125
1970	698	672	80
1971	957	627	200

இந்தியாவிலுள்ள வணிகப் பாங்குகளின் நடவடிக்கைகள்



படம் 8.

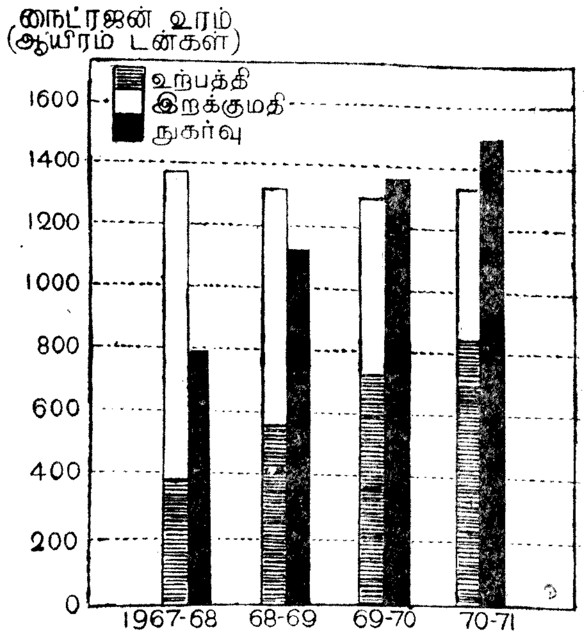
மாதிரி 16 :

1967-68 முதல் 1970-71 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் இந்தியாவின் நைட்ரஜன் உர உற்பத்தி, இறக்குமதி, நுகர்வு ஆகிய அளவுகள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நுகர்வு அளவை மொத்தம் கிட்டுகின்ற மதிப்புடன் ஒப்பிடுவதற்கேற்றவாறு ஒரு கூட்டுப்பட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

	நைட்ரஜன் உரம் (1000 டன்கள்)			
	உற்பத்தி	இறக்குமதி	மொத்தம்	நுகர்வு
1967-68	390	990	1380	800
1968-69	560	775	1335	1130
1969-70	730	570	1300	1370
1970-71	850	490	1340	1490

தீர்வு :

இந்தியாவில் நைட்ரஜன் உர உற்பத்தி, இறக்குமதி நுகர்வு அளவுகள்



படம் 9.

2. செவ்வக விளக்கப் படங்கள் (Rectangular diagrams) :

பட்டை விளக்கப்படங்களில் எல்லாப் பட்டைகளும் சம அகலமுடையவையாக வரையப்படுவதால், பட்டைகளின் உயரங்கள் அப்பட்டைகள் குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கு விகித சமமாகயிருக்குமாறு வரையப்படுகின்றன. மாறிகளின் மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதங்களில் பட்டைகளின் அகலங்களிருக்குமாறும், சம உயரங்களுடன் பட்டைகளை வரையலாம். இப்பட்டைகளின் பரப்புக்களின் விகிதங்கள் மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதங்களுக்குச் சமமாகயிருக்கும். ஒரு மாறியின் உட்கூறுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் மாறியின் மொத்த மதிப்புக்குமுள்ள விகிதத்தில் அந்த உட்கூறைக் குறிப்பிடுகின்ற பட்டைக்கூறின் பரப்பளவும், பட்டையின் மொத்தப் பரப்பளவுமிருக்குமாறு அப்பட்டையானது உட்கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். இவ்வாறு, பட்டைகளின் பரப்பளவுகளும், பட்டைக்கூறுகளின் பரப்பளவுகளும் அப்பட்டைகள் குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மொத்த மதிப்புகளுக்கும் விகிதசமத்திலிருப்பதால் இத்தகைய விளக்கப்படங்கள் குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மொத்த மதிப்புக்களுக்கும், பட்டைக்கூறுகளின் பரப்பளவுகளும், அப்பட்டைகள் குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மொத்த மதிப்புச்களுக்கும் விகிதசமத்திலிருப்பதால் இத்தகைய விளக்கப் படங்கள் 'பரப்பளவு விளக்கப்படங்கள்' (Area diagrams) என்றும், இரு பரிமாண விளக்கப்படங்கள் (Two dimensional diagrams) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய படங்கள் பொதுவாக குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டங்கள் ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடப் பயன்படுகின்றன.

மாதிரி 17 :

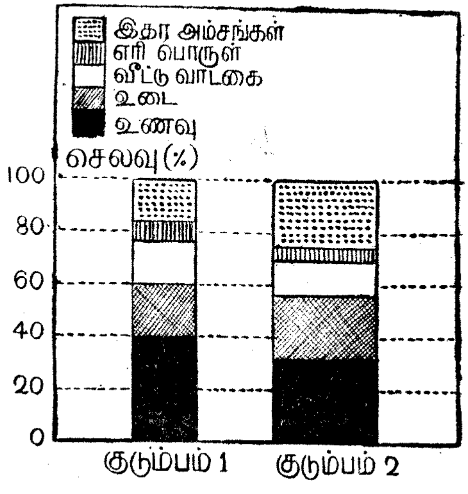
பின்வரும் இரண்டு குடும்பங்களின் வரவு செலவுத் திட்ட மதிப்புக்களைக் குறிப்பிடுமாறு செவ்வக விளக்கப்படம் வரைக.

	குடும்பம் 1 (வருமானம் ரூ. 500)		குடும்பம் 2 (வருமானம் ரூ. 800)	
	செலவு (ரூபாய்)	சதவீதம்	செலவு (ரூபாய்)	சதவீதம்
உணவு	200	40	250	30.25
உடை	100	20	200	25

வீட்டு வாடகை	80	16	100	12.50
எரி பொருள்	40	8	50	6.25
இதர அம்சம்	80	16	200	25
மொத்தம்	500	100	800	100

தீர்வு :

இரு குடும்பங்களின் மாதச் செலவுகள்



படம் 10.

3. *சதுர விளக்கப் படங்கள்* (Square diagrams) :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புக்கள் ஒன்றுக்கொன்று அதிக வித்தியாசத்திலிருந்தால், பட்டைகள், செவ்வகங்கள் ஆகியவற்றை விட சதுரங்களின் மூலம் மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒப்புமையை நன்கு காட்ட முடியும். சதுரங்களின் பக்கங்களை அவை குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மதிப்புக்களின் வர்க்க மூலங்களுக்கு விகித சமமாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எல்லாச் சதுரங்களும் ஒரே அடிக்கோட்டின் மேலிருக்குமாறு வரைய வேண்டும். சதுரங்களைப் பல செவ்வகங்களாகப் பிரித்து மாறிகளின் உட்கூறுகளைக் காட்டலாம்.

சதுரங்களை வரைவது மிகவும் கடினமாகையாலும், இரண்டு சதுரங்களின் பரப்பளவுகளைச் சரியாக ஒப்பிட முடியாதாகையாலும் சதுர விளக்கப் படங்கள் நடைமுறையில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

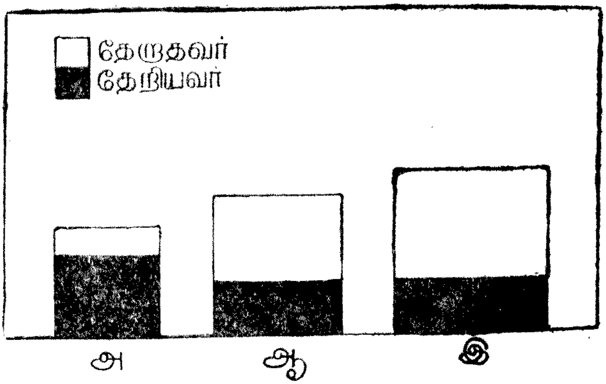
மாதிரி 18 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு சதுர விளக்கப்படம் வரைக.

	புகுமுகத் தேர்வு		
கல்லூரி மையம்	எழுதியவர்	தேறியவர்	தேறாதவர்
அ	400	300	100
ஆ	625	250	375
இ	900	300	600

தீர்வு :

மூன்று கல்லூரி மையங்களில் புகுமுகத் தேர்வு
எழுதியவர், தேறியவர், தேறாதவர்



படம் 11.

4. *வட்ட விளக்கப் படங்கள் அல்லது 'பை'* **(Circle diagrams or Pie diagrams) :**

இரு பரிமான விளக்கப் படங்களுள் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது, 'வட்ட விளக்கப் படங்களாகும்'. கொடுக்கப் பட்டுள்ள மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு வட்டத்தின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. வட்டங்களில் பரப்பளவுகள் மாறி

களின் மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதங்களில் இருக்க வேண்டும். ஆகவே, வட்டங்களின் ஆரங்கள் மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதங்களில் இருக்க வேண்டுமென்பதை எளிதில் அறியலாம். மாறிகளின் உட்கூறுகளை வட்டங்களின் வட்டப்பகுதிகளால் குறிப்பிடலாம். ஒரு வட்டத்திலுள்ள வட்டப்பகுதிகள் அவ் வட்டத்தின் மையத்தில் தாங்கக் கூடிய கோணங்கள் அவ்வட்டப் பகுதிகள் குறிப்பிடுகின்ற கூறுகளின் மதிப்புக் களுடன் விகித சமமாகயிருக்க வேண்டும். பல மாறிகளைக் குறிப்பிடுகின்ற வட்டங்கள் அவற்றின் பரிமாணங்களுக்கேற்ப ஏறும் வரிசையில் அல்லது இறங்கும் வரிசையில் வரையப்பட வேண்டும். பல உட்கூறுகளைக் கொண்ட ஒரேயொரு மாறியை வசதிக்கேற்ப யாதானுமொரு ஆரத்தில் வரையப்படுகின்ற வட்டத்திஞல் குறிப்பிடலாம். உட்கூறுகளைக் குறிப்பிடுகின்ற வட்டப் பகுதிகள் அவற்றின் பரிமாணங்களுக்கேற்ப இறங்கும் வரிசையின் வலஞ்சுழியா (Clockwise) வட்ட மையத்திற்கு மேலுள்ள நிலைக்குத்து ஆரத்திலிருந்து தொடங்கப்பட்டு வரையப்பட வேண்டும். ஆனல், இதர அம்சங்களைக் (miscel-laneous items) குறிப்பிடுகின்ற வட்டப்பகுதி மற்ற வட்டப் பகுதிகளை விட எவ்வளவு பெரியதாகயிருந்தாலும், எப்பொழு தும் இறுதியிலேயே இடம் பெறவேண்டும். வட்டப்பகுதிகளைப் பற்றிய குறிப்புக்கள் போதிய இட வசதியிருந்தால் வட்டப் பகுதிகளுக்குள்ளேயே எழுதப்படலாம். அவ்வாறு இடமில்லை யெனில் அவற்றின் குறிப்புக்கள் தனியாகச் சுட்டிக்காட்டப்பட வேண்டும். குறிப்புகள் எப்போதும் இடமிருந்து வலமாகக் கிடையாகவே எழுதப்பட வேண்டும். வட்டத்தின் பரிதியைச் சுற்றியோ, அல்லது மையத்தை நோக்கியோ எழுதக் கூடாது. பல்வேறு வட்டப்பகுதிகளையும், பொருத்தமாக, வண்ணமிடு வதன் மூலம் 'பை' விளக்கப்படத்தைக் கவர்ச்சியாக்க முடியும்.

சதவீத வட்ட விளக்கப் படங்கள் (Percentage pie-diagrams):

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் உட்கூறுகள் மாறிகளின் மொத்த மதிப்புக்களின் சதவீதங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந் தால், அம்மாறிகளைச் சம ஆரமுள்ள வட்டங்களாகக் குறிப் பிட்டு, ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் கூறுகளின் சதவீத மதிப்பு களுக்கேற்ப முன்னர் கூறிய முறையில் வட்டப்பகுதிகளின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இத்தகைய விளக்கப் படத்திற்குச் சதவீத வட்ட விளக்கப்படம் அல்லது சதவீத 'பை' விளக்கப் படம் என்று பெயர்.

வட்ட விளக்கப்படம் விளம்பரங்களிலும், கண்காட்சிகளிலும் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவை பொதுமக்களின் பார்வையைக் கவர்ந்து இழுப்பதோடு கருத்தையும் கொள்ளை கொள்ளுகின்றன. குறிப்பாக, வட்டவிளக்கப் படங்கள் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்ற நிதி பற்றிய விவரங்கள் பொது மக்களின் மனத்தில் ஆழமாகப் பதிகின்றன. ஆனாலும், வட்ட விளக்கப் படங்களை வரைவதும் வட்டப் பகுதிகளின் பரப்புக்களை ஒப்பிடுவதும் செவ்வகப் படங்களைவிட அதிகச் சிரமமாகயிருக்குமென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

மாதிரி 19 :

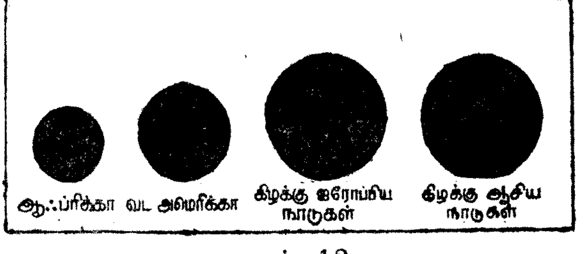
1970-71ல் இந்தியாவிலிருந்து சில வெளி நாடுகளுக்கு ஏற்றுமதியான பொருட்களின் மொத்த மதிப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஏற்றுமதி வித்தியாசங்களைக் காட்ட ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

1970-71 இல் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி
(கோடி ருபாயில்)

ஆப்பிரிக்கா	139.3
வட அமெரிக்கா	235.3
கிழக்கு ஐரோப்பிற நாடுகள்	361.7
கிழக்கு ஆசிய நாடுகள்	410.3

தீர்வு :

1970-71 இல் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி மதிப்புக்கள்



படம் 12.

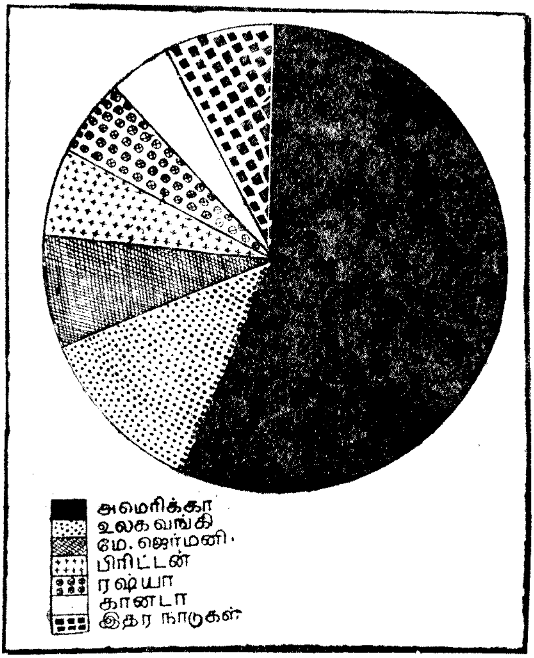
மாதிரி 20 ;

1951 ஏப்ரல் முதல் 1970 அக்டோபர் முடிய இந்திய வளர்ச்சிக்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட வெளி உதவிகள் பற்றிய கீழ்க்காணும் விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

வழங்கிய நாடுகள்	வெளி உதவி (கோடி ரூபாய்கள்
அமெரிக்கா	6784
உலக வங்கி	1478
மேற்கு ஜெர்மனி	907
பிரிட்டன்	715
ரஷ்யா	670
கானடா	532
இதர நாடுகள்	909
மொத்தம்	11,995

தீர்வு :

1951 முதல் 1970 முடிய இந்தியா பயன்படுத்திய வெளி உதவிகள்



படம் 13.

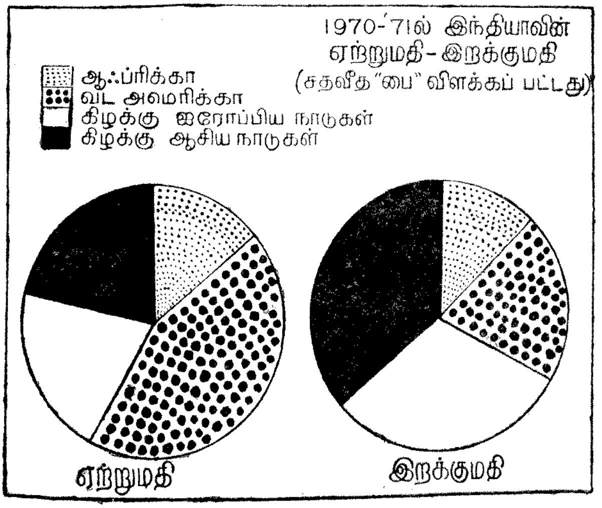
மதிரி 21 :

1970-71 ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதிப் பொருட்களின் பதிப்புக்கள் (கோடி ரூபாயில்) கீழ்க் காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி வித்தியாசத்தைக் காட்டுமாறு வட்ட விளக்கப் படம் வரைக.

நாடுகள்	1970-71ல் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் மதிப்புக்கள் (கோடி ரூபாயில்)	
	ஏற்றுமதி	இறக்குமதி
ஆப்பிரிக்கா	169.3	139.3
வட அமெரிக்கா	563.5	235.3
கிழக்கு ஐரோப்பிய நாடுகள்	255.3	361.7
கிழக்கு ஆசிய நாடுகள்	264.3	410.3
மொத்தம்	1253.4	1146.6

தீர்வு ;

1970-71ல் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி மதிப்புக்கள்



படம் 14.

5, உருவகப் படங்கள் :

சிலவகை விவரங்களைப் பல சிறிய உருவகப் படங்களின் மூலம் காட்டுவது விளக்கப்பட முறைகளுள் மற்றொரு வகை யாகும். உதாரணமாக, ஒரு நாட்டின் கடற்படை வலுவை பல சிறிய கப்பல்கள் மூலம் காட்டலாம். இவ்வாறு காட்டப் படுகின்ற கப்பல் படங்கள் யாவும் ஒரே மாதிரியாகவும், ஒரே அளவாகவும் இருப்பதோடு கப்பல்களின் எண்ணிக்கையும் அந்த நாட்டின் கடற்படை வலுவை ஒரு பொருத்தமான அள வின் மூலந் குறிப்பிடுவதாகயிருக்க வேண்டும். இதுபோல் இரண்டு அல்லது பல நாடுகளின் கடற்படை வலுக்களை அவற்றின் விகிதங்களுக்கேற்ப சம வடிவ கப்பல் படங்களின் மூலம் குறிப்பிடலாம். ஒவ்வொரு நாட்டிற்குமுரிய கப்பல் படங்களின் எண்ணிக்கை அந்நாட்டின் கப்பல் வலுவுடன் விகித சமமாயிருக்குமாதலின், ஒவ்வொரு நாட்டிற்குமுரிய கப்பல் படங்களின் எண்ணிக்கையிலிருந்து அந்நாட்டின் கப்பல்படை வலுவை எளிதில் மதிப்பிட முடிவதோடு, பிற நாடுகளின் கப்பற்படை வலுக்களோடும் எளிதில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடிகிறது. இவ்வாறு சிறிய, சமவடிவ கப்பல் படங் களின் எண்ணிக்கையின் மூலம் ஒரு நாட்டின் கப்பற் படை வலுவைக் குறிப்பிடுவதற்குப் பதிலாக, அந்நாட்டின் கப்பல் படை வலுவுக்கேற்ப ஒரு பொருத்தமான அளவுடன் ஒரே ஒரு பெரிய கப்பல் படத்தின் மூலமும் காட்டலாம். இம்முறையில் பல நாடுகளின் கப்பற்படை வலுக்களை அவைகளைக் குறிப்பிடு கின்ற கப்பல் படங்களின் பரிமாணங்களைக் கொண்டு ஒப்பிட லாம். இதுபோன்று, பல நாடுகளின் இராணுவ பலங்களை அவைகளுக்கு விகித சமமாக வரையப்பட்ட ஒரே அளவிலான சிப்பாய் படங்களின் எண்ணிக்கைகளின் மூலம் அல்லது அவை களுக்கு விகித சமமான பரிமாணங்களில் வரையப்பட்ட சிப்பாய் படங்களின் பரிமாணங்களின் மூலம் ஒப்பிட்டறியலாம். பல நாடுகளின் அரிசி உற்பத்தி அளவுகளை அந்நாடுகளின் உற்பத்தி அளவுகளின் விகிதங்களின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்ட ஒரே மாதிரியான சிறிய மூட்டைகளின் படங்களாக வும், அல்லது உற்பத்தி அளவுகளின் விகிதங்களின் பரிமாணங் களைக் கொண்ட தனி மூட்டைகளின் படங்களாகவும் அல்லது மூட்டைக் குவியல்களின் படங்களாகவும் வரையலாம். இவ் வாறு உருவப் படங்களின் மூலம் காட்டப்படுகின்ற பட விளக்கத்திற்கு உருவக விளக்கப்படம் (Pictogram) என்று பெயர். உருவக விளக்கப் படங்கள் பட்டை விளக்கப்பட முறையின் தத்துவத்தின் அடிப்படையிலேயே அமைந்துள்ளன.

பட்டைகளுக்குப் பதிலாக சிறிய உருவகப் படங்கள் வரையப் படுவதுதான் இரண்டு முறைகளுக்குமுள்ள வேறுபாடாகும்.

உருவகப்படங்கள் வட்ட விளக்கப் படங்களைவிட பொது மக்களின் பார்வையையும் கவனத்தையும் அதிகமாக கவர்ந்து இழுக்கும் சக்தி வாய்ந்தவை. ஆகவே, இவை பெரும்பாலும் கண்காட்சிகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அண்மைக் காலத்தில் உருவகப்பட விளக்க முறை மிக அதிகமாகப் பயன் படுத்தப்பட்டு வருகிறது. நாளிதழ்களிலும், மற்றும் எல்லா வகை பத்திரிகைகளிலும், பொதுமக்கள் பார்வைக்காக வெளியிடப்படுகின்ற புத்தகங்களிலும் விளம்பரங்களில் இம்முறை அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. புள்ளியியல் ஆய்வில் இம்முறை பயன்படாத போதிலும், கல்வித் திட்டங்களிலும், பொருளாதாரக் கல்விகளிலும் மிகவும் அதிகமாக பயன் படுகிறது. ஆனால் உருவகப் படங்கள் வரைய அதிகமாக திறமையும், நேரமும், உழைப்பும் தேவைப்படுவதோடு படங்கள் வரைவதும் மிகவும் கடினம். மேலும் உருவகப் படங்களின் மூலம் தோராய மதிப்புக்களையே குறிப்பிட முடியும்.

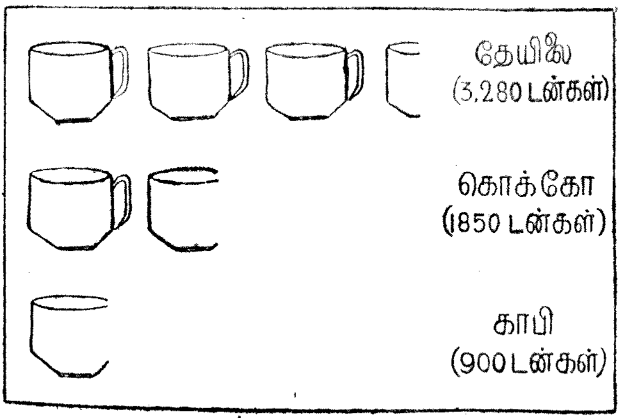
மாதிரி 22:

பிரிட்டனில் தேயிலை, காபி, கொக்கோ ஆகியவற்றின் 1948 ஜூலை மாதத்திய நுகர்வு பற்றிய கீழ்கண்ட விவரங்களை உருவகப்படங்களின் மூலம் காட்டுக.

நுகர்வுப் பொருள்		நுகர்வு அளவு (டன்கள்)
தேயிலை	—	3260
கொக்கோ	—	1850
காபி	—	900

தீர்வு:

1948 ஜூலையில் பிரிட்டனின் தேயிலை, கொக்கோ, காபி ஆகியவற்றின் நுகர்வு



படம் 15.

6. புள்ளி விளக்கப்படங்கள் (Dot diagrams):

புள்ளியியல் விளக்கப்பட முறைகளுள் புள்ளி விளக்கப் பட முறையென்பது மற்றொரு முறையாகும். பூகோள ரீதியில் பிரிக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் பொதுவாக இத்தகைய படங் களின் மூலம் விளக்கப்படுகின்றன. உதாரணமாக இந்தியா வில் மாநில வாரியாக பாங்குகளின் கிளைகளின் எண்ணிக்கை களை இந்தியத் தேசப்படத்தில் ஒவ்வொரு மாநிலப் பகுதியிலும், அம்மாநிலத்திலுள்ள பாங்குக் கிளைகளின் எண்ணிக்கைக்கேற்ப 1 புள்ளி — 50 கிளைகள் என்பது போன்ற அளவுகளில் புள்ளி களால் குறிப்பிடலாம். ஒரு புள்ளியின் அளவைவிடக் குறை வான எண்ணிக்கைகளை, முக்கால் புள்ளி, அரைப் புள்ளி, கால் புள்ளி, அரைக்கால் புள்ளி, முதலியவற்ருல் குறிப்பிடலாம். பல்வேறு மாநிலங்களிலுள்ள பாங்குக் கிளைகளின் எண்ணிக்கை களை அம்மாநிலப் பகுதிகளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைளின் மூலம் மதிப்பிட்டு ஒப்பிடலாம். புள்ளிகள் எண்ணுவதற்கேற்றவாறு பல வரிசைகளாகக் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். இத்தகைய விளக்கப்படங்கள் தொழிலியல் துறை களில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

மாதிரி 23:

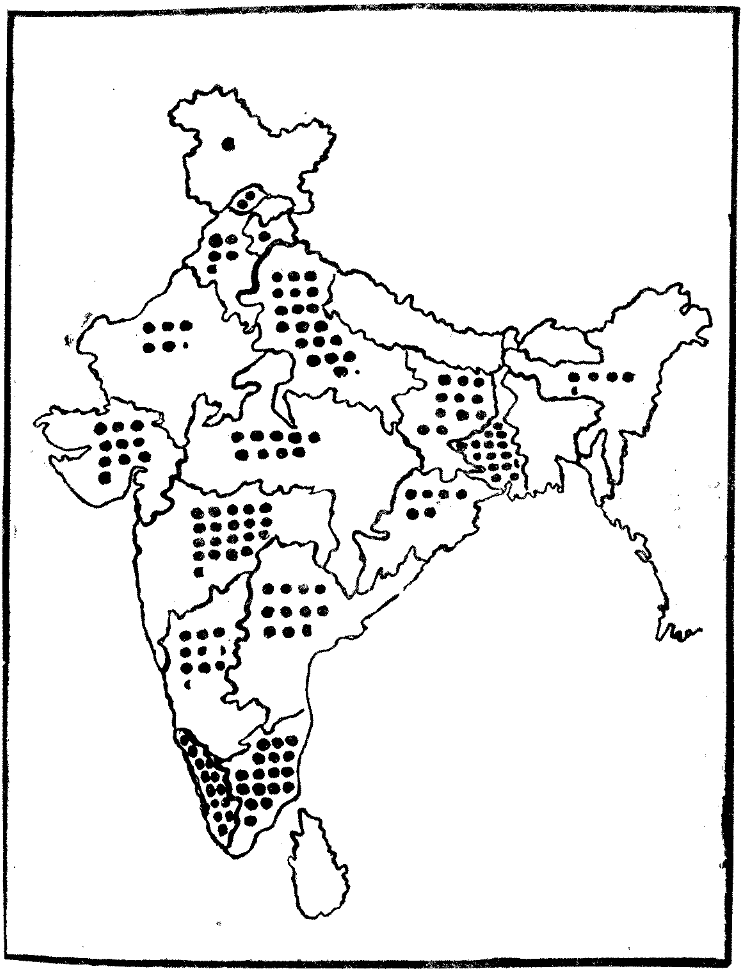
இந்தியாவிலுள்ள படித்தவர்களின் எண்ணிக்கை 1971-ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகைக் கணிப்பு அறிக்கையின்படி மாநிலவாரியாகக் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களை இந்திய தேசப் படத்தில் புள்ளி விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டுக.

மாநிலம்		*படித்தவர் (மிலலியன்)*
ஆந்தரா	—	10.7
அசாம்	—	4.3
பீகார்	—	11.1
குஜராத்	—	9.5
அரியாஞ	—	2.7
இமாசலம்	—	1.1
ஜம்மு-காஷ்மீர்	—	0.0
கேரளா	—	12.8
மத்தியப் பிரதேசம்	—	9.2
மகாஷ்டிரா	—	19.7
மைசூர்	—	9.2
நாகாலாந்து	—	0.1
ஒரிசா	—	5.7

பஞ்சாப்	—	4.5
ராஜஸ்தான்	—	4.8
தமிழ்நாடு	—	16.2
உத்தரப் பிரதேசம்	—	19.1
மே. வங்காளம்	—	14.7

தீர்வு :

1971-இல் இந்தியாவில் படித்தவர்களின் பரவல்



படம் 16.

வரைபடங்கள் (Graphs) :

புள்ளியியல் ஆய்வில் வரைபடங்கள் வரைவது ஒரு முன்னோடி நடவடிக்கையாகும். பொதுவாக நிகழ்வெண் பரவலுக்கும், காலச்சார் தொடர் வரிசைகளுக்குமே வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. நிகழ்வெண் பரவல்களின் வரைபடங்களின் மூலம் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு, கால்மம், பதின்மம், நூற்றுமானம் ஆகிய புள்ளியியல் மாறிகளைக் கணக்கிடலாம். காலம்சார் தொடர்களின் வரைபடங்களின் மூலம் அத்தொடர்கள் போக்கு (trend), பருவகால மாறுபாடுகள் (seasonal variations), சுழல் மாறுபாடுகள் ஆகியவற்றை மதிப்பிடலாம். நிகழ்வெண் பரவல்கள், காலம்சார் தொடர்கள் ஆகியவற்றின் வரைபடங்கள் வரையும் முறைகள் பற்றி மட்டும் இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ளன. காலம்சார் தொடரின் போக்கு, பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் மாறுபாடுகள் ஆகியவற்றை மதிப்பிடும் முறைகள் காலம்சார் தொடர் வரிசை பற்றிய தனி அத்தியாயத்தில் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன.

7. *பரவல் செவ்வகங்கள்* (Histograms) :

நிகழ்வெண் பரவல்களின் வரைபட வகைக் குறிப்புகளுள் பரவல் செவ்வகம் என்பது ஒன்றாகும். நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு எல்லைகள் (Class boundaries) யாவும் வரிசையாக கிடையச்சின் மேல் குறிக்கப்படுகின்றன. இப்பிரிவு இடைவெளிகளின் (class intervals) மேல் அப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களுக்கு விகித சமமான பரப்புக்களைக் கொண்ட செவ்வகங்கள் வரையப்படுகின்றன. இவ்வாறு வரையப்படுகின்ற செவ்வகங்கள் அடங்கிய விளக்கப் படத்திற்குப் பரவல் செவ்வகம் என்று பெயர். நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் யாவும் சமமாகவும் இருக்கலாம்; சமனற்றவையாகவுமிருக்கலாம். ஆகவே, சம பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட பரவல் செவ்வகம் சமனற்ற பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட பரவல் செவ்வகம் என்று பரவல் செவ்வகங்களை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(அ) சம இடைவெளிகளைக் கொண்ட பரவல் செவ்வகம் (Histogram with equal intervals) :

நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் யாவும் சமமாகயிருந்தால், பரவலின் பிரிவு எல்லைகள் யாவும் வரைபடத்தின் கிடையச்சின் மேல் சம இடைகளில் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, பரவல் செவ்வகத்திலுள்ள பல்வேறு செவ்வகங்களும் சமமான அடிப்பக்கங்களைக் கொண்டிருக்கும். ஆனால், ஒவ்

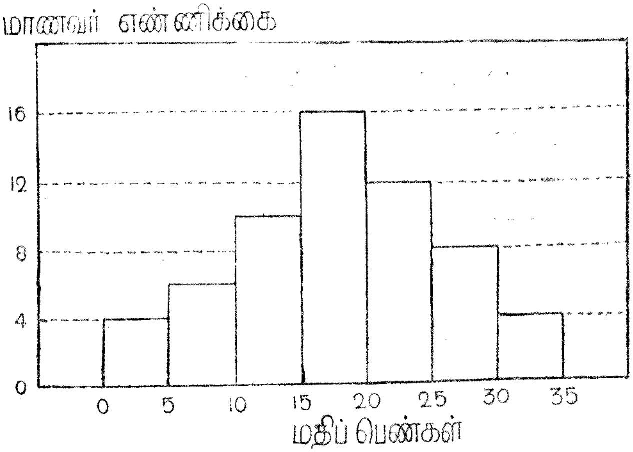
வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேல் வரையப்படுகின்ற செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் அப்பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு விகித சமமாகயிருக்கும். எனவே, பரவல் செவ்வகத்திலுள்ள செவ்வகங்களின் உயரங்கள் யாவும் அவற்றிற்குரிய பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களுக்கு விகிதசமமாயிருக்குமென்பதை அறியலாம். மேலும், நிகழ்வெண் பரவலின் முனைப் பிரிவு எல்லைகள் திட்டமாகக் கொடுக்கப்படாவிடில் பரவல் செவ்வகம் வரைய முடியாதென்பதையும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 24 :

கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய பரவல் செவ்வகம் வரைக.

மதிப்பெண்கள்		மாணவர்
0—5	—	4
5—10	—	6
10—15	—	10
15—20	—	16
20—25	—	12
25—30	—	8
30—35	—	4
	மொத்தம்	60

தீர்வு :



படம் 17.

(ஆ) சமனற்ற இடைவெளிகளைக் கொண்ட பரவல் செவ்வகம் (Histogram with unequal intervals) :

பரவல் செவ்வகத்திலுள்ள பல்வேறு செவ்வகங்களின் பரப்புகளும் அச் செவ்வகங்களுக்குரிய பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களுக்கு விகித சமமாகயிருக்குமென்று பார்த்தோம். ஆகவே, ஏதாவது ஒரு பிரிவு இடைவெளி ஏனைய இடைவெளிகளைவிட அதிகமாகயிருந்தால், அதற்குரிய செவ்வகத்தின் அடிப்பக்கம் ஏனைய செவ்வகங்களின் அடிப்பக்கங்களை விட அதிக நீளமுடையதாகயிருக்கும். ஆகவே, அடிப்பக்கம் எந்த விகிதத்தில் அதிகமாகயிருக்கின்றதோ அதே விகிதத்தில் உயரத்தைக் குறைக்க வேண்டும். அப்பொழுதுதான் அச்செவ்வகத்தின் பரப்புக்கும் அதற்குரிய பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கும் உள்ள விகிதமானது ஏனைய செவ்வகங்களின் பரப்புக்களுக்கும் அவற்றிற்குரிய பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களுக்குமுள்ள விகிதங்களுக்குச் சமமாயிருக்கும். இதுபோல் ஏதாவதொரு இடைவெளி மற்ற இடைவெளிகளைவிட குறைவானதாக இருந்தால் அதற்குரிய செவ்வகத்தின் உயரமும் அதே விகிதத்தில் அதிகரிக்கப்பட வேண்டும்.

மாதிரி 25 :

சென்னை நகரத்திலுள்ள ஒரு தொழில் நிறுவனத்தில் வேலை செய்கின்ற தொழிலாளர்களின் மாத ஊதியங்கள் பற்றிய கீழ்க்காணும் பரவலுக்குரிய பரவல் செவ்வகம் வரைக.

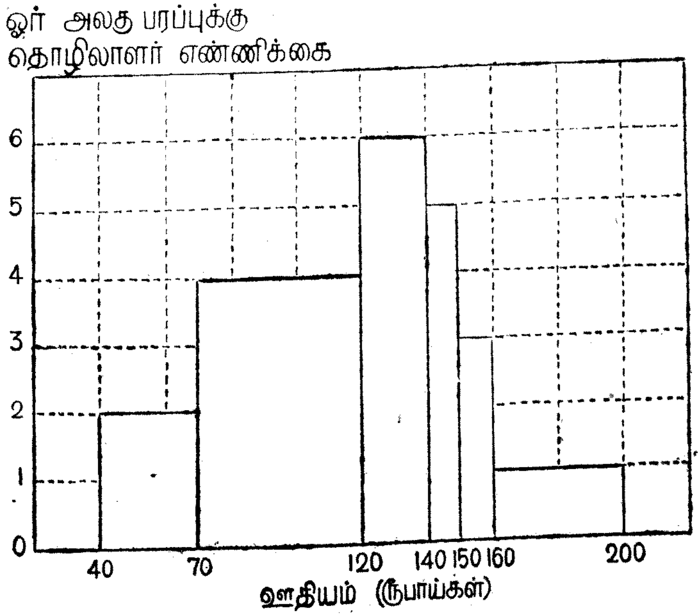
ஊதியம் ரூபாயில்		தொழிலாளர் எண்ணிக்கை
40 — 70	—	60
70 — 120	—	200
120 — 140	—	120
140 — 150	—	50
150 — 160	—	30
160 — 200	—	40
மொத்தம்	—	500

இப்பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் சமனற்றவையாக யிருப்பதால், பல்வேறு செவ்வகங்களின் உயரங்களின் அளவுகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறையில் முதலில் கணக்கிட்டுக்கொண்டு அதன் பின்னரே பரவல் செவ்வகத்தை வரைய வேண்டும்.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை (f)	இடைவெளி (c)	செவ்வகத்தின் உயரம் (f/c) அலகு
40 — 70	60	30	60/30 = 2
70 — 120	200	50	200/50 = 4
120 — 140	120	20	120/20 = 6
140 — 150	50	10	50/10 = 5
150 — 160	30	10	30/10 = 3
160 — 200	40	40	40/40 = 1

தீர்வு :

சென்னையிலுள்ள ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் தொழிலாளர்களின் ஊதியப் பரவல்



படம் 18.

8. நிகழ்வுப் பலகோணங்கள் (Frequency Polygons) :

நிகழ்வுப் பலகோணம் என்பது நிகழ்வெண்பரவலின் வரைபட வகைக் குறிப்புகளுள் மற்றொரு வகையாகும். நிகழ்வெண் பரவலின் நடு மதிப்புக்களை கிடையச்சின் மேலும், நிகழ்வெண் மதிப்புக்களை நிலைகுத்து அளவு கோலிலும் குறித்துக்கொள்ள வேண்டும். கிடையச்சின் மேல் குறிக்கப்பட்டுள்ள நடு மதிப்புக்களுக்கு எதிராக மேலே அந்த நடு மதிப்புக்குரிய நிகழ்வெண்களைக் குறிக்கின்ற புள்ளிகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இப்புள்ளிகள் யாவற்றையும் நேர்கோடுகளால் இணைக்கவேண்டும். முதல் நடு மதிப்புக்குரிய புள்ளிக்கு முன்னுல் முதல் பிரிவு இடைவெளியைக் குறிப்பிடுகின்ற தூரத்தில் கிடையச்சின் மேலுள்ள புள்ளியுடன் முதல் நிகழ்வெண்ணுக் குரிய புள்ளியையும், இறுதி நடு மதிப்புக்குரிய புள்ளிக்குப் பின்னுல் இறுதிப்பிரிவு இடைவெளியைக் குறிப்பிடுகின்ற தூரத்தில் கிடையச்சின் மேலுள்ள புள்ளியுடன் இறுதி நிகழ்வெண்ணுக் குரிய புள்ளியையும், நேர்கோடுகளால் இணைக்கவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற படம்தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய நிகழ்வுப்பல கோணமாகும். பரவல் செவ்வகங்களைக் காட்டிலும் நிகழ்வுப் பலகோணங்களின் மூலம் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்களைத் தெளிவாக ஒப்பிட முடியும்.

மாதிரி 26 :

542 பாராளுமன்ற உறுப்பினர்களின் வயது பற்றிய கீழ்க் காணும் பரவலுக்குரிய நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

வயது (வருடங்களில்)	உறுப்பினர்கள்
20 — 30	3
30 — 40	61
40 — 50	132
50 — 60	153
60 — 70	140
70 — 80	51
80 — 90	2

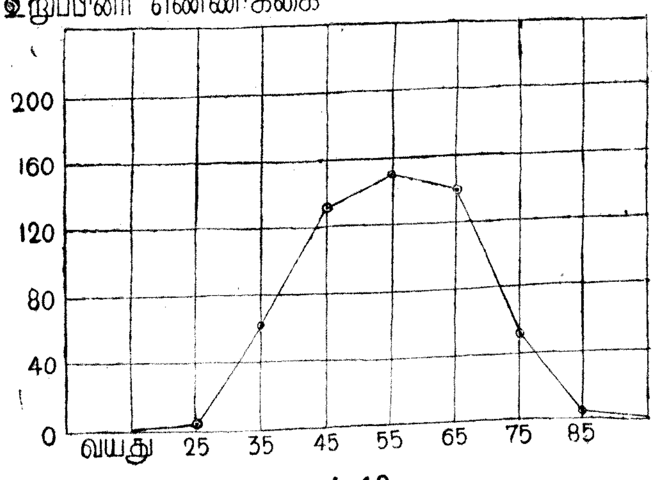
தீர்வு :

நிகழ்வுப்பல கோணம் வரைய பல்வேறு பிரிவுகளின் மைய மதிப்புக்கள் வேண்டுமாகையால் முதலில் மைய மதிப்புக்களைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

வயது (மைய மதிப்பு)	25	35	45	55	65	75	85
உறுப்பினர்	3	61	132	153	140	51	2

இப்பொழுது, வரைப்படத் தாளில் கிடையச்சு, நிலைக்குத்து அச்சு ஆகியவற்றை வரைந்து, கிடையச்சின் மேல் 25, 35, 45,.........ஆகிய மைய மதிப்புக்களை சம தூரங்களிலும், நிலைக் குத்து அச்சின் மேல் 1 அங்குலம் = 40 உறுப்பினர்கள் என்ற அளவில் நிகழ்வெண் அளவுக் குறிகளையும் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர், 25, 30, 45... .....ஆகிய மைய மதிப்புப் புள்ளிகளுக்கு நேர் மேலே முறையே 3, 61, 132.........ஆகிய நிகழ்வெண்களைக் குறிக்கின்ற புள்ளிகளைக் குறித்து அப்புள்ளி களை நேர் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும். கிடையச்சில் 1 அங்குலம் = 20 வயது என்ற அளவில் மைய மதிப்புக்கள் குறிக்கப்பட்டிருந்தால் மைய மதிப்பு 25ஐக் குறிக்கின்ற புள்ளிக்கு முன்னால் கிடையச்சின் மேல் 10 வயது இடைவெளி யைக் குறிக்கின்ற அரை அங்குல தூரத்தில் ஒரு புள்ளியை குறித்து, அப்புள்ளியுடன் 25க்கு நேர் மேலே 3 உறுப்பினர் களைக் குறிக்கின்ற புள்ளியை நேர் கோட்டால் இணைக்க வேண்டும். இதுபோல், இறுதி மைய மதிப்பாகிய 85ஐக் குறிக்கின்ற புள்ளிக்குப் பின்னால் அரை அங்குல தூரத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து, அப்புள்ளியுடன் 85க்கு நேர்மேல் 2 உறுப்பினர்களைக் குறிகின்ற புள்ளியை நேர் கோட்டால் இணைக்க வேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற வரைபடம் தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய நிகழ் வுப் பலகோணமாகும்.

பாராளுமன்ற உறுப்பினர்களின் வயதுபற்றிய நிகழ்வுப் பலகோணம்



படம் 19.

9. *நிகழ்வெண் வரைகள்* **(Frequency Curves) :**

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய நிகழ்வுப்பல கோணம் வரைவதற்காக வரைப்படத் தாளில் குறிக்கப்படுகின்ற புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் இணைப்பதற்குப் பதிலாக அப்புள்ளிகள் யாவற்றையும் ஒரு மெல்லிழை வளைவினால் இணைப்பதால் கிடைக்கின்ற வளைவரைதான் அந்நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய நிகழ்வெண்வரையாகும். நிகழ்வெண்வரையின் மூலம் நிகழ்வெண் பரவலின் முகட்டளவை மதிப்பிடலாம். நிகழ்வெண் வரையில் மீப்பெரு நிலைத்தூரத்தையுடைய திரும்பு புள்ளியானது **(turning point)** அந்நிகழ்வெண் பரவலின் மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணைக் குறிக்கும். எனவே, அத்திருப்பு புள்ளிக்குரிய கிடையளவுகோலின் மதிப்பிலிருந்து நிகழ்வெண் பரவலின் முகட்டளவைப் பெறலாம்.

குறிப்பு :

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய நிகழ்வுப் பலகோணம், நிகழ்வெண்வரை ஆகியவற்றை அதன் பரவல் செவ்வகத்திலிருந்து வரையலாம். பரவல் செவ்வகத்தின் பல்வேறு செவ்வகங்களின் உச்சிப் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளையும் கிடையச்சின் மேல் முதல், இறுதி மையப்புள்ளிகளுக்கு வெளியேயுள்ள புள்ளிகளையும் முன்னர் கூறியதுபோல் நேர்கோடுகளால் அல்லது மெல்லிழை வளைவினால் இணைத்தால் நிகழ்வுப் பலகோணம் அல்லது நிகழ்வெண்வரை கிடைக்கும்.

மாதிரி 27 :

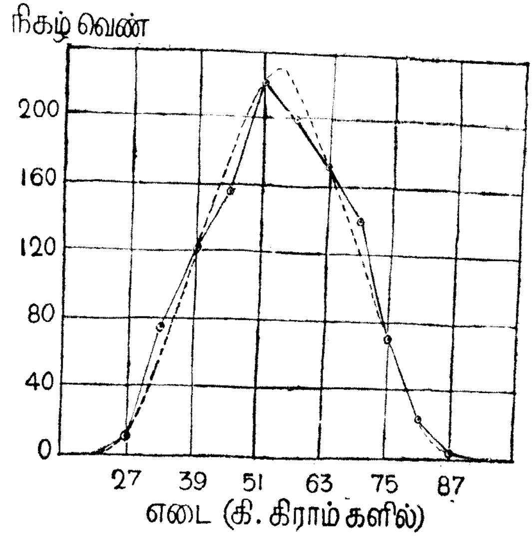
பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் பரவல் செவ்வகம், நிகழ்வெண்வரை ஆகியவற்றை வரைந்து, இப்பரவலுக்கான முகட்டெண்ணளவைத் தோராயமாகக் காண்க.

மைய மதிப்பு கி. கிராமில் எடை	நிகழ்வெண்
27	12
33	76
39	121
45	157
51	221
57	200
63	173
69	140
75	71
81	25
87	4

(மதுரை, பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

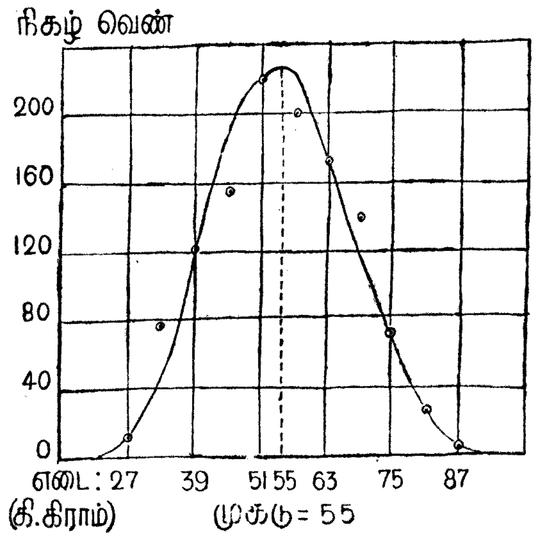
தீர்வு :

பரவல் செவ்வகமும், நிகழ்வெண்வரையும்



படம் 20.

நிகழ்வெண் வரையிலிருந்து முகட்டளவு காணல்



படம் 21.

10. வளர் நிகழ்வரைகள் (Cumulative frequency curves) :

ஓர் மாறியின் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குக் குறைவான அல்லது அதிகமான மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகும். உதாரணமாக, ஓர் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் புள்ளியியல் பாடத்தில் அடைந்துள்ள தேர்ச்சி பற்றிய ஆய்வில் அம்மாணவர்கள் புள்ளியியல் தேர்வில் தேர்ச்சி பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களிலிருந்து, 35 மதிப்பெண்களுக்கு அதிகமாக வாங்கியவர் எத்தனை பேர் என்றும், குறைவாக வாங்கியவர் எத்தனை பேர் என்றும் கணக்கிட வேண்டியது மிகவும் அவசியமாகும். மேலும், சிறிது பின் தங்கிய மாணவர்களுக்குச் சிறப்புப் பயிற்சி அளிக்க எண்ணினால் 25 மதிப்பெண்களுக்கும், 35 மதிப்பெண்களுக்குமிடையே மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கைத் தேவைப்படலாம். இத்தகைய விவரங்களை வளர் நிகழ்வெண் பரவல்களிலிருந்து (cum'a'ive frequency distributions) பெறலாம். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் (greater than cumulative frequency distriburion) கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் (less than cumulative frequency distribution) ஆகிய இரு வகை வளர் நிகழ்வெண் பரவல்கள் தயாரிக்கலாம். நிகழ்வெண் பரவலின் கீழ்ப் பிரிவு எல்லைகளையும், அவ்வெல்லை மதிப்புக்களைவிட அதிகமான மதிப்புக்களையுடைய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளையும் கொண்டமைந்த பரவலுக்கு மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் என்று பெயர். இப்பரவலிலிருந்து ஒவ்வொரு கீழ்ப்பிரிவு எல்லை மதிப்புக்கும் அதிகமான மதிப்புக்களையுடைய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைப் பெறலாம். இதுபோன்று, நிகழ்வெண் பரவலின் மேல்பிரிவு எல்லைகளையும், அவ்வெல்லை மதிப்புக்களைவிட குறைவான மதிப்புக்களையுடைய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளையும் கொண்டமைந்த பரவலுக்குக் கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் என்று பெயர். இப்பரவலிலிருந்து ஒவ்வொரு மேல்பிரிவு எல்லை மதிப்புக்கும் குறைவான மதிப்புக்களையுடைய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைப் பெறலாம். வளர் நிகழ்வெண் பரவல்கள் புள்ளியியல் ஆய்வில் மிகப் பரந்த அளவில் பயன்படுகின்றன.

ஓர் கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவலின் கீழ் எல்லை மதிப்புக்களைக் கிடையளவு கோலிலும், மேலின வளர் நிகழ்வெண்களை நிலைக்குத்து அளவு கோலிலும் குறித்து, ஒவ்வொரு கீழ் எல்லை மதிப்புக்குரிய புள்ளிக்கும் நேர்மேலே அதற்குரிய மேலின வளர்

நிகழ்வெண்ணைக் குறிக்கின்ற புள்ளியையும் குறிக்க வேண்டும். இவ்வாறு குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளை வரிசையாக நேர்கோடுகளால் இணைப்பதால் கிடைக்கும் வரை படத்திற்கு மேலின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம் (greater than cumulative frequency polygon) என்று பெயர். அப்புள்ளிகளை நேர்கோடுகளுக்குப் பதிலாக ஒரு மெல்லிழை வளைவினால் இணைப்பதால் கிடைக்கும் வரை படத்திற்கு மேலின வளர் நிகழ்வரை (greater than or more than cumulative frequency curve) என்று பெயர். இதுபோல், நிகழ்வெண் வரையின் மேல் பிரிவு எல்லைகளையும் அவற்றிற்குரிய கீழின வளர் நிகழ்வெண்களையும் கொண்டு வரையப்படுகின்ற வரைபடத்திற்குக் கீழின வளர் நிகழ்வரை (less than cumulative frequency curve) என்று பெயர். வளர் நிகழ்வரைகள் ஓகைவ்கள் (Ogives) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. மேலின வளர் நிகழ்வரையானது மேலின ஓகைவ் (greater than ogive or more than ogive) என்றும், கீழின வளர் நிகழ்வரையானது கீழின ஓகைவ் (less than ogive) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. மேலின ஓகைவ் வரைபடத்தின் இடது ஓர உச்சியில் தொடங்கி வலது ஓர கிடைக்கோடு வரையிலும், கீழின ஓகைவ் வரைபடத்தின் இடது ஓர கிடைக்கோட்டில் தொடங்கி வலது ஓர உச்சி வரையிலும் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். இவ்விரு ஓகைவ்களும் வெட்டுகின்ற புள்ளிக்குரிய கிடையச்சு மதிப்புக்குக் குறைவான மதிப்புக்களை 50 சதவீத உறுப்புக்களும் அதிகமான மதிப்புக்களை 50 சதவீத உறுப்புக்களும் பெற்றிருக்கும். இவ்வாறு, மொத்த உறுப்புக்களை இரு சம பிரிவுகளாகப் பிரிக்கின்ற அக்கிடையச்சு மதிப்புக்கு இடைநிலையளவு (median) என்று பெயர். இதுபோன்று, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீத எண்ணிக்கையிலான உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறியின் எந்த மதிப்புக்குக் கீழேயுள்ளன என்பதைக் கீழின வளர் நிகழ்வரையிலிருந்து கணக்கிட முடியும். உதாரணமாக, 25 சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் எந்த மதிப்புக்குக் குறைவாக உள்ளன என்பதைக் கணக்கிட மொத்த நிகழ்வெண்ணில் 25 சதவீதத்தைக் குறிக்கின்ற நிலைக்குத்து அளவு கோலிலுள்ள அளவுக்குறி வழியே ஒரு கிடைக்கோடு வரைய வேண்டும். இக்கிடைக்கோடு கீழின வளர் நிகழ் வரையை வெட்டும் புள்ளி வழியே ஒரு நிலைக்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும். இந்நிலைக்குத்துக் கோடு கிடையளவு கோலை வெட்டும் புள்ளியின் மதிப்புக்குக் குறைவான மதிப்புக்களை 25 சதவீத உறுப்புக்கள் பெற்றிருக்குமென அறியலாம். இம்மதிப்புக்குக் கீழ்க் கால்மம் அல்லது முதற்

கால்மம் (lower quartile or first quartile) என்று பெயர். இது Q_1 அல்லது கா, என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. இடைநிலையளவுக்குக் கீழே 50 சதவீத உறுப்புகளுள்ளன என்று கண்டோம். ஆகவே, இடைநிலையளவை இரண்டாம் கால்மம் என்றும் கூறலாம். 75 சதவீத உறுப்புக்களைக் கீழே கொண்டுள்ள மாறியின் மதிப்புக்கு மேல் கால்மம் அல்லது மூன்றும் கால்மம் (Upper quartile or Third quartile) என்று பெயர். இது Q_3 அல்லது $கா_3$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. முதற் கால்மம், இடைநிலையளவு, மூன்றும் கால்மம் ஆகியவை முறையே 25%, 50%, 75% உறுப்புக்களை அவைகளின் மதிப்புகளுக்குக் கீழே கொண்டுள்ளதால் அவைகள் முறையே 25வது நூற்றுமானம் (25th percentile), 50வது நூற்றுமானம், 75வது நூற்றுமானம் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. பொதுவாக நூற்றுமானங்கள் P அல்லது நூ என்ற எழுத்தினுல் குறிக்கப்படுகின்றன. எனவே, 25வது நூற்றுமானம் P_{25} அல்லது $நூ_{25}$ என்றும், 50வது நூற்றுமானம் P_{50} அல்லது $நூ_{50}$ என்றும், 75வது நூற்றுமானம் P_{75} அல்லது $நூ_{75}$ என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. ஆகவே, கீழின வளர் நிகழ்வரையிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீத உறுப்புக்களைக் கீழடக்கிய மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். மேலும் மாறியின் குறிப்பிட்ட இரண்டு மதிப்புகளுக்கிடையே அடங்கிய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும் கீழின வளர் நிகழ்வரையிலிருந்து கணக்கிடலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரிகளிலிருந்து மேற்கூறப்பட்ட மதிப்புகளைக் கணக்கிடும் முறைகளை நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 28 :

கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் வளர் நிகழ்வரைகளை வரைந்து, முதலாவது, மூன்றுவது கால்மங்கள், இடைநிலையளவு, 15வது நூற்றுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்		மாணவர்கள்
0 - 5	—	4
5 - 10	—	6
10 - 15	—	10
15 - 20	—	16
20 - 25	—	12
25 - 30	—	8
30 - 35	—	4
		60

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலின் கீழின, மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைத்துக் கொள்க.

கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவல்

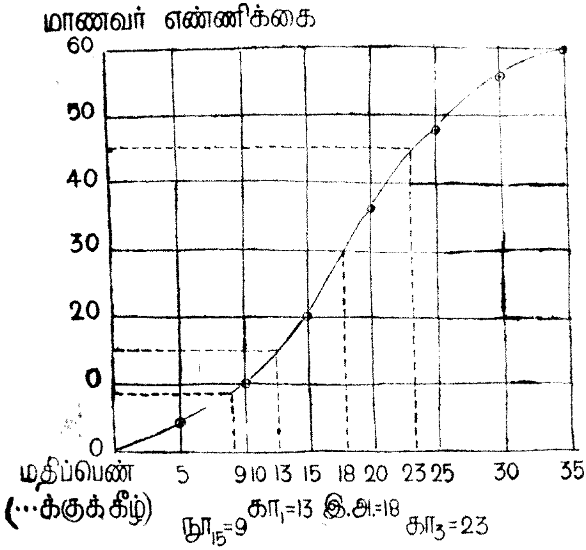
மதிப்பெண்	—	மாணவர்கள்
5க்குக் கீழ்	—	4
10க்குக் கீழ்	—	10
15க்குக் கீழ்	—	20
20க்குக் கீழ்	—	36
25க்குக் கீழ்	—	48
30க்குக் கீழ்	—	56
35க்குக் கீழ்	—	60

மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவல்

மதிப்பெண்	—	மாணவர்கள்
0க்கு மேல்	—	60
5க்கு மேல்	—	56
10க்கு மேல்	—	50
15க்கு மேல்	—	40
20க்கு மேல்	—	24
25க்கு மேல்	—	12
30க்கு மேல்	—	4

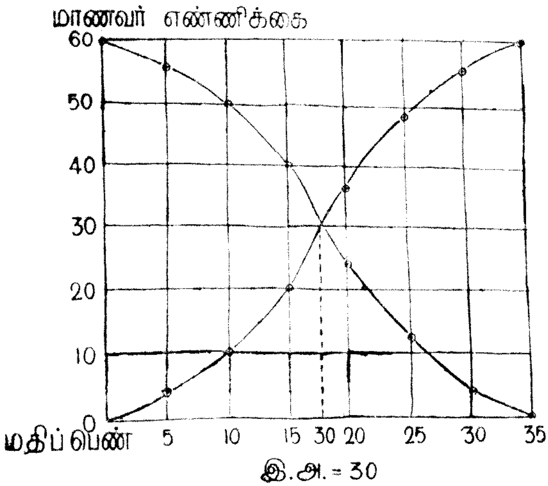
கீழின வளர் நிகழ் வரை மட்டும் தனியாக ஒரு வரை படத்தில் வரைந்து, அதிலிருந்து முதல், மூன்றும் கால்மங்கள், இடைநிலையளவு, P.5, ஆகியவை கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. மற்றொரு வரை படத்தில் கீழின, மேலின வளர் நிகழ்வரைகள் வரையப்பட்டு, அவையிரண்டும் இடைநிலையளவில் வெட்டுகின்றன என்று காட்டப்பட்டுள்ளன.

கீழின ஓகைவ்விலிருந்து கால்மங்களும் இடைநிலையளவும் கணக்கிடல்



படம் 22.

கீழின, மேலின ஓகைவ்கள் இடைநிலையளவில் வெட்டுவதைக் காட்டும் வரைபடம்



படம் 23.

11. காலம்சார் தொடர்களின் வரைகள் (Graphs of time Series) :

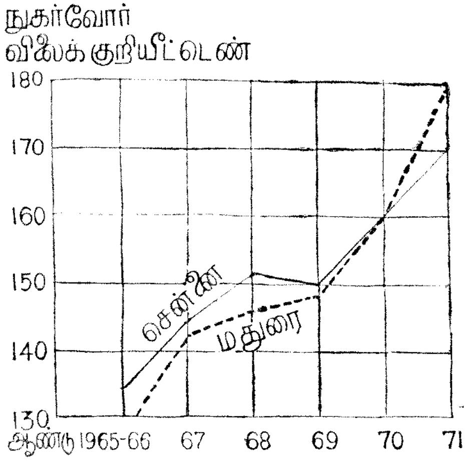
ஓர் மாறியின் மதிப்புக்கள் அவற்றிற்குரிய காலங்களுக் கேற்ப வரிசைப் படுத்தப்பட்டிருப்பின், அம்மதிப்புக்களைக் கொண்ட அத்தொடருக்குக் காலம்சார் தொடர் (time series) என்று பெயர். ஓர் காலம்சார் தொடரின் காலங்களைக் கிடையளவு கோலிலும், தொடரின் மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அளவு கோலிலும் கொண்டு அம்மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, மெல்லிழை வளைவினால் இணைத்தால் அக்காலம்சார் தொடரின் வரைபடம் கிடைக்கும். காலம்சார் தொடர்கள் பற்றி விரிவாகப் பிறிதொரு அத்தியாயத்தில் விளக்கப் பட்டுள்ளது.

மாதிரி 29 :

சென்னை, மதுரை ஆகிய நகர்களில் தொழிற்சாலைகளில் வேலை செய்வோரின் நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்கள் (1960 = 100) கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன, ஒரே வரைபடத்தில் இருநகர்களின் குறியீட்டெண் வரைபடங்களை வரைந்து இருநகர்களிலுமுள்ள விலைவாசிகளின் போக்குகளை ஒப்பிடுக.

ஆண்டு	நுகர்வோர் சென்னை	விலைக் குறியீட்டெண் மதுரை
1965 - 66	134	128
1966 - 67	144	142
1967 - 68	151	146
1968 - 69	150	148
1969 - 70	160	160
1970 - 71	170	177

சென்னை, மதுரையின் விலைவாசிக் குறியீட்டு எண்களின் போக்குகள்



படம் 24.

முடிவு :

இரு நகர்களிலும் நுகர்வோர் விலைக்குறியீட்டெண்கள் ஏறும் போக்கிலேயே இருந்தபோதிலும் 1969–70, 1970–1971 ஆகிய ஆண்டுகளிலில் மதுரையின் விலைக் குறியீடுகள் சென்னையைச் காட்டிலும் அதிகமாக ஏறிவிட்டன என்று காண் கிரேம்.

லோரன்ட்ஸ் வளைவு **(Lorenz Curve) :**

லோரன்ட்ஸ் வளைவு என்பது ஒரு வகை வளர் நிகழ்வரையா கும். இவ்வளைவைக் கண்டுபிடித்தவராகிய டாக்டர் லோரன்ஸ் என்பவரின் பெயரால் இவ்வளைவு அழைக்கப்படுகிறது. நிகழ் வெண் பரவலின் மாறி, நிகழ்வெண் ஆகிய இரண்டுமே வளர் சதவீதங்களாக (Cumulative percentages) மாற்றப்பட்டு, அவற்றின் வரைபடம் வரையப்புடுகிறது. உதாரணமாக, வரு மானப் பரவலில் வருமானம் என்பது மாறியாகும். குறிப்பிட்ட வருமானப் பிரிவுகளுக்குரிய மக்களின் எண்ணிக்கைகள் நிகழ் வெண்களாகும். மாறியின் மதிப்புக்கள், நிகழ்வெண்கள்

ஆகியவற்றின் வளர் சதவீதங்கள் தனித்தனியே கணக்கிடப் பட்டு, அவற்றை இரு அச்சுக்களிலும் கொண்டு லோரன்ஸ் வளைவு வரையப்படுகிறது. ஓர் நிறுவனத்தின் பல வருட விற்பனை மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஓர் காலம்சார் தொடரில் விற்பனை மதிப்புக்களை மாறியாகக் கொள்ள வேண்டும். ஆண்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையின் வளர் சதவீதங் களாக கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளை மாற்றி எழுத வேண்டும். இதுபோல் மொத்த விற்பனையில் வளர் சதவீதங் களாக ஆண்டுகளின் விற்பனை மதிப்புக்களை மாற்றி எழுத வேண்டும். கிடையச்சிலும், நிலைக்குத்து அச்சிலும், 0 முதல் 100 வரையுள்ள வளர் சதவீத அளவுக் குறிகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, ஆதியானது இரண்டு அளவு கோலிலும் 0 சதவீதத்தைக் குறிப்பிடும். நிகழ்வெண் பரவலின் லோரன்ஸ் வளைவு வரையும்போது மாறியின் வள்ர் சதவீத மதிப்புக்களையும், காலம்சார் தொடரின் லோரன்ஸ் வளைவு வரை யும் போது காலங்களின் வளர் சதவீதங்களையும் கிடையச்சில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, காலம்சார் தொடர் களின் மாறிகளின் வளர் சதவீத மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அச்சில் எடுக்கவேண்டுமென்பதைக் கவனிக்கவும். இப் பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளர் சதவீத மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளை குறித்து ஒரு மெல்லிழை வளைவினால் இணைத்தால் லோரன்ஸ் வளைவைப் பெறலாம். (0, 0), (100, 100) ஆகிய வளர் சதவீத மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளை இணைக்கின்ற நேர்கோட்டிற்குச் 'சம பங்கீட்டுக்கோடு' (line of equal distribution) என்று பெயர். இக்கோட்டின் மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் இரு அளவு கோல்களிலும் சமமான சதவீதங் களைக் குறிக்கும். இக்கோட்டிலிருந்து லோரன்ஸ் வளைவின் விலக்கம் (deviation) மாறியின் ஒழுங்கற்ற பங்கீட்டை அளவிடப் பயன்படுகிறது. லோரன்ஸ் வளைவுக்கும், சம பங்கீட்டுக் கோட்டுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பளவு அதிகமாக யிருந்தால் மாறியின் பங்கீட்டில் சீரற்ற தன்மை மிகுந்து காணப்படுவதாகக் கொள்ள வேண்டும்,

பொருளாதார ஆய்வுகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருளாதாரத் தொடர்களின் பங்கீடுகளின் சீரற்ற தன்மைகளை ஒப்பிட லோரன்ஸ் வளைவு பயன்படுகிறது. இரண்டு லோரன்ஸ் வளைவுகளுள் சமபங்கீட்டுக் கோட்டி லிருந்து அதிக தூரத்திலிருக்கும் வளைவு மற்றதைவிட அதிக மாறுபாடுகளுடனிருப்பதாகக் கொள்ள வேண்டும். சொத்து, வருமானம், செலவு, ஊதியம், நுகர்வு ஆகியவற்றின் பங்கீடு

கள் பற்றிய ஆய்வுகளில் லோரன்ஸ் வளைவு முறை பயனுள்ள முறைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இருப்பினும், இதன் மூலம் பரவல்களின் பங்கீட்டுத் தன்மைகளை எண் சார் அளவுகளாகக் கணக்கிட முடியாதென்பதை அறியவும்.

மாதிரி 30 :

இந்தியாவின் 1962 முதல் 1971 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் வானொலி பெட்டிகளின் உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவைபற்றிய விவரங்கள் பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன, வானொலிப் பெட்டிகளின் உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவற்றின் பரவுகையைக் காட்ட லோரன்ஸ் வளைவுகள் வரைக.

ஆண்டு	வானொலிப் பெட்டிகள் உற்பத்தி	(ஆயிரக் கணக்கில்) விற்பனை
1962	296	299
1963	363	364
1964	423	412
1965	504	513
1966	688	686
1967	826	800
1968	1265	1134
1969	1692	1728
1970	1818	1772
1971	1910	1787

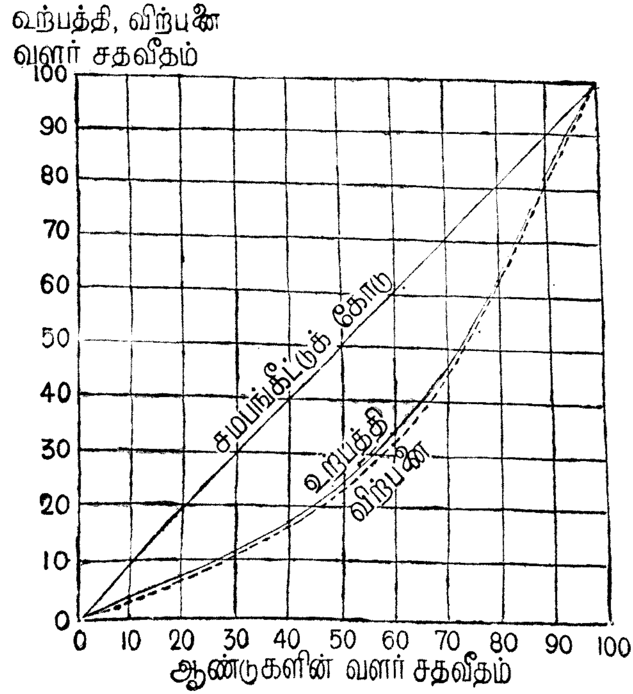
தீர்வு :

லோரன்ஸ் வளைவுகளை வரைவதற்கு முதற்படியாகக் கீழ்க்கண்ட கணக்கீடுகளை முதலில் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

ஆண்டு	வளர் சத வீதம்	உற்பத்தி	வளர் உற்பத்தி	உற்பத்தியின் வளர் சத வீதம்	விற்பனை	வளர் விற்பனை	விற்பனையின் வளர் சதவீதம்
1962	10	296	296	3.0	299	299	3.1
1963	20	363	659	6.7	364	663	7.0
1964	30	423	1082	11.1	412	1075	11.4
1965	40	504	1586	16.2	513	1588	16.8
1966	50	683	2269	23.2	636	2224	23.6
1967	60	826	3095	31.7	800	3024	32.0
1968	70	1265	4360	44.6	1134	4158	44.0
1969	80	1692	6052	61.8	1723	5881	62.3
1970	90	1818	7870	80.5	1772	7653	81.1
1971	100	1910	9780	100.0	1787	9440	100.0

இப்பொழுது, ஆண்டுகளின் வளர்சதவீத மதிப்புக்களை கிடை அச்சிலும், உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவற்றின் வளர் சதவீத மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு, ஒவ்வொரு ஆண்டுக்குமுரிய உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவற்றின் வளர் சதவீத மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, உற்பத்திக்குரிய புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வளைவினாலும், விற்பனைக்குரிய புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வளைவினாலும் சேர்க்கவும். இவ்விரு வளைவுகளும் உற்பத்தி, விற்பனை ஆகிய மாறிகளின் லோரன்ஸ் வளைவுகளாகும் இவற்றுள் உத்பத்திக்குரியலோரன்ஸ் வளைவுசம பங்கீட்டுக் கோட்டிலிருந்து அதிகம் விலகியிருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே, வானொலிப் பெட்டிகளின் உற்பத்திஅளவுகளில் ஆண்டு தோறும் அதிக மாறுபாடுகளிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

இந்தியாவில் வானொலிப்பெட்டிகளின் உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவற்றின் லோரன்ஸ் வளைவுகள்



படம் 25.

வினாத்தாள்—4.

1. புள்ளி விவரங்களைப் படங்களின் மூலம் விளக்குவதாலேற்படுகின்ற நன்மை தீமைகளை ஆராய்க.

2. விளக்கப் படங்கள் வரையும்போது கவனிக்க வேண்டிய விதிமுறைகள் யாவை?

3. புள்ளியியலில் விளக்கப் படங்களின் பயன்களை குறிப்பிடுக. (சென்னை பி.காம். 1961 செப்.)

4. புள்ளிவிவரங்களின் விளக்கப் படங்களின் வகைக் குறிப்பின் சிறப்பியல்புகளும் வரம்புகளும் யாவை? விளக்கப்பட வகைக் குறிப்பில் பயன்படுகின்ற ஏதாவது மூன்று முக்கிய முறைகள் பற்றி சிறு குறிப்பு வரைக. (சென்னை, பி.காம். 1963 செப்.)

5. பொருளாதாரயியலில் விளக்கப்பட வகைக் குறிப்பின் முக்கியத்துவம் பற்றி விவரிக்கவும். முக்கியமான முறைகளை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விவரிக்கவும். (மதுரை, பி.காம்., 1971 செப்.)

6. விவரங்களைப் படங்களின் மூலம் விளக்குகின்ற ஏதாவது மூன்று முக்கிய முறைகளை அவற்றின் பயன்களைச் சுட்டிக் காட்டி விளக்குக. (சென்னை, பி. எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

7. புள்ளி விவரங்களைப் படங்களின் மூலம் விளக்குகின்ற பல்வேறு முறைகளையும் பற்றி ஒரு சிறு விவாதக் குறிப்பு வரைக. (சென்னை, பி. ஏ. 1967 ஏப்.)

8. விவரங்களைப் படங்களின் மூலம் விளக்குவதால் ஏற்படுகின்ற பயன்களைக் குறிப்பிடுக. உமக்குத் தெரிந்த ஏதாவது இரு வெவ்வேறு வகை விளக்கப் படங்களை வரையும் முறைகளை விளக்குக, (சென்னை, பி.காம். 1962 ஏப்.)

9. புள்ளி விவரங்களை வரைகோடுகள் கொண்டும், படங்கள் கொண்டும் விளக்குவதால் பெறப்படுகின்ற பயன்கள் யாவை?

(1) உட்பிரிவுகளோடு கூடிய பட்டைப் படம்

(2) 'பை' படம் (வட்டம் படம்)

என்ற இரு பட முறைகளுக்கொப்ப அப்பயன்களை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கு.

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

10. புள்ளி விவரங்களை வரைகோடுகள் கொண்டு விளக்குவதால் பெறப்படுகின்ற பயன்கள் யாவை? பட்டியல் மூலம் வெளியிடுவதால் பெறப்படும் பயன்கள் யாவை?

ஓர் தேசத்தின் சில பகுதிகளில் செய்தித்தாள்கள் குவியலாக விநியோகமாவதை ஓர் புள்ளியியல் தேசப் படத்தில் எவ்வாறு காட்டுவாய்?

(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

11. (அ) உருவக விளக்கப் படம், (ஆ) பரவல் செவ்வகம் ஆகியவற்றின் மூலம் நீவிர் அறிந்து கொள்ளுவதென்ன என்று விளக்குக.

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.

12. (அ) 1. பரவல் செவ்வகம், 2. நிகழ்வெண் வரை, 3. ஓகைவ், 4. லாரன்ஸ் வளைவு ஆகியவற்றைப் பற்றி விளக்கு.

(ஆ) இடைநிலையளவு, முகட்டளவு, நூற்றுமானங்கள் ஆகியவற்றை வரைபடம் மூலம் எவ்வாறு நிர்ணயிப்பாய் என்பதை விவரிக்கவும்.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

13. (அ) புள்ளி விவரங்களை வரைபட முறையில் விளக்குவதன் முக்கியத்துவத்தை விளக்கு.

(ஆ) நிகழ்வுப் பலகோணம் என்றால் என்ன? அதை வரையும் முறையினை விளக்கு.

(மதுரை, பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

14. நிகழ்வெண் தொடர்களை வரைபடம் மூலம் விளக்கு கின்ற ஒரு முறையாக ஓகைவ் வளைவின் முக்கியத்து வத்தை மதிப்பிடுக.
(மதுரை, பி காம். 1970 செப்.)

15. *சிறு குறிப்பு வரைக.*

(1) பட்டை விளக்கப் படம் (பி.காம். சென்னை 1961 ஏப்., மதுரை 1971 ஏப். பி.எஸ்ஸி. சென்னை 1967, ஏப்.)

(2) நிகழ்வுப் பலகோணம் (சென்னை, பி.காம். 1963 ஏப்.)

(3) பரவல் செவ்வகம் (பி.காம். சென்னை 1964, 66, செப், 67, ஏப்., மதுரை 69, ஏப்.)

(4) நிகழ்வுப் பலகோணமும் பரவல் செவ்வகமும் (சென்னை, பி எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

(5) ஓகைவ் (பி.காம். சென்னை, 1960 செப்,, 64 ஏப்., 66 செப்., 67 ஏப். மதுரை பி.காம். 1969 ஏப்., பி.எஸ்ஸி. 71 செப்.)

(6) உருவகப் படம் (சென்னை, பி.காம். 1964 செப்., 68 ஏப்.)

(7) 'பை, விளக்கப் படம் (சென்னை பி காம். 1963 ஏப். பி.எஸ்ஸி. 63 ஏப்.)

16. (அ) 1. 'பை' விளக்கப் படம், (2) உருவக விளக் படம், (3) பட்டை விளக்கப் படம் ஆகியவற்றை விளக்குக.

(ஆ) விவரங்கள் (1) சம பிரிவு இடைவெளிகளுடன் (2) அசம பிரிவு இடைவெளிகளுடன் கூடிய நிகழ்வெண் பரவலின் அமைப்பில் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் பரவல் செவ்வகம் வரையும் முறை யினை விளக்குக. (மதுரை பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

17. புள்ளி விவரங்களை விளக்கக் குறிப்பு செய்தற்குரிய பல்வேறு வகையான வரை படங்களையும், விளக்கப் படங்களையும், பற்றி எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விவரிக்கவும். (மதுரை, எம்.ஏ. 1972)

18. புள்ளியியல் விவரங்களை விளக்கப் படம், வளைவரைப் படம் மூலம் விளக்கும் பல்வேறு முறைகளை விவரித்துக் கூறு. அவற்றின் பலாபலன்களை ஆராய்க. (மதுரை, பி.எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

பயிற்சி 2.

(1) இந்தியாவின் சீனி உற்பத்தி பற்றிய பின்வரும் விவரங்களைக் கிடைப்பட்டை விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	சீனி உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)
1967-68	2220
1968-69	2648
1969-70	4225
1970-71	3667

(2) உலகிலுள்ள சில நாடுகளில் 1970-ஆம் ஆண்டில் நாட்டுப் பாதுகாப்புக்குப் பயன்படக்கூடிய மின்சார சாதனப் பொருட்களின் உற்பத்தி மதிப்புக்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இந்தியாவின் உற்பத்தி மதிப்பை ஏனைய நாடுகளின் உற்பத்தி மதிப்புக்களுடன் ஒப்பிடக்கூடிய வகையில் நிலைக்குத்துப்பட்டை விளக்கப்படம் வரைந்து காட்டுக.

நாடுகள்	1970-இல் உற்பத்தி மதிப்பு (மில்லியன் அமெரிக்க டாலர்கள்)
அமெரிக்கா	24,641
பிரிட்டன்	1,591
மேற்கு ஜெர்மனி	2,583
ஜப்பான்	4,617
இந்தியா	180

(3) இந்தியாவின் தொலைபேசிக் கருவிகளின் உற்பத்தி பற்றிய விவரங்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தொலைபேசிக் கருவிகள் உற்பத்தியின் வளர்ச்சியைப் பட்டை விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	தொலைபேசிக் கருவிகள் (இலட்சங்கள்)
1959	2.7
1961	4.6
1966	8.8
1971	12.9

(4) 1970-ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவில் இரும்பு அல்லாத சில உலோகங்களின் உற்பத்தியளவுகள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

உலோகம்	உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்கள்)
அலுமினியம்	161
செம்பு	9.3
துத்தநாகம்	24
ஈயம்	2

(5) இந்தியாவிலிருந்து வெளி நாடுகளுக்கு ஏற்றுமதியான பொறிவழிப் பொருட்களின் மதிப்புக்கள் பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பட்டைவிளக்கப் படம் வரைந்து காட்டுக.

ஆண்டு	ஏற்றுமதி மதிப்பு (கோடி ரூபாய்)
1967-68	43
1968-69	86
1969-70	106
1970-71	121
1971-72	136

(6) 1965-66 முதல் 1970-71 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் இந்தியாவில் மின் இணைப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சிற்றூர்களின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான பட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

ஆண்டு	சிற்றூர்கள் (ஆயிரத்தில்)
1965-66	54
1966-67	69
1968-69	70
1969-70	84
1970-71	101

(7) இந்தியாவிலுள்ள பாங்குகளில் வைப்புகள் கடன்கள் ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களை இரட்டைப்பட்டை விளக்கப் படம் வரைந்து காட்டுக.

ஆண்டு	தொகை (கோடி ரூபாய்கள்) வைப்பு	கடன்
1967	385	293
1968	458	344
1969	656	547
1970	808	837
1971	1171	514

(8) பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமாக ஓர் படம் வரைக.

வானொலிப் பெட்டிகளின் உற்பத்தியும் விற்பனையும்.

ஆண்டு	வானொலிப் பெட்டிகள் (ஆயிரங்களில்) உற்பத்தி	விற்பனை
1967	826	800
1968	1265	1134
1969	1692	1723
1970	1818	1772

(9) 1968-69 ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி பற்றிய விவரம் பின் வருமாறு :

நாடு	தொகை (கோடி ரூபாயில்) ஏற்றுமதி	இறக்குமதி
ஆப்பிரிக்கா	148	72.8
வட அமெரிக்கா	671	264
கிழக்கு ஐரோப்பிய நாடுகள்	309	266
கிழக்கு ஆசிய நாடுகள்	329	342

இருபட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

(10) 1971-ஆம் ஆண்டின் இந்திய மக்கள் கணிப்பு, அறிக்கையின்படி இந்தியாவின் சில பெரிய நகரங்களின் படித்தவர் பற்றிய விவரங்கள் வருமாறு.

நகரம்	படித்தவர் (சதவீதம்)	
	ஆண்கள்	பெண்கள்
பம்பாய்	71	54
சென்னை	70	53
பெங்களூர்	67	51
ஆமதாபாத்	67	50
கல்கத்தா	63	50

(11) இந்தியாவிலுள்ள வெளிநாட்டுக் கூட்டுறவு நிறுவனங்கள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான கூறுபட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

நாடுகள்	கூட்டுறவு நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை		
	1968	1969	1970
பிரிட்டன்	19	34	39
அமெரிக்கா	36	18	41
மே. ஜெர்மனி	22	28	28
ஜப்பான்	12	17	15
இதர நாடுகள்	42	38	77

(12) 1960, 1965, 1970-ஆம் ஆண்டுகளில் ஓர் கல்லூரியிலிருந்து பி.ஏ., பி.காம்., பி.எஸ்ஸி., ஆகிய பட்டத் தேர்வுகள் எழுதிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய அடியிற் காணும் பட்டியல் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான படம் வரைக.

	தேர்வு எழுதியவர் எண்ணிக்கை		
	1960	1965	1970
பி. ஏ.	200	300	400
பி. காம்.	100	125	150
பி. எஸ். ஸி	150	250	400

(13) பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான படம் வரைக.

துறை	மாணவர் எண்ணிக்கை			
	கல்லூரி 1.		கல்லூரி 2.	
	1965	1970	1965	1970
கலை	300	350	100	200
அறிவியல்	120	500	150	250
வணிகம்	200	650	130	150
சட்டம்	100	300	100	120
மொத்தம்	720	1800	480	720

(14) பின்வரும் விவரங்களைக்கொண்டு கூறுபட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை		
	கல்லூரி 1.	கல்லூரி 2.	கல்லூரி 3.
புதுமுக வகுப்பு	400	480	640
முதல் ஆண்டு	220	180	350
இரண்டாம் ஆண்டு	200	120	280
மூன்றும் ஆண்டு	150	80	200

(15) பின்வரும் விவரங்களைச் சதவீதப்பட்டை விளக்கப் படம் மூலம் காட்டுக.

செலவு விபரம்	மொத்த செலவில் சதவீதம்			
	1959	1960	1961	1962
மூலப்பொருள்	61	58	53	50
கூலி	18	20	23	25
மின்சக்தி	5	4	3	4
வட்டி	6	6	6	5
இதரச் செலவுகள்	10	12	15	16

(16) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு சதவீதப்பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

மாநிலங்கள்	1971-இல் மக்கள் தொகை (மில்லியன்களில்)		
	ஆண்கள்	பெண்கள்	மொத்தம்
தமிழ்நாடு	20.7	20.3	41.0
ஆந்திரப் பிரதேசம்	21.9	21.4	43.3
மைசூர்	14.9	14.3	29.2
கேரளா	10.5	10.7	21.2

(17) பின்வரும் விவரங்களைச் சதவீதம்பட்டை விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டுக.

நகரம்	1971-இல் மக்கள் தொகை (மில்லியன்களில்)		
	ஆண்கள்	பெண்கள்	மொத்தம்
சென்னை	1.30	1.17	2.47
பம்பாய்	3.48	2.49	5.97
கல்கத்தா	4.12	2.89	7.01
பெங்களூர்	0.88	0.77	1.65

(18) 1970 மார்ச் மாதம் நடைபெற்ற புகுமுகத் தேர்வு எழுதியவர்கள், தேறியவர்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. பொருத்தமான பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

பாடம்	புகுமுகத் தேர்வு	
	எழுதியவர்	தேறியவர்
முதல் பாகம் மட்டும்	974	567
இரண்டாம் பாகம் மட்டும்	3435	1758
மூன்றும் பாகம் மட்டும்	3435	1097

(19) ஓர் பல்கலைகழகத்தின் பட்டத் தேர்வுகள் எழுதியவர்கள், தேறியவர்கள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான படம் வரைக.

பட்டத் தேர்வு	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	
	எழுதியவர்	தேறியவர்
பி. ஏ.	4967	1987
பி. எஸ்ஸி.	4776	2856
பி. காம்.	883	504

(20) 1970-ஆம் ஆண்டில் மதுரைப் பல்கலைக்கழகத்தில் பட்டம் பெற்றவர்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. சதவீதப்பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

பட்டம்	பட்டம் பெற்றவர் எண்ணிக்கை	
	ஆண்கள்	பெண்கள்
பி. ஏ.	862	395
பி, எஸ்ஸி.	1466	606
பி. காம்.	193	4
எம். ஏ.	81	57
எம். எஸ்ஸி.	85	46

(21) பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான படம் வரைக.

பட்டம்	பட்டம் பெற்றவர் எண்ணிக்கை			
	ஆண்கள்		பெண்கள்	
	நேரில்	தபாலில்	நேரில்	தபாலில்
பி. ஏ.	578	289	259	136
பி. எஸ்ஸி.	835	631	313	293
பி. காம்,	98	95	2	2
எம். ஏ.	63	18	40	17
எம். எஸ்ஸி.	46	12	33	13

(22) இந்தியாவின் சீனி உற்பத்தி பற்றிய பின்வரும் விவரங்களை வட்ட விளக்கப் படங்களின் மூலம் காட்டுக.

மாநிலம்	சீனி உற்பத்தியின் மதிப்பு (மில்லியன் ரூபாய்)
உத்திரபிரதேசம்	476
பீஹார்	182
தமிழ்நாடு	76
மகாராஷ்டிரம்	40
இதர மாநிலங்கள்	20

(23) மதுரைப் பல்கலைக் கழகத்தைச் சேர்ந்த சில கல்லூரி நூல் நிலையங்களிலுள்ள புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை வருமாறு.

கல்லூரி	புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை (1-12-70-இல்)
அமெரிக்கன் கல்லூரி	32658
வி. இ. நா. செ. நா. கல்லூரி	26732
பாத்திமா கல்லூரி	23625
சாராடக்கர் கல்லூரி	16884
வ. உ. சி. கல்லூரி	15220

மேற்கண்ட விவரங்களுக்குப் "பை" விளக்கப்படம் வரைக.

(24) பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான ஓர் படம் வரைக.

இரண்டாவது ஐந்தாண்டு திட்டத்தில் பொதுத்துறையில் செய்யப்பட்ட முதலீடு.

	கோடி ருபாய்களில்
வேளாண்மை	568
நீர்ப்பாசனம், மின்சாரம்	913
தொழில்துறை, சுரங்கவேலை	890
போக்குவரத்து	1385
சமூகநல சேவை	945
மற்றவை	99
	4800 கோடி.

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்டம்பர்

(25) 1938-39-ஆம் ஆண்டில் பல்வேறு உலக நாடுகளில் ஏக்கருக்குச் சராசரி அரிசி விளைச்சல் (ராத்தல்களில்) தோராயமாகப் பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களை விளக்க ஓர் பொருத்தமான படம் வரைக.

நாடு	ஏக்கருக்கு விளைச்சல் (ராத்தலில்) 1938-39
எகிப்து	2153
இந்தியா	728
இத்தாலி	2903
ஜப்பான்	2276
சயாம்	943
அமெரிக்கா	1409

(சென்னை, பி. எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(26) முதலாவது ஐந்தாண்டு திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளின் வளர்ச்சிக்காகச் செலவிடப்பட்ட தொகைகளின் விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

செலவு செய்யப்பட்ட துறை	செலவு (கோடி ருபாய்களில்)
(1) போக்குவரத்து, தகவல் தொடர்பு	409
(2) வேளாண்மை, மின்சாரம்	266
(3) சமூக வளர்ச்சி	186
(4) தொழில்	147
(5) சமூக சேவை	106

மேற்கண்ட விவரங்களை ஓர் ''பை'' விளக்கப்படத்தின் மூலம் காட்டுக.

(27) அடியிற்கண்ட இரு குடும்பங்களின் மாதச் செலவு பற்றிய விவரங்களை இரு பரிமானப் படத்தின் மூலம் காட்டுக.

செலவினங்கள்	குடும்பம் அ (மாத வருமானம்) ரு 300	குடும்பம் ஆ (மாத வருமானம்) ரு. 400
உணவு	105	115
உடை	65	75
வீட்டு வாடகை	50	65
கல்வி	30	35
எரி பொருள்	20	25
மற்றவை	20	30
மொத்தம்	290	345

(சென்னை பி. காம். 1960 செப்.)

(28) பின்வரும் விவரங்களைச் சதவீதப் "பை" விளக்கப் படங்களின் மூலம் காட்டுக.

செலவினங்கள்	குடும்பம் 1. (மாத வருமானம்) ரூ. 600	குடும்பம் 2. (மாத வருமானம்) ரூ. 900
உணவு	200	300
உடை	120	210
வீட்டு வாடகை	80	120
கல்வி	40	75
எரிபொருள்	20	25
மற்றவை	80	70
சேமிப்பு	60	100

(29) பின்வரும் பட்டியல் விவரங்களைக்கொண்டு ஓர் பரவல் செவ்வகம் வரைக,

பிரிவு ……	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
நிகழ்வெண் ……	3	60	120	50	10

(30) மின் நுகர்வு

(கி. வாட்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	0-50
நுகர்வோர் எண்ணிக்கை	10	25	30	20	15	100

(31) பின்வரும் விவரங்களைக்கொண்டு ஓர் பரவல் செவ்வகமும், ஓர் நிகழ்வுப் பலகோணமும் வரைக.

பிரிவு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண்	4	15	28	16	7

(32) பின்வரும் பரவல் விவரங்களுக்குரிய பரவல் செவ்வகமும், நிகழ்வுப் பலகோணமும் வரைக.

பிரிவு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நிகழ்வெண்	8	12	27	14	9	7	4

(33) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய பரவல் செவ்வகம் வரைக.

கூலி (ரூபாய்)	ஆட்கள்
0-10	2
10-20	4
20-30	12
30-50	48
50-80	42
80-90	2

(34) சென்னை நகரிலுள்ள ஓர் நிறுவனத்தில் வேலை பார்க்கும் 840 எழுத்தர்களின் மாதச் சம்பளம் பற்றிய கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு ஓர் பரவல் செவ்வகம் வரைக.

மாதச் சம்பளம் (ரூபாய்)	எழுத்தர்கள்
10- 50	36
50- 60	87
60- 70	121
70- 80	154
80- 90	133
90-100	95
100-120	112
120-150	72
150-200	30

(35) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய பரவல் செவ்வகமும், நிகழ்வுப் பலகோணமும் வரைக.

உற்பத்தி (டன்களில்)	தொழிலாளர்கள்
0- 10	8
10- 20	18
20- 40	60
40- 70	75
70- 90	82
90-100	35
100-140	48
140-200	30

(36) ஓர் பொறியியல் நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட வட்டத் தகடுகளின் விட்டங்களின் நீளங்கள் பற்றிய கீழ்க் காணும் பரவலுக்குரிய நிகழ்வெண் வரையை வரைந்து முகட்டளவைக் காண்க.

விட்டம் (அங்குலத்தில்)	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
நிகழ்வெண்	2	6	8	15	42	68	25	18	12	4	3

(37) பின்வரும் பரவலுக்குரிய நிகழ்வெண் வரையை வரைந்து முகட்டளவை மதிப்பிடுக.

வாரக்கூலி (ரூபாய்)	9	12	15	18	21	24	27	30
வேலையாட்கள்	20	60	150	250	220	120	50	40

(38) பின்வரும் பரவலுக்குரிய நிகழ்வெண் வரையை வரைந்து முகட்டளவைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
155 - 157	4
158 - 160	8
161 - 163	26
164 - 166	53
167 - 169	89
170 - 172	62
173 - 175	48
176 - 178	14
179 - 181	6

(39) 260 விவசாயிகள் அன்றாடத் தேவைப் பொருள்களை வாங்குவதற்காகப் பயணம் செய்த தூரங்களின் பரவல் அடியிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்வெண் வரையின் மூலம் முகட்டளவைக் காண்க.

பயணம் செய்த மைல்கள்	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை	19	52	70	39	24	21	14	12	8	1

(40) பின்வரும் மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு மேலின ஓகைவ் வரைக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
0-க்கு மேல்	150
10-க்கு மேல்	140
20 ,,	100
30 ,,	80
40 ,,	80
50 ,,	70
60 ,,	30
70 ,,	14
80 ,,	0

(41) 1954-ல் நடைபெற்ற பி.காம். தேர்வில் 100 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் வளர் நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கீழின வளர் நிகழ்வெண் வரையை வரைந்து இடைநிலையளவு, கால்மம், 15-ஆவது, 82-ஆவது நூற்றுமானங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்
10-க்குக் கீழ்	5
20 ,,	14
30 ,,	28
40 ,,	60
50 ,,	82
60 ,,	92
70 ,,	98
80 ,,	100

(42) பின்வரும் வளர் நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய கீழின ஓகைவ் வரைந்து முகட்டளவு, கால்மங்கள், 20-ஆவது,

42-ஆவது, 65-ஆவது நூற்றுமானங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

எடை (ராத்தல்)	ஆட்கள்
70 - 80	12
80 - 90	18
90 - 100	35
100 - 110	49
110 - 120	50
120 - 130	45
130 - 140	20
140 - 150	8

(43) பின்வரும் பரவலில் கீழின, மேலின ஓகைவ்களை ஒரே வரை படத்தில் வரைந்து கிடைநிலையளவுகளைக் காண்க

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
55 - 58	12
58 - 61	17
61 - 64	23
64 - 67	18
67 - 70	11
70 - 73	22
73 - 76	28
76 - 79	19
79 - 82	15
82 - 85	5

(44) பின்வரும் பரவலில் கீழின மேலின வளர்நிகழ்வெண் வரைகளை ஒரே வரை படத்தில் வரைந்து இடைநிலையளவைக் காண்க.

வயது	20	30	40	50	60	70	80
உறுப்பினர்	3	61	132	150	140	51	3

(45) இந்தியாவின் 1960-61 முதல் 1970-71 வரையுள்ள ஆண்டுகளின் அரிசி, கோதுமை, ஆகிய உணவுப் பொருட்களின் உற்பத்திக் குறியீட்டெண்கள் (1949-50 100) கீழ்க்காணும் காலம்சார் தொடர் வரிசைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் போக்குகளைக் காட்ட ஒரு வரை படம் வரைக.

ஆண்டு	குறியீட்டெண்கள் அரிசி	(1949-50 = 100) கோதுமை
1960-61	123.6	122.9
1961-62	125.5	128.5
1962-63	113.5	114.6
1963-64	126.0	105.4
1964-65	131.5	131.9
1965-66	105.2	119.4
1966-67	105.3	128.2
1967-68	125.8	159.3
1968-69	130.5	158.2
1969-70	130.2	174.7
1970-71	137.6	187.8

(46) இந்தியாவின் வானொலிப் பெட்டிகளின் உற்பத்தி, விற்பனை பற்றிய பின்வரும் காலம்சார் தொடர்களை ஒரே வரை படத்தில் காட்டுக.

ஆண்டு	வானொலி பெட்டிகள் உற்பத்தி	(இலட்சங்களில்) விற்பனை
1962	2.96	2.99
1963	3.63	3.64
1964	4.23	4.12
1965	5.04	5.13
1966	6.83	6.36
1967	8.26	8.00
1968	12.65	11.34
1969	16.92	17.23
1970	18.18	17.72

(47) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு உற்பத்தி அளவுகளுக்கும், ஏற்றுமதி அளவுகளுக்குமுரிய லோரன்ஸ் வளைவுகளை வரைந்து, உற்பத்தி, ஏற்றுமதி ஆகியவற்றின் பங்கீட்டுத் தன்மைகளை ஒப்பிடுக.

ஆண்டு	உற்பத்தி	ஏற்றுமதி
1928	318	262
1929	248	138
1930	352	279
1931	294	208
1932	300	162
1933	295	169
1934	301	187
1935	293	148
1936	368	230
1937	300	162

(48) பின்வரும் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி மதிப்புக்களை லோரன்ஸ் வளைவுகளின் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	மதிப்புக்கள் ஏற்றுமதி	(கோடி ரூபாய்களில்) இறக்குமதி
1929—30	345	258
1930—31	308	206
1931—32	263	176
1932—33	239	203
1933—34	275	182
1934—35	280	210
1935—36	282	216
1936—37	243	199

5. சராசரிகள்

(AVERAGES)

புள்ளியியல் மாறிலிகள் (Statisical constants) :

புள்ளி விவர ஆய்வின் இரு பெரும் பணிகளான பட்டிய லமைத்தல், விளக்கப் படங்கள் வரைதல் ஆகியவை பற்றி முன் அத்தியாயங்களில் விரிவாகக் கண்டோம். சேகரிக்கப்பட்ட பட்ட புள்ளி விவரங்களை எண் கணிதப் பகுப்பாய்வின் மூலம் நீண்ட, சிக்கலான பல புள்ளியியல் வாய்ப்பாடுகளை பயன் படுத்தி, அப்புள்ளி விவரங்களின் முக்கிய மையச் சிறப்பியல்பு களை யெல்லாம் ஒன்றுகத் திரட்டி சுருக்கமான ஆனல் விளக்க மான எண்களாக மாற்றுவதும், பல புள்ளிவிவரத் தொடர் களுக்கிடையே யுள்ள தொடர்புகளைக் கணிதச் சூத்திரங்களாக மாற்றுவதும் புள்ளிவிவர ஆய்வின் மிகப்பெரிய, இன்றியமை யாத பணிகளாகும். சேகரிக்கப்பட்ட எண்ணற்ற புள்ளி விவரங் களை நிகழ்வெண் பரவல்களின் மூலம் இருபதுக்கும் குறைந்த பல பிரிவுகளாகச் சுருக்கிப் பாகுபாடு செய்த போதிலும், அந் நிகழ்வெண் பரவல்களிலிருந்து சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங் களின் மையச் சிறப்பியல்புகளையும், மையப் போக்கினையும் சரியாக அளவிட முடியாது. புள்ளி விவரங்களின் மையச் சிறப்பியல்புகளையும், மையப் போக்கையும் சரியாக அளவிடுதல் புள்ளி விவர ஆய்வுக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகும். சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் மையச் சிறப்பியல்புகள், மையப்போக்கு ஆகிய பண்புகளைத் தன்னுள்ளடக்கிய ஒரு தனி எண்ணை அப்புள்ளி விவரங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட நிகழ் வெண் பரவலிலிருந்து பெறுவது குறிப்பிடப்பட்ட எண் கணிதப் பகுப்பாய்வின் பணிகளுள் ஒன்றுகும். இவ்வாறு, சேகரிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரக் குவியலின் மையச் சிறப் பியல்புகளையும், மையப் போக்கையும் ஒன்றுகத் திரட்டித் தருகின்ற அந்தத் தனி எண்ணுக்குப் 'புள்ளியியல் சராசரி'

(Statistical average) என்று பெயர். இச்சராசரியானது புள்ளி விவரக் குவியலின் மையப் போக்கினை அளவிடுந் தன்மை பெற்றிருப்பதால் 'மையப் போக்கு அளவை' (measure of central tendency) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு, ஒரு புள்ளி விவரக் குவியலின் மையப் போக்கை எடுத்துக் காட்டுகின்ற சராசரியினின்றும் அக்குவியலுள்ள உறுப்புக்கள் எந்த அளவில் மாறுபட்டிருக்கின்றனவென்றும், அவ்வுறுப்புக்கள் யாவும் சராசரியைச் சுற்றிக் குவிந்து கிடக்கின்றனவா என்றும், உறுப்புக்கள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று நெருக்கியிருக்கின்றனவா அல்லது விலகியிருக்கின்றனவா என்றும் சராசரியின் எந்தப் பக்கத்தில் அதிகமான உறுப்புக்கள் குவிந்து காணப்படுகின்றன என்றும் கணக்கியல் மூலம் அளவிடுவது புள்ளியியல் ஆய்வின் அடுத்துள்ள பணிகளாகும். இத்தகைய பண்புகள் யாவும் 'பரவுகைக் கெழு' (Coefficient of dispersion), 'கோட்டக் கெழு' (Coefficient of skewness), 'தட்டை அளவுகள்' (measures of kurtosis) ஆகியவற்றின் மூலம் சுருக்கமாக ஆனால் விளக்கமாகத் திரட்டித் தரப்படுகின்றன. இவை தவிர, ஒரு புள்ளி விவரக் குவியலுக்கும் மற்றொரு புள்ளிவிவரக் குவியலுக்கு மிடையேயுள்ள தொடர்பு 'ஒட்டுறவுக் கெழு' (coefficient of correlation) மூலமும் சுருக்கமாக விளக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு, புள்ளிவிவரக் குவியல்களின் மையப் போக்குகளையும், மற்றுமுள்ள பல்வேறு சிறப்பியல்புகளையும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் சுருக்கமாகத் திரட்டித் தருகின்ற சராசரி, பரவுகைக் கெழு, கோட்டக் கெழு, தட்டையளவு, ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவை 'புள்ளியியல் மாறிலிகள்' அல்லது 'புள்ளியியல் நிலையெண்கள்' (Statistical constants) என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இம் மாறிலிகள் ஒவ்வொன்றும் புள்ளிவிவரக் குவியலின் சில சிறப்பியல்புகளையும், தன்மைகளையும் திரட்டித் தருவதால் 'திரட்டு எண்கள்' (Summary numbers) என்றும் இவைகள் அழைக்கப்படுகின்றன.

புள்ளிவிவர சராசரிகள் (Statistical averages) :

பொதுவாக, ஓர் புள்ளிவிவரக் குவியிலுள்ள மதிப்புக்கள் யாவும் ஓர் குறிப்பிட்ட மாறியின் பல்வேறு மதிப்புக்களாகக் கருதப்படுகின்றன. இப்புள்ளி விவர மாறியின் (Statistical variable) பல்வேறு மதிப்புக்களின் மையப் போக்கை உள்ளபடி எடுத்துக் காட்டக் கூடிய அம்மாறியின் ஒரு தனி மதிப்பே அப்புள்ளி விவரத் தொடரின் சராசரியாகும். இப்புள்ளி விவர சராசரியானது, புள்ளிவிவர ஆய்வுக்குப் பயன்படக்கூடிய வகையில் புள்ளிவிவர மாறியின் எல்லா மதிப்புக்களின்

பிரதிநிதித்துவ மதிப்பாக (representative value) விளங்கும் தன்மை கொண்டதாகயிருக்கும். ஒரு புள்ளிவிவரத் தொடரின் சராசரியானது அத்தொடரின் மதிப்புக்களுள் ஒன்றாகவுமிருக்க லாம்; அல்லது ஏதாவது இரு மதிப்புக்களின் இடை மதிப்பாகவு மிருக்கலாம். புள்ளி விவரத் தொடர்களின் சராசரிகள் பல்வேறு முறைகளில் கணக்கிடப்படுகின்றன. அப் பல்வேறு முறைகளுக்கேற்ப பல்வேறு வகையான சராசரிகள் கிடைக்கின்றன. அவற்றுள் புள்ளிவிவர ஆய்வுக்குப் பெரிதும் பயன்படக் கூடிய சராசரிகள் (1) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean), (2) இடை நிலையளவு (Median), (3) முகட்டளவு (Mode), (4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean) ஆகியவையாகும். மற்றொரு சராசரியாகிய இசைச் சராசரி (Harmonic Mean) என்பது மிகக் குறைந்த அளவிலேயே பயன்படுத்தப்படுகிறது. புள்ளி விவர ஆய்வின் எல்லா நோக்கங்களுக்கும் ஒரே சராசரியே போதுமானதாக யிருக்குமென்று கூற முடியாது. ஆகவே, புள்ளி விவர ஆய்வுக்குப் பொருத்தமான சராசரியைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியது அவசியமாகிறது. ஆனால் எந்த அடிப்படையின் கீழ் ஆய்வுக்குப் பொருத்தமான சராசரியைத் தெரிவு செய்வது? பொருத்தமான சராசரியைத் தெரிவு செய்யப் பயன்படும் வகையில் ஒரு நல்ல, நம்பகமான சராசரிக்கு இருக்க வேண்டிய சில பண்பியல்புகள் நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளன. கைவச மிருக்கும் விவரங்களிலிருந்து பெறப்படுகின்ற சராசரிகளுள் பெரும்பான்மையான பண்புகளை எந்தச் சராசரி ஆய்வுக்குப் பொருந்துகின்ற வகையில் பெற்றிருக்கின்றதோ அந்தச் சராசரியையே ஆய்வுக்குப் பொருத்தமானதாக ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும்.

ஓர் நம்பகமான சராசரியின் பண்பியல்புகள் (Characteristics of a dependable average) :

(1) ஓர் நல்ல சராசரியானது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணிதச் சூத்திரமுடையதாக யிருக்க வேண்டும்.

(2) புள்ளி விவரத் தொடரிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்ததாக யிருக்க வேண்டும்.

ஓர் புள்ளி விவரத் தொடரிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களின் அடிப்படையில் பெறப்படுகின்ற சராசரி தான் அப்புள்ளி விவரத் தொடரின் எல்லா உறுப்புக்களின் பொதுவான பண்பியல் பையும் மையப் போக்கையும் பிரதிபலிப்பதாக யிருக்கும்.

அவ்வாறு எல்லா உறுப்புக்களின் அடிப்படையில் பெறப்படாத எந்தச் சராசரியும் அப்புள்ளி விவரத் தொடரின் பிரதிநிதித்துவ மதிப்பாக யிருக்க முடியாது.

(3) சராசரியானது தெளிவானதாகவும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாகவுமிருக்க வேண்டும்.

(4) கணக்கீட்டில் செலவாகக் கூடிய நேரம், உழைப்பு, பணம் ஆகியவற்றைக் குறைக்கக் கூடிய வகையில் மிக எளிதில் கணக்கிடக் கூடியதாக சராசரி அமைந்திருக்க வேண்டும்.

(5) மேலும் மேலும் இயற்கணிதக் கணக்கீடுகளுக்கு மிக எளிதில் உட்படக் கூடியதாக யிருக்க வேண்டும்.

(6) முனையுறுப்புக்களால் பெரிதும் பாதிக்கப்படாததாக யிருக்க வேண்டும்,

ஓர் புள்ளி விவரத் தொடரிலுள்ள மிகக் குறைந்த மதிப்பு களுடைய உறுப்புகளும், மிக அதிக மதிப்புகளுடைய உறுப்பு களும் முனையுறுப்புகளாகும். மிகக் குறைந்த மதிப்புகளைக் கொண்ட கீழ் முனையுறுப்புகள் சராசரியின் மதிப்பைக் கீழ் நோக்கியும், மிக அதிக மதிப்புகளைக் கொண்ட மேல் முனை யுறுப்புக்கள் சராசரியின் மதிப்பை மேல் நோக்கியும் இழுக்கும் தன்மை வாய்ந்தவை. ஓர் நல்ல சராசரியானது இவ்விரு வகை இழுப்புச் சக்திகளாலும் பெரிதும் பாதிக்கப்படாமல் புள்ளி விவரத் தொடரின் மையப் போக்கைச் சரியாகப் பிரதிபலிக்குந் தன்மை பெற்றதாக யிருக்க வேண்டும்.

(7) கூறெடுத்தல் முறைகளினாலேற்படுகின்ற அசைவு களால் பாதிக்கப்படாமல் நிலைத்தன்மை பெற்றதாக யிருக்க வேண்டும்.

ஓர் இனத் தொகுதி (Population) யிலிருந்து தெரிவு செய்யப் பட்ட கூறு (Sample) ஒன்றின் சராசரியை, அவ்வினை தொகுதியின் பண்புகளை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுத்தும்போது, அக்கூறைத் தெரிவு செய்வதிலேற்படக் கூடிய எந்தச் சிறு தவறினாலும் அதிகமாகப் பாதிக்கப்படாத வகையில் அக்கூறின் சராசரி நிலைத்தன்மை பெற்றிருந்தால் தான் அதன் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுகின்ற இனத் தொகுதியின் பண்புகளும் சரியானவையாக யிருக்கும்.

(1) *கூட்டுச் சராசரி* (Arithmetic Mean—A. M.) :

ஓர் புள்ளி விவரத் தொடரின் கூட்டுச் சராசரி யென்பது, அத் தொடரைச் சார்ந்த எல்லா உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பை உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறப் படுகின்ற வகுத்தற் பலன் ஆகும்.

கூட்டுச் சராசரியைக் கணிப்பதற்கான அடிப்படைகள் :

ஓர் தேர்வில் மூன்று மாணவர்கள் பெற்ற மதிப் பெண்கள் முறையே 38, 52, 60 எனக் கொள்க. மூன்று மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= 38+52+60=150$$

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 3$

மதிப் பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{150}{3}$

இது போல், நான்கு மாணவர்களின் எடைகள் முறையே 45, 57, 49, 61 கிலோ கிராம்கள் என்க.

$$\text{மாணவர்களின் சராசரி எடை} = \frac{\text{மாணவர்களின் மொத்த எடை}}{\text{மாணவர்களின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{45+57+49+61}{4} \text{ கி.கி.}$$

$$= \frac{212}{4} = 53 \text{ கி.கி.}$$

இங்கு, 45 கி. கி., 57 கி. கி., 49 கி. கி., 61 கி. கி. என்ற புள்ளி விவரத் தொடரில் "எடை" என்பது மாறியாகும். 45, 57, 49, 61 கிலோ கிராம்கள் என்பன இம் மாறியின் நான்கு மதிப்புக்களாகும். எடை என்ற மாறியை x என்றும், அம் மாறியின் நான்கு மதிப்புக்களை முறையே x_1, x_2, x_3, x_4 என்றும் குறிப்பிடுக.

எனவே, x_1 = மாறியின் முதலாவது மதிப்பு = 45 கி.கி.

x_2 = மாறியின் இரண்டாவது மதிப்பு = 57 கி.கி.

x_3 = மாறியின் மூன்றாவது மதிப்பு = 49 கி.கி.

x_4 = மாறியின் நான்காவது மதிப்பு = 61 கி.கி.

ஆகவே, மாறியின் மதிப்புக்களின் மொத்தம்

$$= x_1+x_2+x_3+x_4$$
$$= (45+57+49+61) \text{ கி.கி.}$$
$$= 212 \text{ கி.கி.}$$

மாறியின் மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கையை N என்று குறிப்பிடுக.

$$\therefore N=4 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை $= \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{N}$

ஆகும்.

இப்பொழுது, x_i என்பது மாறி x-இன் i-ஆவது மதிப்பைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். எனவே, $i=1$ ஆனால் x_1 என்பது x-இன் முதலாவது மதிப்பையும், $i=2$ ஆனால் x_2 என்பது x-இன் இரண்டாவது மதிப்பையும், $i=3$ ஆனால் x_3 என்பது x-இன் மூன்றாவது மதிப்பையும், $i=4$ ஆனால் x_4 என்பது x-இன் நான்காவது மதிப்பையும், x_4 என்பது x-இன் நான்காவது மதிப்பையும் குறிப்பிடுகின்றன. எனவே i ஆனது 1 முதல் 4 வரையுள்ள முழு எண் மதிப்புக்களைப் பெறும்போது பெறும்போது மாறியாகிய x ஆனது x_1, x_2, x_3, x_4 என்ற நான்கு மதிப்புக்களையும் பெறுகிறது. இவ்வாறு x என்ற ஒரு மாறி பெறுகின்ற பல்வேறு மதிப்புக்களின் கூட்டல் மதிப்பை Σx என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இதை 'சிக்மா x' (Sigma x) என்று வாசிக்க வேண்டும். குறிப்பாக, x-இன் முதல் மதிப்பிலிருந்து நான்காவது மதிப்புவரையுள்ள கூட்டலை

$\sum_{i=1}^{4} x_i$ என்று குறிப்பிடலாம். இதை 'சிக்மா x_i ; $i=1$ முதல் 4 வரை' என்று வாசிக்க வேண்டும். ஆகவே, மேற்கூறப்பட்ட உதாரணத்தில், மாணவர்களின் மொத்த எடை

$$\text{மாணவர்களின் மொத்த எடை} = \sum_{i=1}^{4} x_i = x_1+x_2+x_3=x_4=212$$

∴ மாணவர்களின் சராசரி எடை $= \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{x_1 + x + x_3 + x_4}{4}$

$$= \frac{212}{4} = 53 \text{ கி.கி.}$$

பொதுவாக, மாறி x-இன் சராசரியை $\bar{x}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இதை 'x - பார்' (x - *bar* என்று வாசிக்க வேண்டும்). ஆகவே, மேலே கூறப்பட்ட உதாரணத்தில்,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} xi}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{212}{4} = 53 \text{ கி.கி.}$$

குறிப்பு 1 : மாறி x ஆனது N மதிப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால், அந்த N மதிப்புக்களின் சராசரியை

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + xN}{N}$$

என்று குறிப்பிடலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட மாறியின் சராசரியைக் கணக்கிடும்போது மாறியின் மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கை மிகத் தெளிவாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\sum_{i=1}^{N} x_i$ என்று எழுதுவதற்குப் பதிலாக Σx என்றே எழுதலாம். ஆகவே, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$ என்பது மாறி x-இன் கூட்டுச் சராசரியைக் காணப் பயன் படும் சூத்திரமாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

குறிப்பு 2 : N மதிப்புகளைக் கொண்ட மாறி y-இன் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + yN}{N}$ என்றும், N மதிப்புக்களைக் கொண்ட மாறி d-இன் கூட்டுச் சராசரியை

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d}{N} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots\ldots dN}{N}$$

என்றும் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

பின்வரும் விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

மாணவரின் வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
மதிப்பெண்	28	51	37	43	25	62	68	44

இங்கு மதிப்பெண் என்ற மாறியை x எனக் கொள்க. மாறி x-இன் மதிப்புக்கள் வருமாறு :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x...	28	51	37	43	25	62	68	44

N = மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 8.

$$\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$
$$= 28 + 51 + 37 + 43 + 25 + 62 + 68 + 44$$
$$= 358.$$

$\therefore$ x-இன் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{N} = \dfrac{358}{8} = 44.75$ மதிப்பெண்கள்.

எடுக்காட்டு கணக்கு :

பின்வரும் விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்	56	61	58	61	53	56	58	61	58	60

மதிப்பெண்ணை x என்று குறிப்பிடுக.
N = மாணவரின் எண்ணிக்கை = 10.

கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{N}$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{10}}{}$$
$$= \frac{56 + 61 + 58 + 61 + 53 + 56 + 58 + 61 + 58 + 60}{10}$$
$$= \frac{582}{10} = 58.2 \text{ மதிப்பெண்கள்.}$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைப் பின்வரும் முறையிலும் கணக்கிடலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து இரு மாணவர்கள் 56 மதிப்பெண்கள் பெற்றிருப்பதைக் காணலாம். அதாவது, மாறி x-இன் 56 என்ற மதிப்பு இரு தடவைகள் மடங்கி வருகின்றது. ஆகவே, அவ்விரு மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்ணை $56+56=112$ என்று கூட்டிப் பெறுவதற்குப் பதிலாக $2 \times 56 = 112$ என்று பெருக்கியும் பெறலாம். இது போல் 61 என்ற மதிப்பு மூன்று முறை மடங்கி வருவதால் 61 மதிப்பெண் பெற்ற மூன்று மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்ணை $3 \times 61 = 183$ பெருக்கிக் கணக்கிடலாம். பொதுவாக, x_1 என்ற மதிப்பு f_1 தடவைகள் மடங்கி வந்தால், அந்த f_1 உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பை $f_1 \times x_1 = f_1 \ x_1$ என்று பெருக்கிக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு x என்ற மாறியின் ஒரு மதிப்பு மடங்கிவரும் எண்ணிக்கையை அம்மதிப்பின் நிகழ்வெண் (frequency) என்று கூறலாம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில், 56 என்ற மதிப்பின் நிகழ்வெண் 2 ஆகும்; 61 என்ற மதிப்பின் நிகழ்வெண் 3 ஆகும்; இதுபோல் 58 என்ற மதிப்பின் நிகழ் வெண் 3 ஆகும்; 53 என்ற மதிப்பின் நிகழ் வெண் 1 ஆகும்; 60 என்ற மதிப்பின் நிகழ் வெண் 1 ஆகும். மாறியின் ஒரு மதிப்பை அதற்குரிய நிகழ்வெண்ணால் பெருக்கினால் அந்நிகழ் வெண் குறிக்கின்ற மதிப்புக்களின் மொத்தம் கிடைக்கும். ஆகவே, x_1 என்ற மதிப்பின் நிகழ் வெண் f_1 எனக் கொண்டால், $f_1 \ x_1$ என்பது x_1 என்ற மதிப்பைப் பெற்றுள்ள f_1 உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பாகும். ஆகவே, மேலே உதாரணத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியலிலமைத்துக் கணக்கிடலாம்.

மதிப்பெண் x	நிகழ்வெண் f	மொத்த மதிப்பெண் fx
53	1	53
56	2	112
58	3	174
60	1	60
61	3	183
மொத்தம்	10	582

மேலேயுள்ள பட்டியலில் 10 மாணவர்களும் 53, 56, 58, 60, 61 மதிப்பெண்கள் பெற்ற 5 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளனர். அதாவது மாறி x ஆனது 53, 56, 58, 60, 61 என்ற 5 வெவ்வேறு மதிப்புக்களைப் பெற்றுள்ளது. இம் மதிப்புக்களை முறையே x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 என்றும், இம்மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்வெண்களாகிய 1, 2, 3, 1. 3 ஆகியவற்றை முறையே f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, என்றும் கொண்டால், ஒவ்வொரு பிரிவையும் சேர்ந்த மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்ணை

$$f_1\ x_1 = 1\times 53 = 53,$$

$$f_2\ x_2 = 2\times 56 \times 112,$$

$$f_3\ x_3 = 3\times 58 = 174,$$

$$f_4\ x_4 = 1\times 60 = 60,$$

$$f_5\ x_5 = 3\times 61 = 183$$

என்றும், எல்லா மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்ணை

$$f_1\ x_1 + f_2\ x_2 + f_3\ x_3 + f_4\ x_4 + f_5\ x_5 = 53 + 112 + 174 + 60 + 183 = 582$$

என்றும் கணக்கிடலாம். மேலும் நிகழ்வெண்களின் மொத்தமாகிய

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 + 2 + 3 + 1 + 3 = 10$$

என்பது மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகிறது.

அதாவது, $\mathrm{N} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = \Sigma f$

ஆகவே, $$\bar{x} = \frac{582}{10} = \frac{f_1\ x_1 + f_2\ x_2 + f_3\ x_3 + f_4\ x_4 + f_5\ x_5}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}$$

$$= \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f x}{\mathrm{N}}$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

20 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

71, 35, 43, 27, 52, 76, 12, 27, 48, 55,
48, 12, 52, 48, 27, 35, 55, 35, 52, 43.

முதல் முறை :

மதிப்பெண் x	நிகழ்வெண் f	fx
12	2	24
27	3	81
35	3	105
43	2	86
48	3	144
52	3	156
55	2	110
71	1	71
74	1	74
மொத்தம்	20	851

இங்கு $\Sigma fx = 851$; $N = \Sigma f = 20$.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{851}{20} = 42.55$$ மதிப்பெண்கள்.

இரண்டாவது முறை :

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியை அவ்விவரங்களின் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்தும் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

முதலில் 10-19, 20-29, 30-39, ..., 70-79 என்ற பிரிவுகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலைக் கண்டவாறு அமைத்துக்கொள்ளவும்,

மதிப்பெண்கள்	நிகழ் வெண்
10.19	2
20.29	3
30.39	3
40.49	5
50.59	5
60.69	0
70.79	2
மொத்தம்	20

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் பல்வேறு பிரிவுகளின் மைய மதிப்புக்கள் முறையே 14.5, 24.5, 34.5, 44.5, 54.5, 64.5, 74.5 ஆகும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய மதிப்பும் அப்பிரிவைச் சேர்ந்த மதிப்புக்களின் மையப்போக்கைப் பிரதிபலிக்கிறதென்ற அடிப்படையில் அப்பரவலின் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். அதாவது, முதற்பிரிவைச் சேர்ந்த 2 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை 12, 12 என்று கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக 14.5 14.5 என்று கணக்கிடுகிறோம். இதுபோல், இரண்டாவது பிரிவைச் சேர்ந்த மூன்று மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை 27, 27, 27 என்று கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக 24.5, 24.5, 24.5 என்று கணக்கிடுகிறோம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பிரிவைச் சேர்ந்த உண்மையான மதிப்புக்களுக்குப் பதிலாக அப்பிரிவின் மையமதிப்பை எடுத்துக் கொள்வதால், ஏதாவது ஒரு பிரிவின் மொத்த மதிப்பிலேற்படுகின்ற கூடுதல் இன்னொரு பிரிவின் மொத்த மதிப்பிலேற்படுகின்ற குறைவினால் ஓரளவு சரிக்கட்டப்பட்டுவிடுமாகையால் பரவலின் மொத்த மதிப்பாகிய Σfx-இல் அதிக வித்தியாசம் இருக்காது. எனவே கூட்டுச் சராசரியிலும் அதிக வித்தியாசமிருக்காது, எவ்வளவு அதிகமான எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்ட பரவலானாலும் அவ்வுறுப்புக்களை ஒரு சில பிரிவுகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலில் அமைக்க முடியுமாகையால் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட

முந்திய முறையைவிட இம்முறையைச் சிறந்ததாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, மேலேயுள்ள நிகழ்வெண் பரவலை மைய மதிப்புக்களைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி யெழுதி, கீழ்க் கண்டவாறு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம்.

மதிப்பெண் (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	fx
14.5	2	29.0
24.5	3	73.5
34.5	3	103.5
44.5	5	222.5
54.5	5	272.5
64.5	0	0
75.5	2	149.0
மொத்தம்	20	850.0

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{850.0}{20} = 42.5$$

குறிப்பு :—மேற்கண்ட பரவலின் உண்மையான கூட்டுச் சராசரி 42.55 என்று கண்டோம். இரண்டு விடைகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் புறக்கணிக்கத்தக்க அளவு மிகவும் சிறியதென்பதைக் கவனிக்கவும்.

மூன்றாவது முறை :

மேற்கண்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கீழே விளக்கப் பட்டுள்ள கணிதக் கொள்கையின் அடிப்படையில் சுருக்கமான வழியில் கணக்கிடலாம்.

x என்ற மாறியின் நான்கு மதிப்புக்களை 120, 150, 140, 190 எனக் கொள்க.

$$\therefore \bar{x} = \frac{120+150+140+190}{4} = \frac{600}{4} = 150$$

இப்பொழுது x-இன் மதிப்புக்களிலிருந்து 100-ஐக் கழித்து வரும் மதிப்புக்களை y என்க. அதாவது,

$y = (x-100) = 20, 50, 40, 90$ ஆகும்.

$$\therefore \bar{y} = \frac{20+50+40+90}{4} = \frac{200}{4} 50$$

இதனுடன் 100-ஐக் கூட்டி $\bar{x}$-ஐப் பெறலாம். அதாவது,

$$x = 100+50 = 150$$

அதாவது, $\bar{x} = 100 + \bar{y}$

இப்பொழுது, y-இன் மதிப்புக்களை 10-ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மதிப்புக்களை d என்று குறிப்பிடுக.

அதாவது, $d = y/10$, 2, 5, 4, 9

$$\therefore \bar{d} = \frac{2+5+8+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

ஆனால் y-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் அதற்குரிய d-இன் மதிப்பைப் போல் 10 மடங்காகும். ஆகையால் $\bar{y}$-இன் மதிப்பும் d |இன் மதிப்பைப் போல் 10 மடங்காக யிருக்கும். அதாவது,

$$\bar{y} = 10\,\bar{d} = 10 \times 5 = 50$$

மேலும் x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் அதற்குரிய y-இன் மதிப்பை விட 100 அதிகமாதலால் $\bar{x}$-இன் மதிப்பும் $\bar{y}$-இன் மதிப்பைவிட 100 அதிகமாகயிருக்கும். அதாவது,

$$\bar{x} = 100 + y = 100+50 = 150$$

அதாவது, $\bar{x} = 100 + 10\,\bar{d}$ என்று காண்கிறோம்.

x-இன் மூல மதிப்புக்களிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட 100-ஐ A-என்றும், y-இன் மதிப்புக்களை வகுக்கும் எண்ணாகிய 10-ஐ c-என்றும் குறிப்பிட்டால்,

$$\bar{x} = A + c\,\bar{d}$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம். இச்சூத்திரம் A, c ஆகிய வற்றின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும். இச்சூத்திரத் தின் அடிப்படையில் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம்.

நிகழ்வெண் பரவலின் மைய மதிப்புக்களாகிய 14.5, 20.5, 34.5, 44.5, 54.5, 64.5, 74.5, ஆகியவற்றுள் ஏதாவ தொன்றை A-யின் மதிப்பாகத் தெரிவு செய்து கொள்ளவேண் டும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படும் மையமதிப்பு பரவலின் நடுவிலமைந்ததாகவும், மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட தாகவுமிருந்தால் கூட்டுச் சராசரியின் கணக்கீடு மிகவும் எளிதாகயிருக்கும்.

இங்கு A = 44.5 என்று கொள்வோம். இவ்வாறு பரவலின் மைய மதிப்புக்களிலிருந்து யாதாவதொரு மைய மதிப்பை A-யின் மதிப்பாகத் தெரிவு செய்வதால் அதற்கு யாதாவதொரு ஆதி (arbitrary origin) என்று பெயர். இப்பொழுது $y=x-\text{A}$ $=(x-44\ 5)$ என்று குறிப்பிடுக. ஆகவே, பரவலின் மைய மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்கள் முறையே -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30 ஆகும். இப்பொழுது பிரிவு இடைவெளி

$$d = \frac{y}{c} = \left(\frac{x-\text{A}}{c}\right) = \left(\frac{x-44.5}{10}\right)$$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

பரவலின்மையை மதிப்புக்களுக்குரிய d-மதிப்புக்கள் முறையே -3, -2, -1, -1, 0, 1, 2, 3 ஆகும். பரவலின் மைய மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்வெண்களையே அவற்றிற்குரிய d-மதிப்புக் களின் நிகழ்வெண்களாகக் கொண்டு

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{\text{N}}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் $\bar{d}$-ஐக் கணக்கிட்டுப் பின்னர்,

$$\bar{x} = \text{A}+c\,\bar{d} = 44.5+10\bar{d}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் $\bar{x}$-ஐக் கணக்கிடலாம். இக்கணக் கீடுகள் யாவும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மதிப்பெண் (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-44.5}{10}\right)$	fd
14.5	2	−3	−6
24.5	3	−2	−6
34.5	3	−1	−3
44.5	5	0	0
54.5	5	1	5
64.5	0	2	0
74.5	2	3	6
மொத்தம்	20		−4

$$N = 20, \ \Sigma f d = -4.$$

$$\therefore \ \overline{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = \frac{-4}{20} = -0.2$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= A + c\,\overline{d} \\ &= 44.5 + 10\,(-0.2) \\ &= 44.5 - 2 \\ &= 42.5. \end{aligned}$$

குறிப்பு :—மைய மதிப்புக்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற A-யின் மதிப்பை அடிக்கோடிட்டுக் கொள்ளுதல் நன்று. மேலும், ஏறு வரிசையிலமைந்த சம பிரிவிடைவெளி கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் d-யின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடாமலே பின்வருமாறு எழுதிக் கொள்ளலாம். யாதாமொரு ஆதியாகிய A-யின் மதிப்புக்கு நேர் பூச்சியமும், அதற்கு மேலேயுள்ள பிரிவுகளுக்கு எதிரே கீழிருந்து மேலாக —1, —2, —3, ...என்றும், அதற்குக் கீழேயுள்ள பிரிவுகட்கு எதிரே மேலிருந்து கீழாக 1, 2, 3,......என்று எழுதிக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 31 : மின் நுகர்வு பற்றிய கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மின் நுகர்வு (கி. வாட்) ...	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	0-50
நுகர்வோர் எண்ணிக்கை ...	10	25	30	20	15	100

(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

தீர்வு :

மின் நுகர்வு (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-25}{10}\right)$	fd
5	10	−2	−20
15	25	−1	−25
25	30	0	0
35	20	1	20
45	15	2	30
மொத்தம்	100		5

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{5}{100} = 0.05$$

$\bar{x} = A + c\bar{d}$; இங்கு $A = 25$, $c = 10$

$= 25 + 10\ (0.05)$

$= 25 + 0.5$

$= 25.5$ கி. வாட்.

மாதிரி 32 : பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவல் 700 தொழிலாளர் குடும்பங்களின் மாதவருவாயைத் தருகிறது. அதற்குரிய கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மாத வருமானம் (ரூபாயில்)		குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
110 — 115	—	60
115 — 120	—	120
120 — 125	—	210
125 — 130	—	201
130 — 135	—	70
135 — 140	—	25
140 — 145	—	11
145 — 150	—	3

(மதுரை, பி.ஏ., 1971 செப்.)

தீர்வு :

மாத வருமானம் (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-122.5}{5}\right)$	fd
112.5	60	−2	−120
117.5	120	−1	−120
122.5	210	0	0
127.5	201	1	201
132.5	70	2	140
137.5	25	3	75
142.5	11	4	44
147.5	3	5	15
மொத்தம்	700		235

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{235}{700} = 0.33$$

$$\bar{x} = A + c\bar{d}$$

$$= 122.5 + 5\ (0.33)$$

$$= 122.5 + 1.65$$

$$= 124.15$$

திறந்த முனைப் பிரிவு—இடைவெளிகள் கொண்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காணல்.

மாதிரி 33 :

பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

பண்ணையின் பரப்பு (ஏக்கரில்)		வைத்திருப்போர் எண்ணிக்கை
50 வரை	—	57
50 - 100	—	256
100 - 150	—	132
150 - 200	—	25
200 - 250	—	10
250க்கு மேல்	—	12

(சென்னை பி.காம்., 1968 செப்.)

தீர்வு :

இப் பரவலில் முனைப் பிரிவுகளிரண்டும் திறந்த இடைவெளி களுடனிருக்கின்றன. முதற் பிரிவு திறந்த இடைவெளியுட னிருந்தால் அப்பிரிவை அதற்கு அடுத்த பிரிவின் இடை வெளியை இடைவெளியாகக் கொண்ட பிரிவாகவும், இறுதிப் பிரிவு திறந்த இடைவெளியுடனிருந்தால் அப்பிரிவை அதற்கு முந்திய பிரிவின் இடைவெளியை இடைவெளியாகக் கொண்ட பிரிவாகவும் மாற்றி எழுதிக்கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, மேற்கண்ட பரவலின் முதற்பிரிவை 0-50 என்றும், இறுதிப் பிரிவை 250—300 என்றும் கொண்டு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

மைய மதிப்பு x	நிகழ்வெண் f	$d=\left(\frac{x-75}{50}\right)$	fd
25	57	-1	-57
75	256	0	0
125	132	1	132
175	25	2	50
225	10	3	30
275	12	4	48
மொத்தம்	492		203

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{203}{492} = 0.412$$

$$\bar{x} = A + c\,\bar{d} = 75 + 50\,(0.412) = 75 + 20.6$$
$$= 95.6 \text{ ஏக்.}$$

சமனற்ற பிரிவு இடைவெளிகளுடன் கூடிய பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காணல் :

நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் சமனற்றவையாக யிருப்பின், $d = x - A$ என்று d-யின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட வேண்டும். ஆகவே, $\bar{x} = A + \bar{d}$ ஆகும்.

மாதிரி 34 :

பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க

பிரிவு	நிகழ்வெண்
0 — 3	4
3 — 6	8
6 — 10	10
10 — 12	14

12 — 15	16
15 — 18	20
18 — 20	24
20 — 24	14
24 — 28	11
28 — 30	10
30 — 36	6

தீர்வு :

மைய மதிப்பு x	நிகழ்வெண் f	$d=(x-19)$	fd
1.5	4	—17.5	— 70
4.5	8	—14.5	—116
8	10	—11	—110
11	14	—8	—112
13.5	16	—5.5	— 88
16.5	20	—2.5	— 50
19	24	0	0
22	14	3	42
26	11	7	77
29	10	10	100
33	6	14	84
மொத்தம்	137		—243

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = \frac{-243}{137} = -1.77$$

$$\bar{x} = A+\bar{d} = 19+(-1.77) = 19-1.77=17.23$$

குறிப்பு :—அசம இடைவெளிகளுடன் கூடிய நிகழ்வெண் பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகளை $\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{N}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடலாம்.

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள் (Merits of the Mean) :

(1) கூட்டுச் சராசரியானது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணிதச் சூத்திரத்தைப் பெற்றிருக்கிறது.

(2) பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்துள்ளது.

(3) கூட்டுச் சராசரியின் வரையறையும் சூத்திரமும் தெளிவாகவும் எளிதில் புரிந்துகொள்ளக் கூடியனவாகவுமிருக்கின்றன.

(4) சுருக்கு வழியின் மூலம் கூட்டுச் சராசரியை மிக எளிதில் கணக்கிடலாம்.

(5) கூட்டுச் சராசரியின் சூத்திரம் புள்ளியியற் கணக்கீடுகளில் மேலும் மேலும் பயன்படத் தக்கவாறு அமைந்துள்ளது.

(6) கூறெடுத்தல் முறையினாலேற்படுகின்ற அசைவுகளினால் பாதிக்கப்படாத வகையில் நிலைத்தன்மை பெற்றிருக்கிறது.

(7) பரவலிலுள்ள உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பும், உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் தெரிந்தால் கூட்டுச் சராசரியை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

(8) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையினால் பெருக்கி உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\left(\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} \quad \therefore \Sigma fx = N\bar{x}\right)$$

(9) பல பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகளையும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளையும் கொண்டு அவற்றின் கூட்டுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். (இச் சிறப்பியல்பு பற்றி பரவுகை யென்ற அடுத்த அத்தியாயத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது).

(10) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்ற எல்லா உறுப்புக்களின் விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_N$ என்ற N உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x}{N}$$

அல்லது, $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N = \Sigma x + N\bar{x}$.

இப்பொழுது, ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் $\bar{x}$ஐக் கழித்தால் $(x_1 - \bar{x})$, $(x_2 - \bar{x})$, $(x_3 - \bar{x})$ $(x_N - \bar{x})$என்ற விலக்கங்கள் கிடைக்கின்றன. இவ்விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \ldots\ldots + (x_N - \bar{x})$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N) - N\bar{x}$$
$$= N\bar{x} - N\bar{x} = 0.$$

கூட்டுச் சராசரியின் குறைபாடுகள் (Demerits of the A.M.):

(1) மிகப் பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய மதிப்புக்களையுடைய சில முனையுறுப்புக்களால் கூட்டுச் சராசரி பெரிதும் பாதிக்கப்படுகிறது.

(2) கூட்டுச் சராசரியானது பொதுவாக, பரவலிலுள்ள எந்த உறுப்பின் மதிப்பையும் பெற்றிருக்காது.

(3) பரவலிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒரே சீரான தன்மையுடனில்லாவிடில், பரவலின் எந்த உறுப்பும் பெற்றிராத ஒரு மதிப்பை மையப் போக்கு மதிப்பாகக் கூட்டுச் சராசரி கொடுக்கும்.

(4) நிகழ்வெண் வரையிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைப் பெற முடியாது.

(5) விகிதங்கள், விகித மாறுபாடுகள் ஆகியவற்றின் மையப் போக்கை அளவிட கூட்டுச் சராசரி பயன்படாது.

(6) பரவலிலுள்ள ஏதாவது ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு தெரியாவிடினும் அல்லது சரியாகத் தெரியாவிடினும், அல்லது விடுபட்டிருந்தாலும் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட முடியாது.

(7) விவரங்களைப் பார்த்த அளவிலேயே கூட்டுச் சராசரியைக் காண முடியாது.

கூட்டுச் சராசரியின் பயன்கள் (Use of the A.M.) :

(1) ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட சராசரியைத் தான் பயன்படுத்த வேண்டுமென்ற நோக்கங் கொண்ட ஆய்வுகள் தவிர மற்ற பொதுவான ஆய்வுகள் எல்லாவற்றிலும் கூட்டுச் சராசரி மிகவும் தாராளமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(2) கூறெடுத்தல் முறைகளாலேற்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்களால் பாதிக்கப்படாமல் நிலைத்தன்மையுடனிருப்பதால் கூட்டுச் சராசரியானது. பெருங்கூறு கொள்கைகளில் (Theory of large samples) பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(3) பலபரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து அப்பரவல்களைக் கொண்டமைக்கப்பட்ட கூட்டுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட முடியுமென்று பண்பின் காரணமாகக் கூட்டுச் சரியானது எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட இனத் தொகுதிகளின் ஆய்வுகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(4) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கி அப்பரவலிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பைப் பெறலாமென்ற பண்பின் காரணமாகக் கூட்டுச் சராசரி தொழிற்றுறைகளில் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(5) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணிதச் சூத்திரத்தைப் பெற்றிருப்பதன் காரணமாக ஏனைய புள்ளி விவர மாறிலிகளின் கணக்கீடுகளிலும், புள்ளிவிவர ஆய்வின் ஏனைய கணக்கீடுகளிலும் கூட்டுச் சராசரி பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(6) சிலவகைக் குறியீட்டெண்களின் தயாரிப்புகளில் கூட்டுச் சராசரி பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(7) நிகழ் தகவு கொள்கை (Theory of probability)யிலும் புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு (Statistical quality control) முறைகளிலும் கூட்டுச் சராசரி பெரிதும் பயன்படுகிறது,

வினாத்தாள் 5.

1. புள்ளிவிவர சராசரி யென்றுலென்ன? ஒரு நல்ல சராசரியின் சிறப்பியல்புகள் யாவை?
(சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்., 69 ஏப்,)

2. ஒரு நம்பகமான சராசரிக்குத் தேவையான பண்புகள் யாவை?
(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

3. மையப் போக்கு என்பதன் பொருளை விளக்குக.
(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

4. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் மையப் போக்கு என்பதன் மூலம் அறியப்படுவது யாது?
(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

5. புள்ளியலில் சராசரிகளின் பணியென்ன? ஒரு நல்ல சராசரியின் முக்கியமான பண்புகளென்ன? ஒரு நல்ல சராசரியென ஏற்றுக்கொள்ள கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்புப் பண்புகள் யாவை யென விளக்குக.
(மதுரை எம்.ஏ. 1970; பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

6. மையப் போக்கை அளவிடுவதற்கு, கூட்டுச் சராசரியை ஏற்றுக் கொள்வதால் பெறப்படும் சிறப்பான நன்மைகள் யாவை?
(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

பயிற்சி 3.

(1) ஒரு தேர்வில் பி.காம். மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் கீழேயுள்ள பட்டியலில் காணலாம். மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
மதிப்பெண்	38	42	17	29	73	54	60	55

(2) ஒரு கிளை அலுவலகத்தில் வேலை செய்யும் அலுவலர்களின் மாதச் சம்பளங்கள் பின் வருமாறு:

மாதச் சம்பளம் (ரூபாய்களில்) 10, 17, 29, 95, 95, 100, 100, 175, 250, 750.

கூட்டுச் சராசரி சம்பளத்தைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் வாழ்கின்ற 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானங்கள் பின்வருமாறு :

குடும்ப எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
வருமானம் (ரூபாய்களில்)	85	70	10	75	500	84	40	250	40	36

கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

(4) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

மாறி	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
நிகழ்வெண்	20	43	75	67	72	45	39	9	8	6

(5) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பின் மதிப்பு	4	6	8	10	12	14	16
நிகழ்வெண்	2	4	5	3	2	1	4

(6) ஒரு கவிதையிலுள்ள சொற்களின் எழுத்துக்கள் பற்றிய பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அக்கவிதைச் சொற்களின் கூட்டுச் சராசரி எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	7	8	9
சொற்களின் எண்ணிக்கை	9	5	5	9	4	2	4	-	1

(7) பின்வரும் பட்டியல் விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பைக் காண்க.

அளவு (அங்.)	12	13	14	15	16	17	18	19	20
நிகழ்வெண்	4	19	30	63	66	29	18	1	1

(8) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
நிகழ்வெண்	3	4	8	10	7	5

(9) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண்	4	8	13	10	5

(10) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மாதச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	25-30	31-36	37-42	43-48	49-54	55-60	61-66
நிகழ்வெண்	2	2	3	10	5	2	1

(11) பின்வரும் பட்டியல் விவரங்களைக் கொண்டு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மாத்திரைகள்	குணமடைந்தவர் எண்ணிக்கை
4 — 8	11
8 — 12	13
12 — 16	16
16 — 20	14
20 — 24	14
24 — 28	9
28 — 32	17
32 — 36	6
36 — 40	4

(12) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்	நிகழ்வெண்
20 — 22	3
17 — 19	5
14 — 16	8
11 — 13	4
8 — 10	3
5 — 7	4
2 — 4	3

(13) பராளுமன்றத்தின் 542 உறுப்பினர்களின் வயது பற்றிய பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வயது	உறுப்பினர் எண்ணிக்கை
20 — 30	3
30 — 40	61
40 — 50	132
50 — 60	153
60 — 70	140
70 — 80	51
80 — 90	2

(14) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
310 — 319	1
300 — 309	2
290 — 299	
280 — 2894	1
270 — 279	6
260 — 269	12
250 — 259	11
240 — 249	8
230 — 239	2
220 — 229	–
210 — 219	3

(15) பின்வரும் வயதுப் பரவல்களிலிருந்து ஆண்கள், பெண்கள் ஆகியோரின் கூட்டுச் சராசரி வயதுகளைக் காண்க

வயதுப் பிரிவுகள் (ஆண்டுகள்)	ஆண்கள் (மில்லியன்கள்)	பெண்கள் (மில்லியன்கள்)
0	6	6
1 — 4	18	18
5 — 14	45	42
15 — 24	31	30
25 — 34	28	27
35 — 44	22	20
45 — 54	16	14
55 — 64	9	9
65 — 74	4	4
75 மேலும்	2	2

(16) பின்வரும் வளர் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
5க்குக் கீழ்	5
10 ,,	9
15 ,,	17
20 ,,	29
25 ,,	45
30 ,,	60
35 ,,	70
40 ,,	78
45 ,,	83
50 ,,	85

(17) பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
0 — 60	6
60 — 120	54
120 — 180	58
180 — 240	41
240 — 300	26
300 — 360	18
360 — 420	6
420 — 480	5
480 — 540	2

(18) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மைய மதிப்பு x... கி.கி. எடை	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87
நிகழ்வெண் f..	12	76	121	157	221	200	178	140	71	25	4

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(19) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

மாத வருமானம் (ரூபாய்கள்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
50 — 60	8
60 — 70	15
70 — 90	24
90 — 100	32
100 — 120	48
120 — 150	13
150 — 200	5

(20) 100 வீடுகளின் மாத வாடகைகளின் கூட்டுச் சராசரி ரூ. 15.86. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ரூ. 20 மாத வாடகையுள்ள வீடுகள் எத்தனை யென்று காண்க.

வீட்டு வாடகை (ரூபாய்)	வீடுகளின் எண்ணிக்கை
10	25
12	17
13	13
17	15
20	?
25	8
28	6
30	2

2. இடைநிலையளவு (Median)

ஒரு புள்ளி விவரத் தொடரின் இடைநிலையளவு (median) என்பது, ஏறு வரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட அத்தொடரின் நடு மதிப்பு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஏறு வரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையிலமைக்கப்பட்ட ஒரு தொடரின் இடைநிலையளவு என்பது

அந்த இடைநிலை மதிப்புக்குக் குறைவான மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் கூடுதலான மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாகயிருக்குமாறு அமையப்பெற்ற மதிப்பாகும். ஆகவே, ஒரு புள்ளி விவரத் தொடரின் இடைநிலையளவைக்காண, அத்தொடரை ஏறு வரிசையில் (அல்லது இறங்கு வரிசையில்) எழுதி அதிலுள்ள நடுமதிப்பை அத்தொடரின் இடைநிலையளவாகக் கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, ஐந்து மாணவர்களின் உயரங்கள் முறையே 48", 53", 51", 45", 60" எனக் கொள்க. இந்த ஐந்து மதிப்புக்களையும் ஏறு வரிசையில் 45", 48", 51", 53", 60", என்று எழுதிக் கொள்க. இந்த வரிசையின் நடு மதிப்பு மூன்றுவது மதிப்பாகிய 51" ஆகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து மாணவர்களின் இடைநிலை உயரம் 51" ஆகும். ஆனல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கை இரட்டையாக (even) யிருந்தால் இரண்டு நடு மதிப்புக்களிருக்கும். இவ்விரு நடு மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியானது இடைநிலையளவாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. உதாரணமாக, ஆறு மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் முறையே 27, 68, 54, 77, 35, 60 எனக் கொள்க. இவற்றை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

27, 35, 54. 60, 68, 77

இத்தொடரின் நடு மதிப்புக்கள் மூன்றுவது, நான்காவது மதிப்புக்களாகிய 54, 60 ஆகும். ஆகவே,

$$\text{இடைநிலையளவு} = \frac{\text{3-ஆவது மதிப்பு} + \text{4-ஆவது மதிப்பு}}{2}$$

$$= \frac{54+60}{2} = \frac{114}{2} = 57.$$

அதாவது, இடைநிலையளவை 3·5-ஆவது மதிப்பெனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: ஏறு வரிசையில் (அல்லது இறங்கு வரிசையில்) எழுதப்பட்ட ஆனல் நிகழ்வெண் பரவலில் அமைக்கப்படாத ஒரு தொடரில் N உறுப்புக்களிருந்தால் அத்தொடரின் $\left(\frac{N+1}{2}\right)$-ஆவது உறுப்பின் மதிப்பை அத்தொடரின் இடைநிலை மதிப்பாகக் கொள்ளலாம். மேற் கூறப்பட்ட உதாரணங்

களில், N = 5 ஆகியிருக்கும்போது இடைநிலையளவு $\frac{5+1}{2}$ = 3 ஆவது மதிப்பு என்றும், N = 6 ஆகியிருக்கும்போது இடைநிலையளவு $\frac{6+1}{2}$ = 3·5 ஆவது மதிப்பு என்றும் காணலாம்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு :

பின்வரும் தொடரின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

மாணவரின் வரிசை	1	2	3	4	5	6	7	8	9
உயரம் (அங்குலம்)	56	61	58	61	53	56	58	61	58

தீர்வு :

பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 9 மதிப்புக்களையும் ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

ஏறுவரிசையில் மதிப்புக்கள் :

53, 56, 56, 58, 58, 58, 61, 61, 61

N = 9 ∴ நடுமதிப்பு = $\frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2}$ = 5ஆவது மதிப்பு =

∴ இடைநிலையளவு = 58 அங்குலம்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு :

பின்வரும் தொடரின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மாணவர் எடை (கி. கி.)	42	56	43	59	61	48	52	60	57	55

தீர்வு :

ஏறு வரிசையில் மதிப்புக்கள் :

42, 43, 48, 52, 55, 56, 57, 59, 60 61

N = 10 ∴ நடு மதிப்பு = $\frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2}$ = 5.5ஆவது மதிப்பு

= $\frac{\text{5 ஆவது மதிப்பு} + \text{6 ஆவது மதிப்பு}}{2}$

= $\frac{55+56}{2}$ = 55.5

∴ இடைநிலையளவு = 55.5 அங்.

நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு :

நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத ஆனால் ஏறு வரிசையில் (அல்லது இறங்கு வரிசையில்) அமையப்பெற்ற ஒரு தொடரில் N உறுப்புக்களிருப்பின், அத்தொடரின் நடு உறுப்பாகிய $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பே அத்தொடரின் இடைநிலையளவு என்று கண்டோம். ஆனால், ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு என்பது அந்த இடைநிலை மதிப்புக்குக் குறைவான மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும், கூடுதலான மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாயிருக்குமாறு அப்பரவலின் உறுப்புக்களை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய மதிப்பு என்று வரையறுக்கப் படுகிறது. ஆனால், நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படுகின்ற மதிப்புக்கள் யாவும் தொடர் மாறியின் மதிப்புக்களாகக் கருதப் படுகின்றமையால், மொத்த உறுப்புக்களுள் சரிபாதி உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களைத் தனக்குக் குறைந்தனவாயும், மறுபாதி உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களைத் தனக்குக் கூடினவையாகவும் கொண்ட ஓர் மதிப்பே அப்பரவலின் இடைநிலையளவாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே, N உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஓர் நிகழ்வெண் பரவலில், இடைநிலையளவிற்குக் கீழே $\frac{N}{2}$ உறுப்புக்களும், இடைநிலையளவிற்கு மேலே $\frac{N}{2}$ உறுப்புக்களுமிருக்குமென்று கொள்ளலாம். இந்த 50-50 பண்பின் காரணமாக ஓர் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவை அப்பரவலின் எந்த முனையில் தொடங்கிக் கணக்கிட்டாலும் ஒரே மதிப்பையே இடைநிலையளவாகப் பெற முடியுமென்பது வெளிப்படையாகத் தெரிகிறது. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவை அப்பரவலின் வளர் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து கணக்கிடலாம். இடைநிலையளவு பொதுவாக M அல்லது இ. அ. என்று குறிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு :

பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

வருமானம் (ரூபாயில்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
100 — 200	15
200 — 300	18
300 — 400	30
400 — 500	20
500 — 600	17

இப்பரவலின் வளர் நிகழ்வெண் பரவலைப் பின்கண்டவாறு அமைந்துக் கொள்க.

வருமானம் (ரூபாய்)	நிகழ்வெண்	வருமானம் (ரூபாய்குக் கீழ்)	வளர் நிகழ்வெண்
100 — 200	15	200க்குக் கீழ்	15
200 — 300	18	300 ,,	33
300 — 400	30	400 ,,	63
400 — 500	20	500 ,,	83
500 — 600	17	600 ,,	100
மொத்தம்	100		

N = மொத்த நிகழ்வெண் = 100.

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50.$$

ஆகவே, இடைநிலை வருமானத்திற்குக் குறைவாக 50 குடும்பங்களும், அதிகமாக 50 குடும்பங்களும் இருக்க வேண்டும். வளர் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து, ரூ. 300க்குக் குறைந்த வருமானமுள்ள குடும்பங்கள் 33 என்றும் ரூ. 300க்கும் ரூ. 400க்குமிடைப்பட்ட வருமானம் உள்ள குடும்பங்கள் 30 என்றும் காண்கிறோம். ஆகவே, இந்த 30 குடும்பங்களின் வருமானங்களை ஏறுவரிசைப் படுத்தி முதல் 17 (=50—33) குடும்பங்களின் வருமானங்கள் எந்த மதிப்புக்குக் குறைவாக உள்ளன என்று கண்டால், அந்த மதிப்புக்குக் குறைவாக 50 (=33+17) குடும்பங்களின் வருமானங்களிருக்குமென்றறியலாம். இவ்வாறு காணப்படுகின்ற மதிப்புத்தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலின் இடைநிலையளவாகும். இந்த இடைநிலையளவு 300—400 என்ற பிரிவினுள்ளிருப்பதால், இப்பிரிவு ' இடைநிலைப் பிரிவு ' (median class) என்றழைக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது, 300—400 பிரிவிலுள்ள குடும்பங்கள் 30 ஆகும்.

அதாவது, 30 குடும்பங்களின் வருமான வித்தியாசம் = ரூ. 100.

∴ முதல் 17 குடும்பங்களின் வருமான வித்தியாசம் $= \frac{100}{30} \times 17 =$ ரூ. 56.67 அதாவது, 300 – 400 என்ற பிரிவிலுள்ள 30 குடும்பங்களுள் 17 குடும்பங்கள் ரூ. 300 முதல் ரூ. 356.67 வரை வருமானமுள்ளவை யென்று அறிகிறோம். ஆகவே, மொத்தமுள்ள 100 குடும்பங்களுள் 33 + 17 = 50 குடும்பங்கள் ரூ. 356.67-க்குக் குறைவான வருமானமுடையவை. எனவே, 100 குடும்பங்களின் இடைநிலை வருமானம் ரூ. 356.67 ஆகும். அதாவது, மேற்கண்ட பரவலின் இடைநிலையளவு

$$= 300 + 56.67$$

$$= 300 + \frac{100}{30} \times 17$$

$$= 300 + \frac{100}{30}\ (50 - 33)$$

என்ற கணக்கீட்டின்படிப் பெறப்படுகிறது. இதில் 300 என்பது 300—400 என்ற இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லையாகும்; இதை l என்று குறிப்பிடுக. 100 என்பது இடைநிலைப் பிரிவின் இடைவெளியாகும்; இதை c என்று குறிப்பிடுக. 30 என்பது இடைநிலைப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணாகும்; இதை f என்று குறிப்பிடுக. 50 என்பது மொத்த நிகழ்வெண்ணில் பாதியாகும்; அதாவது, $\frac{N}{2}$ ஆகும். 33 என்பது இடைநிலைப்பிரிவின் கீழ் எல்லை 300க்குரிய வளர் நிகழ்வெண்ணாகும்; இதை m என்று குறிப்பிடுக. இக்குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட இடைநிலையளவுக்குரிய கணக்கீட்டை ஒரு சூத்திரமாக எழுதலாம். அதாவது,

$$\text{இடைநிலையளவு (இ. அ.)} = 300 + \frac{100}{30}\ (50 - 33)$$

$$= l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

என்று ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவைக் கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரமாகும்.

குறிப்பு 1 :

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு பின்வரும் இரு தற்கோள்களின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்படுகிறது.

(i) நிகழ்வெண் பரவலின் மாறி ஒரு தொடர் மாறியாகக் (continuous variable) கருதப்படுகிறது.

(ii) ஒவ்வொரு பிரிவைச் சேர்ந்த உறுப்புக்களும் அவற்றின் மதிப்புகளுக்கேற்ப ஏறுவரிசை (அல்லது இறங்கு வரிசை)யில் ஒரே சீராக அப்பிரிவு இடைவெளியில் பரவியிருப்பதாகக் கருதப்படுகின்றன.

குறிப்பு 2 :

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலை இறங்கு வரிசையில் எழுதி மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவலின் மூலம் மேலே விளக்கப் பட்ட முறையைப் பின்பற்றி இடைநிலையளவைக் கணக்கிட்டாலும் அதே மதிப்புத்தான் கிடைக்கும் என்பதை எளிதில் காண முடியும். ஆகவே,

$$\text{இடைநிலையளவு} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{N}{2}-m\right)$$

என்ற சூத்திரம் இடைநிலையளவின் வரையறைக்குப் பொருந்துமாறு அமைந்துள்ளதால் இதையே இடைநிலையளவின் சரியான சூத்திரமாகக் கொள்ளலாம். நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத புள்ளி விவரத் தொடர்களின் இடைநிலையளவு $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பாகயிருந்த போதிலும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவைக் காண மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் $\frac{N}{2}$ என்பதையே பயன்படுத்துகிறோமென்பதைக் கருத்திற் கொள்க. ஏனெனில், நிகழ்வெண் பரவலில் $\frac{N}{2}$ உறுப்புக்களைத் தனக்குக் கீழே கொண்டுள்ள மதிப்பை இடைநிலையளவாக மேற்கண்ட சூத்திரத்தின் மூலம் பெறுகிறோம். மேலும், இச்சூத்திரத்தில் $\frac{N}{2}$ க்குப் பதிலாக $\frac{N+1}{2}$ ஐப் பிரதியிட்டு இடைநிலையளவைக் கணக்கிட்டால், பரவலின் இரு முனைகளிலிருந்தும் தொடங்கிப் பெறப்படுகின்ற இரு இடைநிலை மதிப்புக்களும் சமமாகயில்லாமல் வெவ்வேறாகயிருக்குமென்பதை எளிதில் கணக்கிட்டுச் சோதித்துக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 35 :

பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

பிரிவு எல்லை	நிகழ்வெண்
0 — 10	42
10 — 20	69
20 — 30	85
30 — 40	103
40 — 50	137
50 — 60	72
60 — 70	39
70 — 80	31
80 — 90	22

தீர்வு :

இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுவதற்கு, நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு எல்லைகள், நிகழ்வெண்கள், வளர் நிகழ்வெண்கள், ஆகியவையடங்கிய பட்டியலமைத்தால் போதும்.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்	வளர் நிகழ்வெண்
0 — 10	42	42
10 — 20	69	111
20 — 30	85	196
30 — 40	103	299
40 — 50	137	436
50 — 60	72	508
60 — 70	39	547
70 — 80	31	578
80 — 90	22	600
மொத்தம்	600	

$$N = 600 \quad \therefore \frac{N}{2} = 300$$

300 ஆவது மதிப்பு 40—50 என்ற பிரிவிலிருப்பதால் அதுவே இடைநிலைப் பிரிவு ஆகும்.

$\therefore$ l = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை = 40

c = இடைநிலைப் பிரிவின் இடைவெளி = 10

f = இடைநிலைப் பிரிவின் நிகழ்வெண் = 137

m = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லைக்குரிய நிகழ்வெண்

= 40க்குக் குறைந்த மதிப்புகள் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை

= 299

$$\therefore \text{இடைநிலையளவு} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 40 + \frac{10}{137}(300-299)$$

$$= 40 + \frac{10}{137}(1)$$

$$= 40 + 0.07$$

$$= 40.07$$

மாதிரி 36 :

பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுக.

கிலோவில் எடை	நிகழ்வெண்
91 — 100	13
101 — 110	52
111 — 120	79
121 — 130	133
131 — 140	121
141 — 150	64
151 — 160	27
161 — 170	11

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு :

கிலோவில் எடை	நிகழ்வெண்	வ. நி.
90.5 — 100.5	13	13
100.5 — 110.5	52	65
110.5 — 120.5	79	144
120.5 — 130.5	133	277
130.5 — 140.5	121	398
140.5 — 150.5	64	462
150.5 — 160.5	27	489
160.5 — 170.5	11	500

$N=500 \therefore \frac{N}{2}=250$

ஆகவே, 120.5—130.5 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு ஆகும்.

$\therefore l=120.5,\ c=10,\ f=133,\ m=144$

$$\therefore \text{இடைநிலையளவு} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{N}{2}-m\right)$$

$$=120.5+\frac{10}{133}(250-144)$$

$$=120.5+\frac{10}{133}(106)$$

$$=120.5+\frac{1060}{133}$$

$$=120.5+7.97$$

$$=128.47 \text{ கி.கி.}$$

மாதிரி 37 :

பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுக.

...க்குக் குறைந்த மதிப்பெண்கள்	80	70	60	50	40	30	20	10
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	100	90	80	60	32	20	13	5

(மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவலைச் சாதாரண நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி வளர் நிகழ்வெண்களுடன் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலமைத்துக் கொள்க.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	வ. நி.
0 — 10	5	5
10 — 20	8	13
20 — 30	7	20
30 — 40	12	32
40 — 50	28	60
50 — 60	20	80
60 — 70	10	90
70 — 80	10	100

$N=100 \quad \therefore \frac{N}{2}=50$ ஆகவே, 40—50 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு $l=40$, $c=10$, $f=28$, $m=32$

$$\text{இடைநிலையளவு} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{N}{2}-m\right)$$

$$=40+\frac{10}{28}(50-32)$$

$$=40+\frac{10}{28}(18)$$

$$=40+\frac{180}{28}$$

$$=40+6.43$$

$$=46.43.$$

மாதிரி 38 :

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலையளவைக் காண்க.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
0 — 3	4
3 — 6	8
6 — 10	10
10 — 12	14
12 — 15	16
15 — 18	20
18 — 20	24
20 — 24	14
24 — 28	11
28 — 30	10
30 — 36	6

(மதுரை பி.காம். 1969 செப்.)

தீர்வு :

பிரிவு	நி.	வ. நி.
0 — 3	4	4
3 — 6	8	12
6 — 10	10	22
10 — 12	14	36
12 — 15	16	52
15 — 18	20	72
18 — 20	24	96
20 — 24	14	110
24 — 28	11	121
28 — 30	10	131
30 — 36	6	137

$N = 137 \quad \therefore N/2 = 137/2 = 68.5.$

$\therefore$ 15—18 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு.

$l=15,\ c=3,\ f=20,\ m=52$

$$\text{இ.அ.} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 15 + \frac{3}{20}\,(68.5-52)$$

$$= 15 + \frac{3}{20}\,(16.5)$$

$$= 15 + \frac{49.5}{20}$$

$$= 15 + 2.475$$

$$= 17.475.$$

மாதிரி 39 :

பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

நாட்கூலி (ரூபாய்)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
தொழிலாளர் எண்ணிக்கை	10	15	20	25	30	32	28	22	15	10

தீர்வு :

நாட்கூலி	நி.	வ.நி.
0.5 – 1.5	10	10
1.5 – 2.5	15	25
2.5 – 3.5	20	45
3.5 – 4.5	25	70
4.5 – 5.5	30	100
5.5 – 6.5	32	132
6.5 – 7.5	28	160
7.5 – 8.5	22	182
8.5 – 9.5	15	197
9.5 – 10.5	10	207

$N=207$; $\therefore \frac{N}{2}=103.5$; $\therefore$ 5.5—6.5 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு.

$$l=5.5, \quad c=1, \quad f=32, \quad m=100$$

$$\text{இ. அ.} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{N}{2}-m\right)$$

$$=5.5+\frac{1}{32}(103.5-100)$$

$$=5.5+\frac{3.5}{32}$$

$$=5.5+0.11$$

$$=5.61 \text{ ரூபாய்.}$$

இடைநிலையளவின் சிறப்பியல்புகள் (Merits of the median):

(1) இடைநிலையளவை எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம்.

(2) இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுவது மிகவும் எளிது. உதாரணமாக, குறைந்த எண்ணிக்கை உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொடரின் இடைநிலையளவை, அவ்வுறுப்புக்களை ஏறு வரிசையில் அமைத்து நடு உறுப்பின் மதிப்பு அல்லது நடு உறுப்புக்களின் சராசரி மதிப்பின் மூலம் பெறலாம்.

(3) ஒரு தொடரின் இடைநிலையளவிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட எல்லா உறுப்புக்களின் தனி விலக்கங்களின் (absolute deviations) கூட்டுத் தொகை மீச்சிறு மதிப்புடையதாக யிருக்கும்.

(4) மிகப்பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய மதிப்புகளைக் கொண்ட முனையுறுப்புக்களால் இடைநிலையளவு பாதிக்கப் படுவதில்லை.

(5) இடைநிலையளவின் கணக்கீட்டில் முனைப் பிரிவுகள் பயன் படுத்தப்படுவதில்லையாகையால் முனைப்பிரிவு எல்லைகள் திறப்பு எல்லைகளாகயிருப்பினும், முனையுறுப்புக்கள் விடுபட் டிருப்பினும், சரியாகத் தெரியாவிடினும் இடைநிலையளவைக் கணக்கிடயியலும்.

(6) இடைநிலையளவை வரைபட முறையில் கணக்கிட முடியும்.

இடைநிலையளவின் குறைபாடுகள் (Demerits of the median) :

(1) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் கணிதச் சூத்திரம் இடைநிலையளவுக்குக் கிடையாது.

(2) பரவலின் எல்லா மதிப்புக்களையும் சார்ந்து அமைய வில்லை.

(3) இயற்கணிதக் கணக்கீடுகட்கு உட்படக் கூடியதாக அமையவில்லை.

(4) ஒரு தொடரின் மதிப்புக்களை ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ வரிசைப் படுத்தினால் தான் இடைநிலையளவைக் கணக்கிட முடியும்.

(5) புள்ளியியற் கணக்கீடுகளில் மேலும் பயன்படுத்தக் கூடிய வகையில் அமையவில்லை.

(6) முனையுறுப்புக்களுக்குத் தகுந்த முக்கியத்துவம் கொடுக் கப்பட வேண்டிய பரவல்களின் இடைநிலையளவு சரியான மையப் போக்கைப் பிரதிபலிக்காது.

(7) குறைந்த எண்ணிக்கை உறுப்புக்களைக் கொண்ட தொடரின் மையப்போக்கை இடைநிலையளவு சரியாகப் பிரதி பலிக்காது.

(8) ஒரே இனத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படு கின்ற கூறுகளின் இடைநிலையளவுகள் மிகுந்த ஏற்றத் தாழ்வு களுடனிருக்குமாகையால் கூட்டுச் சராசரியைப் போல் இது நிலைத்தன்மை பெற்றதல்ல.

(9) இடைநிலையளவு, மொத்த நிகழ்வெண் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலன் எல்லா உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பைத் தராது.

(10) பல பரவல்களின் இடைநிலையளவுகள், உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு கூட்டுப் பரவலின் இடைநிலையளவைப் பெற முடியாது.

இடைநிலையளவின் பயன்கள் (Uses of the median):

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் எண்ணளவைகளில் சொல்ல முடியாதவாறு இருப்பின் ஏனைய சராசரிகளைக் கணக்கிட முடியாது. இத்தகைய தொடர்களுக்கு இடைநிலையளவைச் சராசரியாகக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக அழகு என்ற மாறியின் மதிப்பை அளவின மதிப்பாகக் கணக்கிட முடியாது. ஆனால் இரு பெண்களில் யார் அதிக அழகானவர் என்பதைச் சரியாக நிர்ணயிக்க முடியும். ஆகவே ஓர் வகுப்பைச் சேர்ந்த பெண்களின் சராசரி அழகை இடைநிலையளவின் மூலம் மதிப்பிடலாம். அவ்வகுப்பைச் சேர்ந்த பெண்களை அவர்களுடைய அழகுகளுக்கேற்ப வரிசைப்படுத்தி, நடுவிலுள்ள பெண்ணின் அழகை அவ்வகுப்புப் பெண்களின் இடைநிலை அழகாகக் கொள்ளலாம்.

(2) ஓர் பரவலின் பரவுகைக் அளவைக் (measure of dispersion) கணக்கிடப் பயன்படுகின்ற சராசரி விலக்கத்தைக் (Average deviation) கணக்கிட இடைநிலையளவு பயன்படுகிறது.

(3) மதிப்பீட்டுக் கொள்கையில் இயல்நிலை இனத் தொகுதியினுடைய (normal population) சராசரியின் இசைவு மதிப்பீடாக (consistent estimate) இடைநிலையளவு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(4) அழிவுச் சோதனைகள் செய்யப்படுகின்ற பரிசோதனைகளில் இடைநிலையளவு சராசரியாகப் பயன்படுகிறது.

(5) மருந்துகளின் மொத்த வியாபார நிறுவனமொன்று தனது விற்பனைப் பதிலாட்களின் (sales agents) ஆண்டுச் சராசரி விற்பனையளவை மதிப்பிட, மிகக் குறைவாகவும், மிக அதிகமாகவும் விற்பனை செய்த ஒரு சில விற்பனைப் பதிலாட்களின் சரியான விற்பனையளவுகள் தெரியாவிடினும் எல்லா விற்பனைப் பதிலாட்களின் இடைநிலை விற்பனையளவைக் கணக்கிட்டு அதையே சராசரி விற்பனை அளவாகக் கொள்ளலாம். இதுபோன்று முனையுறுப்புக்கள் மதிப்புக்கள் தெரியாத பரவல்களில் இடைநிலையளவே சராசரியாகக் கொள்ளப்படுகிறது. மேலும் முனையுறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் இயல்புக்குப் புறம்பானவையாகயிருப்பின், கூட்டுச் சராசரியானது அப்பரவலின் உண்மையான மையப்போக்கை எடுத்துக்காட்டாது. எனவே, இத்தகைய பரவல்களிலும் இடைநிலையளவை அப்பரவலின் சராசரியாகக் கொள்ளலாம்.

(6) ஒரு பரவலின் மைய மதிப்பே அப்பரவலின் இடைநிலை மதிப்பாகக் கொள்ளப்படுவதால் வருமானம், ஊதியம், சொத்து போன்ற பொருளாதார மாறிகளின் அதிகக் கோட்டம் (Skewness) வாய்ந்த பரவல்களில் ஏனைய சராசரிகளை விட இடைநிலையளவு தான் பரவலின் சரியான பிரதிநிதித்துவச் சராசரியாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

கால்மங்கல் (Quartiles) :

இடைநிலையளவு, கால்மங்கள், நூற்றுமங்கள் அல்லது நூற்றுமானங்கள் **(Percentiles)** ஆகியவை பற்றியும், அவைகளை வரைபட முறையில் எவ்வாறு காண்பதென்பது பற்றியும் விளக்கப் படங்கள் பற்றிய முன் அத்தியாயத்தில் கண்டோம். ஒரு பரவலின் மொத்த உறுப்புகளுள் 50 சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குக் குறைவாகவும் மீதி 50 சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பைவிட அதிகமாகவுமிருக்குமாறு அமையப் பெற்ற அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பு இடைநிலையளவு என்று வரையறுக்கப் பட்டது. இடபோன்று, மொத்த உறுப்புகளுள் 25 சத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட குறைவாகவும், மீதி 75 சத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பைவிட அதிகமாகவுமிருக்குமாறு அமையப் பெற்ற அக் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு முதல் கால்மம் (First quartile) அல்லது கீழ்க் கால்மம் **(Lower quartile)** என்று பெயர். இம் முதல் கால்மம் பொதுவாக Q_1 அல்லது $கா_1$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. இதுபோல், 75 சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைவிட குறைவாகவும், மீதி 25 சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பைவிட அதிகமாகவுமிருக்குமாறு அமையப் பெற்ற அக் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு மூன்றும் கால்மம் **(Third quartile)** அல்லது மேல் கால்மம் **(Upper quartile)** என்று பெயர். இது பெரும்பாலும் Q_3 அல்லது $கா_3$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது, மொத்த உறுப்புக்களுள் முதற் கால் பகுதி உறுப்புக்களைத் தனக்குக் கீழே கொண்டிருக்கும் மதிப்பு முதற் கால்மம் என்றும், மூன்று கால் பகுதி (முக்கால் பகுதி) உறுப்புக்களைத் தனக்குக் கீழே கொண்டிருக்கும் மதிப்பு மூன்றும் கால்மம் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இதுபோல், இடைநிலையளவு தனக்குக் கீழே இரண்டு கால் பகுதிகளைக் கொண்டிருப்பதால் அதை இரண்டாம் கால்மம் **(Second quartile)** அல்லது நடுக் கால்மம் **(Middle quartile)** என்று கூறலாம். ஆகவே, இடைநிலையளவை Q_2 அல்லது $கா_2$ என்று குறிப்பிடலாம்.

நூற்றுமங்களும் பதின்மங்களும் (Percentiles and Deciles):

இடை நிலையளவையும் கால்மங்களையும் போன்று ஒரு பரவலின் உறுப்புக்களுள் ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களைத் தனக்குக் கீழ் கொண்டுள்ள ஒரு மதிப்பு அக் குறியிட்ட சதவீதத்திற்குரிய நூற்றுமம் அல்லது நூற்றுமானம் (Percentile) என்று அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, 10 சத வீத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களைத் தனக்குக் குறைவான மதிப்புக்களாகக் கொண்ட ஒரு மதிப்பு 10ஆவது நூற்றுமம் என்றழைக்கப்படுகிறது. இது P_{10} அல்லது $நூ_{10}$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. இதே வரையறையின்படி முதல் கால்மம், இடைநிலையளவு, மூன்றும் கால்மம் ஆகியவற்றை முறையே 25ஆவது, 50ஆவது, 75ஆவது நூற்றுமங்களாகும். ஆகவே, இவற்றை முறையே P_{25} அல்லது $நூ_{25}$, P_{50} அல்லது $நூ_{50}$, P_{75} அல்லது $நூ_{75}$ என்று குறிப்பிடலாம். ஒரு பரவலிலுள்ள உறுப்புக்களை $நூ_1$, $நூ_2$......, $நூ_{99}$ ஆகிய நூற்றுமங்கள் 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு சதவீத உறுப்புக்களைக் கொண்டிருக்கும். இதுபோன்று, ஒரு பரவலின் உறுப்புக்களை 10 சதவீத உறுப்புகளைக் கொண்ட 10 சம பிரிவுகளாக ஒன்பது மதிப்புக்களால் பிரிக்கலாம். இவ்வொன்பது மதிப்புக்களுக்கும் பதின்மங்கள் என்று பெயர். இப் பதின்மங்கள் D அல்லது ப என்று குறிப்பிடப்படுகின்றன. முதல் பதின்மம் முதல் 10 சத உறுப்புக்களைத் தனக்குக் கீழே கொண்டிருக்கும். இதை D_1 அல்லது $ப_1$ என்று குறிப்பிடலாம். இதுவே $நூ_{10}$ என்ற பத்தாவது நூற்றுமம் என்பதை நாமறிவோம். இதுபோல் இரண்டாவது பதின்மம் என்பது தனக்குக் கீழே 20 சத உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களைக் கொண்டிருக்கும் மதிப்பாகும். இது D_2 அல்லது $ப_2$ என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது. இதுவே $நூ_{20}$ என்ற இருபதாவது நூற்றுமமாகும். ஆகவே, இடைநிலையளவை D_5 அல்லது $ப_5$ என்றும் குறிப்பிடலாம். ஒன்பதாவது பதின்மமாகிய D_9 அல்லது $ப_9$ என்பது தனக்குக் கீழே 90 சத உறுப்புக்களைக் கொண்ட மதிப்பாகும். இதுவே, $நூ_{90}$ என்ற தொண்ணூறாவது நூற்றுமமாகும். பத்தாவது பதின்மமாகிய D_{10} அல்லது $ப_{10}$ என்பது தனக்குக் கீழே 101 சத உறுப்புக்களை அதாவது எல்லா உறுப்புக்களையும் கொண்ட மதிப்பாகும். ஆகவே நிகழ்வெண் பரவலின் இறுதிப் பிரிவின்மேல் எல்லைதான் பத்தாவது பதின்மம் என்பதை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத தனித்தனி மாறியின் மதிப்புக்களுக்குக் கால்மங்கள் காணல் :

பின்வரும் தொடரில் 11 செடிகள் அவற்றிலுள்ள இலைகளின் எண்ணிக்கைகளுக்கேற்ப ஏறு வரிசையில் வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

செடிகளின் வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
இலைகளின் எண்ணிக்கை	31	37	43	48	50	57	59	60	65	78	80

N = மொத்தச் செடிகளின் எண்ணிக்கை = 11

$$\therefore \frac{N}{4} = \frac{11}{4} = 2\tfrac{3}{4};\ \frac{3N}{4} = 8\tfrac{1}{4}.$$

ஆகவே, $கா_1$க்குக் கீழே $2\frac{3}{4}$ செடிகளும், $கா_1$க்கு மேலே $8\frac{1}{4}$ செடிகளும் இருக்க வேண்டும். கீழிருந்து $2\frac{3}{4}$ ஆவது செடிக்கும், மேலிருந்து $8\frac{1}{4}$ ஆவது செடிக்குமிடையில் 3ஆவது செடியிருப்பதாலும், செடியின் எண்ணிக்கை பின்னத்திலிருக்க முடியாதாகையாலும் மூன்றுவது செடியிலுள்ள இலைகளின் எண்ணிக்கையாகிய 43ஐ முதற் கால்ம மதிப்பாகக் கொள்ள வேண்டும். இதுபோன்று, மூன்றுவது கால்ம மதிப்பின் கீழே $8\frac{1}{4}$ செடிகளும், அதற்கு மேலே $2\frac{3}{4}$ செடிகளுமிருக்க வேண்டும். முன்னர் கூறப்பட்ட விவாதத்தின்படியே ஒன்பதாவது செடியின் இலைகளின் எண்ணிக்கை யாகிய 65ஐ மூன்றும் கால்ம மதிப்பாகக் கொள்ள வேண்டும்.

இப்பொழுது N = 10 எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{N}{4} = \frac{10}{4} = 2\tfrac{1}{2};\ \ 3\frac{N}{4} = 7\tfrac{1}{2}.$$

ஆகவே, முதல் செடியிலிருந்து மேலே $2\frac{1}{2}$ ஆவது செடிக்கும், இறுதிச் செடியாகிய 10ஆவது செடிக்குக் கீழே $7\frac{1}{2}$ ஆவது செடிக்குமிடையேயுள்ள ஒரு செடியின் இலைகளின் எண்ணிக்கைதான் முதல் கால்ம மதிப்பாகும். அதாவது, முதல் கால்மம் = மூன்றுவது செடியின் இலைகள் = 43. இதுபோல், மூன்றுவது கால்மம் = 8ஆவது செடியின் இலைகள் = 60 ஆகும். இதே விவாதத்தின்படி N = 9 என்றுல்,

$$\frac{N}{4} = \frac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4};\ \ 3\frac{N}{4} = 6\tfrac{3}{4},$$

ஆகவே, முதல் கால்மம் = 3ஆவது செடியின் இலைகள் = 43.

மூன்றும் கால்மம் = 7ஆவது செடியின் இலைகள் = 59.

தொடரின் மொத்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 4-இன் மடங்காகயிருந்தால், கீழ்க்காணும் முறையைப் பின்பற்றி கால்மங்களின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$N = 12$ எனக் கொள்க. $\therefore\ \frac{N}{4} = 3;\ \ \frac{3N}{4} = 9.$

ஆகவே, முதல் கால்மத்திற்குக் கீழே மூன்று செடிகளும், முதல் கால்மத்திற்கு மேலே ஒன்பது செடிகளுமிருக்க வேண்டும். ஆகவே, மூன்ருவது செடியிலுள்ள இலைகள் நான்காவது செடியிலுள்ள இலைகள் ஆகியவற்றின் வித்தியாசத்தில் $\frac{1}{4}$ஐ மூன்ருவது செடியின் இலைகளுடன் கூட்டி முதல் கால்ம மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

நான்காவது செடியின் இலைகள் = 48

மூன்ருவது செடியின் இலைகள் = 43

வித்தியாசம் = 5

$\frac{1}{4}$ (வித்தியாசம்) = $\frac{5}{4}$ = 1.25.

$\therefore$ முதல் கால்மம் = மூன்ருவது செடியின் இலைகள் + $\frac{1}{4}$ (வித்தியாசம்)

= 43 + 1. 25

= 44. 25 இலைகள்.

இதுபோல், மூன்ருவது கால்மத்திற்குக் கீழே ஒன்பது செடிகளும், மூன்ருவது கால்மத்திற்கு மேலே மூன்று செடிகளும் இருக்க வேண்டும். ஆகவே, ஒன்பதாவது செடியிலுள்ள இலைகள், பத்தாவது செடியிலுள்ள இலைகள் ஆகியவற்றின் வித்தியாசத்தில் $\frac{3}{4}$ஐ ஒன்பதாவது செடியின் இலைகளுடன் கூட்டி மூன்ருவது கால்ம மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

பத்தாவது செடியின் இலைகள் $=78$

ஒன்பதாவது செடியின் இலைகள் $=65$

வித்தியாசம் $=13$

$\frac{3}{4}$ (வித்தியாசம்) $=\frac{3}{4}(13)=\frac{39}{4}=9.75$

$\therefore$ மூன்றும் கால்மம் $=9$ஆவது செடியின் இலைகள் $+\frac{3}{4}$ (வித்தியாசம்)

$=65+9.75$

$=74.75$ இலைகள்.

நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத தொடர்மாறி மதிப்புக்களுக்குக் கால்மங்கள் காணல் :

பின்வரும் பட்டியலில் 11 மாணவர்களின் எடை (கி. கிராம்களில்) ஏறு வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
எடை (கி.கி.)	48	52	56	58	59	61	62	64	66	68	69

எடை யென்பது தொடர் மாறியாகையால் பின்ன மதிப்புக்களையும் பெறக் கூடியது.

இங்கு $N=11 \quad \therefore \frac{N}{4} = 2\frac{3}{4}, \quad \frac{3N}{4}=8\frac{1}{4}$

ஆகவே, முதல் கால்மத்திற்குக் கீழே $2\frac{3}{4}$ மாணவர்களும், முதல் கால்மத்திற்கு மேலே $8\frac{1}{4}$ மாணவர்களுமிருக்கவேண்டும். ஆனல் எடை யென்பது தொடர்மாறியாகையால் ஒன்ருவது, இரண்டாவது மதிப்புக்களின் நடுமதிப்பாகிய $\frac{48+52}{2}=50$ஐக் கீழ் எல்லையாகவும், இரண்டாவது, மூன்ருவது மதிப்புக்களின் நடு மதிப்பாகிய $\frac{52+56}{2}=54$ஐமேல் எல்லையாகவும் கொண்ட "50 முதல் 54 வரை" என்ற இடைவெளியிலுள்ள எந்த மதிப்பையும் இரண்டாவது மாணவனின் எடை பெற முடியுமெனக் கொள்ள வேண்டும். இதுபோல், மூன்ருவது மாணவனின் இடைவெளி "54 முதல் 57 வரை" என்று எளிதில் காணலாம். ஆகவே, இரண்டாவது மாணவனுடைய எடையின்

மேல் எல்லையாகிய 54 உடன் மூன்றாவது மாணவனுடைய இடைவெளியில் $\frac{3}{4}$ மடங்கைக் கூட்டி $2\frac{3}{4}$ஆவது மாணவனின் எடையைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$\therefore 2\tfrac{3}{4}\text{ஆவது மாணவனின் எடை} = 54 + \tfrac{3}{4}(57-54)$$
$$= 54 + \tfrac{3}{4}(3)$$
$$= 54 + 2.25$$
$$= 56.25 \text{ கி.கி.}$$

ஆகவே, 56.25 கி.கி. எடைக்குக் குறைவான எடைகளை $2\frac{3}{4}$ மாணவர்களும், கூடுதலான எடைகளை $8\frac{1}{4}$ மாணவர்களும் பெற்றிருப்பார்களென்றறியலாம்.

எனவே, முதல் கால்மம் = 56.25 கி.கி.

இதுபோல், மூன்றும் கால்மத்திற்குக் கீழே $8\frac{1}{4}$ மாணவர்களும், மேலே $2\frac{3}{4}$ மாணவர்களுமிருக்க வேண்டும். எட்டாவது மாணவனின் எடை பெறக்கூடிய மதிப்புக்களின் இடைவெளியின் கீழ் எல்லை $\frac{62+64}{2} = 63$, மேல் எல்லை $\frac{64+66}{2} = 65$ ஆகும்.

அதாவது, எட்டாவது மாணவனின் இடைவெளி "63 முதல் 65 வரை" ஆகும். இதுபோல் ஒன்பதாவது மாணவனின் இடைவெளி "65 முதல் 67 வரை" என்று காணலாம். ஆகவே, எட்டாவது மாணவனுடைய இடைவெளியின் மேல் எல்லையாகிய 65 உடன் ஒன்பதாவது மாணவனுடைய இடைவெளியில் $\frac{1}{4}$ஐக் கூட்டி மூன்றும் கால்மத்தைப் பெறலாம்.

$$\therefore \text{மூன்றும் கால்மம்} = 63 + \tfrac{1}{4}(67-65)$$
$$= 63 + \tfrac{1}{4}(2)$$
$$= 63 + 0.5$$
$$= 63.5 \text{ கி.கி.}$$

இப்பொழுது N இன் மதிப்பு 4 இன் மடங்கெனக் கொள்வோம்

$$N = 8 \text{ எனில், } \frac{N}{4} = 2,\ 3\frac{N}{4} = 6.$$

ஆகவே, முதல் கால்மத்திற்குக் கீழே இரண்டு மாணவர்களும், மேலே ஆறு மாணவர்களுமிருக்க வேண்டும். ஆனல்

இரண்டாவது மதிப்பின் இடைவெளி '50 முதல் 54 வரை' ஆகும். மூன்ருவது மதிப்பின் இடைவெளி '54 முதல் 57வரை' ஆகும். எனவே, 54 கி. கிராம்களுக்குக் கீழே இரண்டு மாணவர்களும், மேலே ஆறு மாணவர்களுமிருப்பதால் முதல் கால்மம் = 54 கி.கி. என்று கொள்ள வேண்டும். இதுபோல், மூன்ரும் கால்மத்திற்குக் கீழே ஆறு மாணவர்களிருக்க வேண்டும். ஆனுல், ஆருவது மாணவனுக்குரிய இடைவெளி

$\frac{59+61}{2} = 60$ முதல் $\frac{61+62}{2} = 61.5$ ஆகும். எனவே, 61.5 கி. கிராம்களுக்குக் குறைவான எடையுடைய மாணவர்கள் ஆறு பேர்களிருப்பதால் மூன்ரும் கால்மம் = 61.5 கி.கி. ஆகும்.

நிகழ்வெண் பரவலின் கால்மங்களும், நூற்றுமங்களும் காணல் :

நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து இடைநிலையளவு கணக்கிட்டது போலவே கால்மங்களையும் நூற்றுமங்களையும் கணக்கிடலாம். வளர்நிகழ்வெண் வரையிலிருந்து இடைநிலைப் பிரிவை நிர்ணயித்தது போல் முதல் கால்மம், மூன்ரும் கால்மம், நூற்றுமங்கள் ஆகியவற்றிற்குரிய இடைவெளிகளை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர் இடைநிலையளவுக்குரிய

$$இ.அ. = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

என்ற சூத்திரத்தில் $\frac{N}{2}$ க்குப் பதிலாக $\frac{N}{4}$ என்று பிரதியிட முதல் கால்மத்திற்குரிய சூத்திரமும், $\frac{3N}{4}$ என்று பிரதியிட மூன்ரும் கால்மத்திற்குரிய சூத்திரமும் $\frac{r}{100} \times N$ என்று பிரதியிட r-ஆவது நூற்றுமமாகிய P_r அல்லது நூ$_r$-க்குரிய சூத்திரமும் கிடைக்கின்றன. இச் சூத்திரங்களில் l, c, f, m ஆகியவற்றிற்குரிய மதிப்புக்களை அவைகளுக்குரிய பிரிவுகளிலிருந்து பெற்றுப் பிரதியிட வேண்டும். இவற்றைக் கணக்கிடும் முறைகளைப் பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 40 :

பின்வரும் பரவலின் கால்மங்களையும் 15ஆவது, 60ஆவது நூற்றுமங்களையும் கணக்கிடுக.

மாறி	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
நிகழ்வெண்	3	21	68	30	10	6	2

தீர்வு :

மாறி	நி	வ. நி.
0.5 — 5.5	3	3
5.5 — 10.5	21	24
10.5 — 15.5	68	92
15.5 — 20.5	30	122
20.5 — 25.5	10	132
25.5 — 30.5	6	138
30.5 — 35.5	2	140
மொத்தம்	140	

$$\frac{N}{4} = \frac{140}{4} = 35 ;$$

35-ஆவது உறுப்பு 10.5—15.5 என்ற பிரிவிலிருப்பதால் இதுவே கா$_1$—பிரிவு ஆகும். $\therefore\ l = 10.5,\ c = 5,\ f = 68,\ m = 24.$

$$\therefore \text{ கா}_1 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{4} - m\right)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(35 - 24)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(11)$$

$$= 10.5 + \frac{55}{68}$$

$$= 10.5 + 0.81$$

$$= 11.31.$$

$3\frac{N}{4} = 105$. 105-ஆவது உறுப்பு 15.5 – 20.5 என்ற பிரிவிலிருப்பதால், இதுவே கா$_3$—பிரிவு ஆகும்.

$$\therefore\ l = 15.5,\ c = 5,\ f = 30,\ m = 92$$

$$கா_3 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{30}(105 - 92)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{30}(13)$$

$$= 15.5 + \frac{65}{30}$$

$$= 15.5 + 2.17$$

$$= 17.67$$

நூ$_{15}$ஐக் கணக்கிட முதலில் N-இல் 15% கணக்கிட்டு அதற்குரிய பிரிவை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\text{N இல் } 15\% = \frac{15N}{100} = \frac{15}{100} \times 140 = 21$$

21 ஆவது உறுப்பு இரண்டாவது பிரிவைச் சேர்வதால், 5.5 – 10.5 என்பது நூ$_{15}$க்குரிய பிரிவு ஆகும்.

$$\therefore\ l = 5.5,\ c = 5,\ f = 21,\ m = 3.$$

$$நூ_{15} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{15N}{100} - m\right)$$

$$= 5.5 + \frac{5}{21}(21 - 3)$$

$$= 5.5 + \frac{5}{21}(18)$$

$$= 5.5 + \frac{90}{21}$$

$$= 5.5 + 4.3$$

$$= 9.8$$

நூ$_{60}$ ஐக்காண முதலில் Nஇல் 60%ஐக் கணக்கிட்டு அதற்குரிய பிரிவை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\text{N இல் } 60\% = \frac{60\text{N}}{100} = \frac{60}{100} \times 140 = 84.$$

84 ஆவது உறுப்பு 10.5—15.5 என்ற பிரிவிலிருப்பதால், இதுவே நூ$_{60}$ இன் பிரிவு ஆகும்.

$$\therefore\ l = 10.5,\ c = 5,\ f = 68,\ m = 24$$

$$\text{நூ}_{60} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{60\text{N}}{100} - m\right)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(84 - 24)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(60)$$

$$= 10.5 + 4.4$$

$$= 14.9.$$

மாதிரி 41 :

150 மின் விளக்குகளின் ஆயுட்காலம் பற்றிய விவரங்களைப் பின்வரும் பட்டியல் தருகிறது.

ஆயுட்காலம் (மணிகளில்)	விளக்குகளின் எண்ணிக்கை
0 — 400	4
400 — 800	12
800 — 1200	40
1200 — 1600	41
1600 — 2000	27
2000 — 2400	13
2400 — 2800	9
2800 — 3200	4

(அ) கால்மங்களைக் கணக்கிடுக.

(ஆ) நூ$_{10}$, நூ$_{70}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(இ) ஆயுட்காலம் 1500 மணி நேரமும் அதற்கு மேலும் கொண்ட விளக்குகள் இயல்பான தரமுடையவை யெனில், தரமான விளக்குகள் எத்தனை சதவீதம்?

(ஈ) 85 சத விளக்குகளை இயல்பான தரமுடையவை யெனக் கொள்ள வேண்டுமெனில் இயல்பான தரமுடையதென கருதப்படுவதற்குரிய மின் விளக்கின் மீச்சிறு ஆயுட்காலத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

ஆயுட்காலம்	நி.	வ.நி.
0 — 400	4	4
400 — 800	12	16
800 — 1200	40	56
1200 — 1600	41	97
1600 — 2000	27	124
2000 — 2400	13	137
2400 — 2800	9	146
2800 — 3200	4	150

(அ) $\frac{N}{4} = \frac{150}{4} = 37.5$; $\frac{3N}{4} = 112.5$

800—1200 என்பது $கா_1$—பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 800, c = 400, f = 40, m = 16$

$$கா_1 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 800 + \frac{400}{40}(37.5 - 16)$$

$$= 800 + 10\,(21.5)$$

$$= 800 + 215$$

$= 1015$ மணி.

1600—2000 என்பது $கா_3$—பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 1600, c = 400, f = 27, m = 97$

$$கா_3 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right)$$

$$= 1600 + \frac{400}{27}(112.5 - 97)$$

$$= 1600 + \frac{400}{27}(15.5)$$

$$= 1600 + \frac{6200}{27}$$

$$= 1600 + 229.6$$

$$= 1829.6 \text{ மணி.}$$

(ஆ) N இல் 10% $= \frac{10N}{100} = \frac{10}{100} \times 150 = 15.$

400—800 என்பது $நா_{10}$—பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 400,\ c = 400,\ f = 12,\ m = 4.$

$$நா_{10} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{10N}{100} - m\right)$$

$$= 400 + \frac{400}{12}(15 - 4)$$

$$= 400 + \frac{400}{12}(11)$$

$$= 400 + 366.7$$

$$= 766.7 \text{ மணி}$$

N இல் 70% $= \frac{70N}{100} = \frac{70}{100} \times 150 = 105$

1600—2000 என்பது $நா_{70}$—பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 1600,\ c = 400,\ f = 27,\ m = 97.$

$$நா_{70} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{70N}{100} - m\right)$$

$$= 1600 + \frac{400}{27}(105 - 97)$$

$$= 1600 + \frac{400}{27}(8)$$

$$= 1600 + 118.5$$

$= 1718.5$ மணி.

(இ) 1500 மணியும் அதற்கு மேற்பட்ட ஆயுட்காலமுள்ள விளக்குகள் இயல்பான தரமுடையவை யெனில் 1500 மணி நேரத்திற்குக் குறைந்த ஆயுட்கால முள்ள விளக்குகள் தரமற்றவையாகும். வளர் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து,

1200 மணிக்கு குறைந்த ஆயுட்காலமுள்ளவை $= 56$

1200 மணி முதல் 1600 மணி வரை ஆயுட்கால முள்ளவை $= 41$

$\therefore$ 1200 மணி முதல் 1500 மணி வரை ஆயுட்கால முள்ளவை $= \frac{41}{400} \times 300$

$= 30.75$

$= 31$ (முழு எண்ணில்)

$\therefore$ 1500 மணிக்குக் குறைந்த ஆயுட்காலமுள்ளவை $= 56 + 31 = 87$

$\therefore$ 1500 மணிக்குச் கூடுதலான ஆயுட்காலமுள்ளவை $= 150 - 87 = 63$

ஆகவே, 150 விளக்குகளில் தரமானவை $= 63$

$\therefore$,, ,, $= \frac{63}{150} \times 100 = 42$

அதாவது, தரமான விளக்குகள் $= 42\%$.

(ஈ) 85% விளக்குகள் தரமுள்ளவை யெனில் மீதி 15% விளக்குகள் தரமற்றவையாகும். $நூ_{15}$ க்குக் கீழ் 15% விளக்குகளிருக்குமாகையால் தரமான விளக்குகளின் மீச்சிறு ஆயுட்காலம் $= நூ_{15}$ ஆகும். இப்பொழுது, N இல் 15%

$$= \frac{15N}{100} = \frac{15}{100} \times 150 = 22.5$$

800 — 1200 என்பது $நூ_{15}$—பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 800, \; c = 400, \; f = 40, \; m = 16.$

$$\text{நா}_{15} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{15N}{100} - m\right)$$

$$= 800 + \frac{400}{40}(22.5 - 16)$$

$$= 800 + 10\,(6.5)$$

$$= 800 + 65$$

$$= 865.$$

$\therefore$ தரமான விளக்குகளின் மீச்சிறு ஆயுட்காலம் = 865 கணி.

3. முகட்டளவு (Mode)

புள்ளி விவர ஆய்வுகளில் பயன்படுகின்ற மற்றொரு சராசரி முகடு அல்லது முகட்டளவு ஆகும். ஒரு புள்ளி விவரத் தொடரிலுள்ள மதிப்புக்களுள் எந்த மதிப்பு அதிகமான தடவைகள் மடங்கி வருகின்றதோ அல்லது எந்த மதிப்பைச் சுற்றி மிக அதிக எண்ணிக்கையில் அத்தொடரின் உறுப்புக் களிருக்கின்றனவோ அந்த மதிப்பு அத்தொடரின் முகடு அல்லது முகட்டளவு என்றழைக்கப்படுகிறது.

ஏழு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைக் கொண்ட பின்வரும் தொடரைக் கருதுக.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7
மதிப்பெண்	47	51	35	51	72	28	42

இத்தொடரில் இரண்டாவது மாணவனும் நான்காவது மாணவனும் 51 மதிப்பெண்கள் பெற்றிருக்கின்றனர். அதாவது, மாணவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களுள் 51 என்ற மதிப் பெண் தான் அதிகமான மாணவர்களால் பெறப்பட்டிருப்பதால் இத்தொடரின் முகட்டுச்சராசரி அல்லது முகட்டளவு 51 ஆகும்

இப்பொழுது பின்வரும் தொடரைக் கருதுக.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
மதிப்பெண்	26	50	48	33	48	61	33	48	35	52	33	72

இத்தொடரில் 33, 48 ஆகிய மதிப்பெண்களைச் சமமான அளவில் அதிகமான மாணவர்கள் பெற்றிருக்கின்றனர்.

ஆகவே, 33, 48 இரண்டும் இத்தொடரின் முகட்டளவுகளா கும். இவ்வாறு இரண்டு முகடுகளையுடைய ஒரு தொடர் "இரு முகட்டுத் தொடர்" (Bi-modal series) எனப்படும்; மூன்று முகடு களைக் கொண்ட தொடர் "மூன்று முகட்டுத் தொடர்" அல்லது "மும்முகட்டுத் தொடர்" (Tri-modal series) என்றும் பலமுகடு களைக் கொண்ட தொடர் "பல முகட்டுத் தொடர்" (Multi-modal series) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. குறைந்த எண் ணிக்கை உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடரில் மேற்கூறப் பட்ட வரையறையின்படி ஒரு முகட்டளவும் காணப்படவில்லை யெனில் அத்தொடருக்கு முகட்டளவு கிடையாதென்று கொள்ள வேண்டும். உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக யிருந்தால் நிகழ்வெண் பரவலமைத்துப் பின்னுல் விளக்கப்பட்டுள்ள முறையில் முகட்டளவைக் கணக்கிடவேண்டும்.

குறைந்த எண்ணிக்கை உறுப்புக்களைக் கோண்ட ஒரு புள்ளிவிவரத் தொடரில் ஏதாவதொரு உறுப்பின் மதிப்பிலேற் படுகின்ற மாறுதல் முகட்டளவைப் பெரிதும் பாதிக்கக்கூடும். உதாரணமாக, முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏழு உறுப்புக் களைக் கொண்ட தொடரில் இரண்டாவது மாணவனின் மதிப் பாகிய 51ஐ 35 என்று மாற்றினுல் முகட்டளவும் 51க்குப் பதிலாக 35 என்று மாறிவிடுவதைக் காணலாம். ஆகவே, கூறுகளிலேற்படுகின்ற சிறு மாறுதல்களினுலும் முகட்டளவு பாதிக்கப்படுவதால் நிலைத்தன்மையற்றதென அறிகிறோம்.

நிகழ்வெண் பரவலின் முகட்டளவு காணல் :

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட பிரிவு 'முகட்டுப் பிரிவு' (modal class) என்றழைக்கப் படுகிறது. பொதுவாக, முகட்டளவைத் தோராயமாகவே பெற முடியும். முதல் தோராயமாக, முகட்டுப் பிரிவின் மைய மதிப்பை முகட்டளவாகக் கொள்ளலாம். இன்னும் நெருங்கிய தோராயமாக, முகட்டளவைப் பின் வருமாறு மதிப்பிடலாம். முகட்டு பிரிவுக்கு முந்திய பிரிவின் நிகழ்வெண் (f_1 எனக் கொள்க) ணுக்குச் சமமான ஒரு எடை முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லையிலும், முகட்டுப் பிரிவுக்கு அடுத்த பிரிவின் நிகழ்வெண் (f_2 எனக் கொள்க) ணுக்குச் சமமான ஒரு எடை முகட்டுப் பிரிவின் மேல் எல்லையிலும் வைக்கப்பட்டால் அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையம் (Centre of Gravity) முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளி (c) யைப் பிரிக்கின்ற இடத்தின் (கீழ் எல்லையிலிருந்து $\dfrac{f_2\, c}{f_1 + f_2}$ என்ற தூரத்தில்) மதிப்பே அப்பரவலின் முகட்டளவாகும்.

ஆகவே, முகட்டளவு $= l + \frac{f_2 c}{f_1 + f_2}$ ஆகும்.

இச்சூத்திரத்தில்,

l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை,

f_1 = முகட்டுப் பிரிவுக்கு முந்திய பிரிவின் நிகழ்வெண்,

f_2 = முகட்டுப் பிரிவுக்கு அடுத்த பிரிவின் நிகழ்வெண்,

c = முகட்டுப் பிரிவின் இடைவெளி,

என்று கொள்க.

மாதிரி 42 :

பின்வரும் பரவலுக்குரிய முகட்டளவைக் காண்க.

x–இடைவெளி	நிகழ்வெண்
10 — 13	8
13 — 16	15
16 — 19	27
19 — 22	51
22 — 25	75
25 — 28	54
28 — 31	36
31 — 34	18
34 — 37	9
37 — 40	7

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

இங்கு மீப்பெரு நிகழ்வெண் 75 ஆகையால் 22—25 என்பது முகட்டுப் பிரிவு ஆகும்.

l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை = 22

c = முகட்டுப் பிரிவின் இடைவெளி = 3

f_1 = முகட்டுப் பிரிவுக்கு முந்திய பிரிவின் நிகழ்வெண் = 51

f_2 = முகட்டுப் பிரிவுக்கு அடுத்த பிரிவின் நிகழ்வெண் = 54

$$\therefore \text{முகட்டளவு} = l + \frac{f_2 c}{f_1 + f_2}$$

$$= 22 + \frac{54 \times 3}{51 + 54}$$

$$= 22 + \frac{162}{105}$$

$$= 22 + 1.54$$

$$= 23.54.$$

மாதிரி 43 :

பின்வரும் பரவலின் முகட்டளவைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்
0 — 10	10
10 — 20	40
20 — 30	20
30 — 40	0
40 — 50	10
50 — 60	40
60 — 70	16
70 — 80	14

தீர்வு :

இப்பரவலில் இரு பிரிவுகளில் சமமான மீப்பெரு நிகழ்வெண்களிருப்பதால் இது இரு முகட்டுப் பரவலாகும். முதல் முகடு 10—20 என்ற பிரிவிலும், இரண்டாவது முகடு 50—60 என்ற பிரிவிலும் இருக்கின்றன.

முதல் முகடு: $l = 10,\ c = 10,\ f_1 = 10,\ f_2 = 20$

$$\therefore \text{ முதல் முகடு } = l + \frac{f_2\,c}{f_1+f_2}$$

$$= 10 + \frac{20 \times 10}{10+20}$$

$$= 10 + \frac{200}{30}$$

$$= 10 + 6\ 67$$

$$= 16.67.$$

இரண்டாவது முகடு: $l = 50,\ c = 10,\ f_1 = 10,\ f_2 = 16$

$$\text{இரண்டாவது முகடு } = l + \frac{f_2\,c}{f_1+f_2}$$

$$= 50 + \frac{16 \times 10}{10+16}$$

$$= 50 + \frac{160}{26}$$

$$= 50 + 6.15$$

$$= 56.15.$$

ஆகவே, 16.67, 56.15 என்பன பரவலின் இரு முகடுகளாகும்.

குறிப்பு: நிகழ்வெண் பரவலின் முதற்பிரிவு அல்லது இறுதிப் பிரிவில் முகட்டளவு இருந்தால் இச்சூத்திரத்தில் பிரதியிடவேண்டிய f_1 அல்லது f_2 இன் மதிப்பைப் பரவலிலிருந்து பெற முடியாது. ஆகவே, இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகட்டளவைப் பெற முடியாது. இத்தகைய பரவலில் முறையே முதல் பிரிவின் மைய மதிப்பையோ அல்லது இறுதிப் பிரிவின் மைய மதிப்பையோ முகட்டளவாகக் கொள்ளவேண்டும். சில பரவல்களில் அடுத்தடுத்த இரு பிரிவுகள் சமமான மீப்பெரு நிகழ்வெண்களைப் பெற்றிருக்கலாம். இத்தகைய பரவலில் அவ்விரு பிரிவுகளின் பொது எல்லையை முகட்டளவாகக் கொள்ளவேண்டும்.

அனுபவ சூத்திரம் (Empirical formula)

ஒரு மிதமான சீரில்லாப் பரவலில் (moderately asymmetrical distribution) கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகிய மூன்று சராசரிகளும் கீழ்க்காணும் தொடர்பின் மூலம் இணைக்கப்பட்டிருப்பதாக அனுபவத்தில் கண்டறியப்பட்டிருக்கிறது.

கூட்டுச் சராசரி – முகட்டளவு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலையளவு) அல்லது, முகட்டளவு = 3 (இடைநிலையளவு) — 2 (கூட்டுச் சராசரி) அகவே, ஒரு பரவலின் இடைநிலையளவு கூட்டுச் சராசரிக்கும் முகட்டளவுக்கு மிடையிலிருக்குமென்பதை இச்சூத்திரத்தின் மூலம் அறியலாம்.

மாதிரி 44 :

கணித இறுதித் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் வளர் நிகழ் பரவலைப் பின்வரும் பட்டியல் தருகிறது. இப்பட்டியலை ஒரு சாதாரண நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி

கூட்டுச் சராசரி — முகட்டளவு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலையளவு) என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகட்டளவை நிர்ணயிக்கவும்; அதை உண்மையாகக் கணக்கிடப்பட்ட முகட்டளவு மதிப்புடன் ஒப்பிடுக.

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
39க்குக் கீழ்	1
49 ,,	4
59 ,,	15
69 ,,	36
79 ,,	79
89 ,,	111
99 ,,	120

(மதுரை எம்.ஏ. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	வ. நி.
29 — 39	1	1
39 — 49	3	4

49 — 59	11	15
59 — 69	21	36
69 — 79	43	79
79 — 89	32	111
89 — 99	9	120

$N = 120 \quad \therefore \frac{N}{2} = 60. \quad \therefore$ 69—79 என்பது இ. அ. பிரிவு ஆகும்.

$\therefore \quad l = 69,\ c = 10,\ f = 43,\ m = 36$

$$\text{இ. அ.} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 69 + \frac{10}{43}(60 - 36)$$

$$= 69 + \frac{10}{43}(24)$$

$$= 69 + \frac{240}{43}$$

$$= 69 + 5.6$$

$$= 74.6$$

69—79 என்பது முகட்டுப் பிரிவு.

$\therefore \quad l = 69,\ c = 10,\ f_1 = 21,\ f_2 = 32$

$$\text{முகட்டளவு} = l + \frac{f_2\, c}{f_1 + f_2}$$

$$= 69 + \frac{32 \times 10}{21 + 32}$$

$$= 69 + \frac{320}{53}$$

$$= 69 + 6.0$$

$$= 75.0.$$

கூட்டுச் சராசரியைக் காண மைய மதிப்புப் பரவலமைக்கலாம்.

மைய மதிப்பு x	நி f	$d = \left(\frac{x-74}{10}\right)$	fd
34	1	−4	− 4
44	3	−3	− 9
54	11	−2	−22
64	21	−1	−21
74	43	0	0
84	32	1	32
94	9	2	18
மொத்தம்	120		−6

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{-6}{120} = -0.05$$

$$\bar{x} = A + c\bar{d} = 74 + 10\,(-0.05) = 74 - 0.5 = 73.5.$$

இப்பொழுது, கூ.ச.—முகடு = 3 (கூ.ச.—இ. அ.) என்ற சூத்திரத்திலிருந்து, முகடு = 3 இ.அ.—2 கூ. ச. என்று காண்கிறோம்.

$$\therefore \text{ முகடு } = 3\,(74.6) - (73.5)$$

$$= 223.8 - 147.0$$

$$= 76.8$$

கணக்கீட்டிலிருந்து பெற்ற முகட்டளவு மதிப்புக்கும், அனுபவ சூத்திரத்திலிருந்து பெறப்பட்ட முகட்டளவு மதிப்புக்கும் வித்தியாசமிருப்பதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் ஓர் சீரற்ற பரவலெனக் கொள்ளலாம்.

முகட்டளவின் சிறப்பியல்புகள் (Merits of the mode) :

(1) முகட்டளவு சாதாரண மனிதன் கூட மிகவும் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளக் கூடிய வகையிலமைந்துள்ளது.

(2) சில பரவல்களில் பார்வையினுலேயே முகட்டளவை அளவிட்டுக் கூறிவிட முடியும்.

(3) மிகச் சிறிய அல்லது மிகப் பெரிய மதிப்புக்களைக் கொண்ட முனையுறுப்புக்களினுல் முகட்டளவு பாதிக்கப் படுவதில்லை.

(4) திறந்த முனைப் பிரிவுகளைக் கொண்ட பரவல்களின் முகட்டளவுகளையும் எளிதில் கணக்கிட முடியும்.

(5) தனித்தனி மாறியின் மதிப்புக்களைக் கொண்ட பரவலில் முகட்டளவு மாறியின் ஒரு மதிப்பாக விளங்கும்.

(6) வரைபட முறையில் நிகழ்வெண் வரையிலிருந்து முகட்டளவைக் கணக்கிடலாம்.

(7) வளர் நிகழ்வரையிலிருந்தும் முகட்டளவைப் பெற முடியும்.

(8) ஏனைய சராசரிகளைவிட மிக எளிதில், மிக விரைவாக முகட்டளவைக் கணக்கிட முடியும்.

(9) முனையுறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்படா விட்டாலும் அல்லது சரியாகத் தெரியாவிட்டாலும் முகட்டளவைக் கணக்கிட முடியும்.

(10) அளவின விவரங்களாக மாற்ற முடியாத மாறிகளுக்கும் முகட்டளவைக் காண இயலும்.

முகட்டளவின் குறைபாடுகள் (Demerits of the mode) :

(1) முகட்டளவுக்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரம் கிடையாது.

(2) பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைய வில்லை.

(3) மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட பிரிவு தெளிவாக யில்லாவிடினும், பரவல் ஒழுங்கற்றதாகயிருப்பினும் முகட்டள வைக் காண முடியாது.

(4) நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவுகளின் அமைப்புக் கேற்ப முகட்டளவு மாறுபடுவதுமுண்டு.

(5) மிகச் சிறிய மொத்த நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகள் விரிவானவையாக யிருப்பின் சரியான முகட்டளவை நிர்ணயிக்க முடியாது.

(6) முகட்டளவின் சூத்திரம் கணித அடிப்படையில் அமைந்ததன்று ; ஆகவே, மேற்கொண்டு எந்த புள்ளியியற் கணக்கீட்டிலும் முகட்டளவைப் பயன்படுத்தப் முடியாது.

(7) முனையுறுப்புக்களுக்குத் தகுந்த முக்கியத்துவம் அளிக்கப்பட வேண்டிய பரவல்களில் முகட்டளவினுல் எந்தப் பயனும் கிடையாது.

(8) நிலைத் தன்மையற்றது.

(9) முகட்டளவு, மொத்த நிகழ்வெண் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனிலிருந்து எல்லா உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பைப் பெறமுடியாது.

(10) பல பரவல்களின் முகட்டளவுகள் மொத்த நிகழ் வெண்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து கூட்டுப் பரவலின் முகட்டள வைக் காண முடியாது.

முகட்டளவின் பயன்கள் (Uses of the mode) :

சமூக, பொருளாதார பிரச்சினைகளில் பெரும்பான்மையின் அடிப்படையில் காணப்படுகின்ற முடிவுகள் யாவும் முகட்டள வையே சார்ந்திருக்கின்றன. தொழில் துறையிலும், வணிகத் துறையிலும் முகட்டளவு பெரிதும் பயன்படுகிறது. தொழில் துறையில் சராசரி என்பது பெரும்பாலும் முகட்டளவையே குறிக்கின்றது. தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் என்பது முகட்டளவு வருமானத்தையும், சராசரி மனிதனின் வருமானம், வாங்கும் சக்தி யாவும் முகட்டளவின் மூலமே அளவிடப்படுகின்றன. பெண்களின் சராசரி நாகரிகம் என்பது பெரும்பான்மையான பெண்களின் நாகரிகத்தையும், பெண்

பெண்களின் ஆடைகளுக்காகின்ற சராசரி செலவு என்பது பெண்களின் முகட்டளவுச் சராசரியையும் குறிப்பிடுகின்றன. பொதுமக்களின் தேவைப் பொருட்களான காலணிகள், ஆடைகள், தொப்பிகள் போன்றவற்றின் சராசரி விற்பனை கள் யாவும் முகட்டளவுகளாகவே கணக்கிடப்படுகின்றன. காலணி வியாபாரிகளும், ஆடை, அணிகலன் வியாபாரிகளும் வியாபார மந்த காலங்களில் முகட்டளவுகளைக் கொண்ட காலணிகளையும், ஆடை, அணிகலன்களையும் தயாரிப்பதில் ஈடுபடுவதின் மூலம் தங்களுடைய நிறுவனங்களில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்கட்கு நிரந்தரமாக வேலை கொடுக்க முடியும். பெரும்பான்மையான பொருட்களின் சராசரி உழைப்புக் காலங்கள் முகட்டளவிலேயே கூறப்படுகின்றன. உதாரணமாக, மின் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் முகட்டளவிலேயே குறிப்பிடப்படுகிறது. பாங்குகளில் வைப்பு கள் (deposits)வைத்துக்கொள்வோரின் சராசரி எண்ணிக்கை முகட்டளவாகவே கூறப்படுகின்றது. வானிலை ஆராய்ச்சி களிலும், தாவரயியல் ஆய்வுகளிலும் முகட்டளவு அதிகமாகப் பயன்படுகிறது.

பயிற்சி 4.

(1) பின்வரும் தொடரின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

வரிசை எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9
மதிப்பெண் ...	115	98	173	136	85	144	128	100	133

(2) 10 கூலிகளின் வாரக் கூலிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இடைநிலையளவைக் காண்க.

ரூபாய் : ... 12, 18, 15, 17, 19, 16, 11, 22, 24, 13

(3) பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவைக் காண்க.

பிரிவு ...	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண் ...	4	16	30	24	36	10

(4) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு, கால்மங்கள் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
10 — 20	6
20 — 30	11
30 — 40	7
40 — 50	4
50 — 60	3
60 — 70	1

(5) கரும்பு விளைச்சல் பற்றிய பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு, கால்மங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

கரும்பு விளைச்சல் (ஏக்கருக்கு டன்கள்)	நிகழ்வெண்
35 — 40	7
40 — 45	8
45 — 50	12
50 — 55	26
55 — 60	32
60 — 65	42
65 — 70	42
70 — 75	15
75 — 80	17
80 — 85	9

(6) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலையளவு, கால்மங்கள், $நூ_{12}$, $நூ_{65}$, $ப_{2}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

வயது இடைவெளி	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
உறுப்பினர் எண்ணிக்கை	50	70	80	180	150	120	70	50

(7) பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவு, $நூ_{15}$, $ப_{3}$, $ப_{7}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
35 — 39	1
30 — 34	4
25 — 29	9
20 — 24	11
15 — 19	10
10 — 14	6
5 — 9	5
0 — 4	4

(8) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு இடைநிலையளவு நூ$_{3}$, நூ$_{72}$, ப$_{4}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

வயது (ஆண்டுகளில்)	ஆண்கள் (மில்லியன்களில்)
0	6
1 — 4	18
5 — 14	45
15 — 24	31
25 — 34	28
35 — 44	22
45 — 54	16
55 — 64	9
65 — 74	4
75ம் மேலும்	2

(9) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலையளவு, கால்மங்கள் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பின் அளவு	4	6	8	10	12	14	16
நிகழ்வெண்	2	4	5	3	2	1	4

(10) 199 மாணவர்களின் உயரங்களைத் தருகின்ற பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து கால்மங்களையும், இடைநிலையளவையும் கணக்கிடுக.

உயரம் (அங்குலங்களில்)	53	55	57	59	61	63	65	67	69
மாணவர் எண்ணிக்கை	25	21	28	20	18	24	22	18	23

(11) சமவாய்ப்புக் கூறு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட சில பண்ணைகளின் பரப்பளவுகள் பற்றிய பின்வரும் பரவலிலிருந்து இடைநிலையளவையும் கால்மங்களையும் கணக்கிடுக.

ஏக்கரில் பரப்பு (மைய மதிப்பு)	10	20	30	40	50	60	70
பண்ணைகளின் எண்ணிக்கை	7	12	17	29	31	5	3

(12) பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

உறுப்பின் அளவு	8	12	16	20	24	28	32
நிகழ்வெண்	4	8	10	6	4	2	8

(13) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

வாரக் கூலி (ரூபாயில்)	9	12	15	18	21	24	27	30
கூலி பெறுபவர் எண்ணிக்கை	20	60	150	250	200	120	50	40

(14) பின்வரும் வளர் நிகழ்வெண் பரவலைச் சாதாரண நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி இடைநிலையளவையும் முகட்டளவையும் காண்க.

வராத நாட்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
5க்குக் கீழ்	29
10 ,,	224
15 ,,	465
20 ,,	582
25 ,,	634
30 ,,	644
35 ,,	650
40 ,,	653
45 ,,	655

(15) பின்வரும் பரவலின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண்	மாணவர் எண்ணிக்கை
5க்குக்கீழ்	5
10 ,,	9
15 ,,	17
20 ,,	29
25 ,,	45
30 ,,	60
35 ,,	70
40 ,,	78
45 ,,	83
50	85

(16) 565 மனுதாரர்கள் ஒரு பொறுக்குத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
11 — 20	5
21 — 30	14
31 — 40	52
41 — 50	117
51 — 60	188
61 — 70	112
71 — 80	61
81 — 90	12
91 — 100	4

(அ) 40 சதவீத மனுதாரர்களே தெரிவு செய்யப்பட வேண்டுமாயின் தெரிவு செய்யப்படுவதற்குப் பெறவேண்டிய மீச்சிறு மதிப்பெண் யாது ?

(ஆ) தெரிவு செய்யப்படுவதற்குப் பெறவேண்டிய மீச்சிறு மதிப்பெண்ணை 35 என்று நிர்ணயம் செய்தால் எத்தனை சதவீத மனுதாரர்கள் தெரிவு செய்யப்படுவர் ?

(17) ஒரு குறிப்பிட்ட கம்பெனியில் தயாரிக்கப்பட்ட மின் கலங்களின் ஆயுட் காலங்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

ஆயுட்காலம் (மணிகள்)	மின்கலங்களின் எண்ணிக்கை
150 — 175	45
175 — 200	54
200 — 225	62
225 — 250	75
250 — 275	33
275 — 300	25
300 — 325	12
325 — 350	3

(அ) மின்கலங்களின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆயுட் காலங்களைக் கணக்கிடுக.

(ஆ) 240 மணி நேரத்தைவிட குறைவான ஆயுட்காலமுடைய மின்கலங்கள் "தரமற்றவை" யென நிராகரிக்கப்பட்டால் மேற்கண்ட கூறில் தரமான மின்கலங்கள் எத்தனை சதவீதம்?

(இ) 85 சத மின் கலங்களைத் தரமானவை யென ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டுமெனில் தரமான மின் கலங்களின் மீச்சிறு ஆயுட் காலம் எத்தனை மணி யென நிர்ணயிக்க வேண்டும்?

(18) பின்வரும் பரவலின் முகட்டளவைக் காண்க.

வீட்டின் மதிப்பு (நூறு ரூபாய்களில்)	வீடுகளின் எண்ணிக்கை
0 — 10	42
10 — 20	69
20 — 30	85
30 — 40	103
40 — 50	137
50 — 60	72
60 — 70	39
70 — 80	31
80 — 90	22

(19) பின்வரும் பரவலின் முகட்டளவு காண்க.

மைய மதிப்பு... (கி. கிராமில் எடை)	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87
நிகழ்வெண் ...	12	76	121	157	221	200	178	140	71	25	4

(20) பின்வரும் பரவலுக்கு முகட்டளவு காண்க.

மதிப்பு	நிகழ்வெண்
10 — 12	4
12 — 14	12
14 — 16	16
16 — 18	30
18 — 20	84
20 — 22	136
22 — 24	96
24 — 26	50
26 — 28	36
28 — 30	24
30 — 32	8
32 — 34	2

4. பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean)

n உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடரின் பெருக்குச் சராசரி யென்பது அத்தொடரிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களின் பெருக்கற் பலனின் n-ஆவது மூலமாகும். அதாவது, $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற n உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடரின் பெருக்குச் சராசரி யென்பது $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)^{1/n}$ ஆகும். மடக்கை மதிப்புக்களைப் பயன்படுத்தி இப்பெருக்கற் பலனின் n-ஆவது மூலத்தை எளிதில் கணக்கிடலாம். அதாவது, G என்பது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகிய n உறுப்புக்களின் பெருக்குச் சராசரி யெனக் குறிப்பிட்டால்,

$$G = (x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_n)^{1/n}$$

இரு பக்கமும் மடக்கை மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$\log G = \frac{1}{n}[\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots\ldots + \log x_n]$$

$$= \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$= x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ஆகியவற்றின் மடக்கைகளின் கூட்டுச் சராசரி.

$\therefore$ G = $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ஆகியவற்றின் மடக்கைகளின் கூட்டுச் சராசரியின் எதிர்மடக்கை.

$$= \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$$

ஆகவே, n உறுப்புக்களின் பெருக்குச் சராசரியைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத ஒரு புள்ளி விவரத் தொடரின் பெருக்குச் சராசரி யென்பது அத்தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் மடக்கை மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியின் எதிர்மடக்கையாகும்,

மாதிரி 45 :

ஒரு விற்பனை நிலையத்தின் ஆறு மாத விற்பனை மதிப்புக்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. பெருக்குச் சராசரியின் மூலம் அவ் விற்பனை நிலையத்தின் சராசரி விற்பனை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

விற்பனை மதிப்பு: 128, 203, 178, 195, 230, 249.
(ஆயிரம் ரூபாய்கள்)

தீர்வு :

விற்பனை மதிப்பு x	x இன் மடக்கை $\log x$
128	2.10721
203	2.30535
178	2.25042
195	2.29003
230	2.36173
249	2.39620
$n = 6$	13.71094

$$\therefore \log G = \frac{1}{n} \Sigma \log x$$

$$= \frac{1}{6} (13.71094)$$

$$= 2.28516$$

$\therefore$ G = எதிர்மடக்கை 2.28516 = 192.84

ஆகவே, பெருக்குச் சராசரி விற்பனை = 192.84 ஆயிரம் ரூபாய்கள். நிகழ்வெண் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி.

x_1, x_2,......, x_n ஆகியவற்றை மைய மதிப்புக்களாகவும், f_1, f_2......, f_n ஆகியவற்றை அம்மைய மதிப்புகட்குரிய நிகழ்வெண் களாகவும் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி G என்பது பின்வரும் சூத்திரத்தின் மூலம் பெறப் படுகிறது.

$$\log G = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots + f_n \log x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + fn}$$

$$= \frac{\Sigma f \log x}{\Sigma f}$$

$$= \frac{\Sigma f \log x}{N}$$

$$\therefore \quad G = \text{antilog}\left(\frac{\Sigma f \log x}{N}\right)$$

$$= \text{எதிர்மடக்கை}\left(\frac{\Sigma f \text{ மடக்கை } x}{N}\right)$$

மாதிரி 46 :

பின்வரும் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள் ...	0—5	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25	25 — 30	30 — 35
மாணவர்கள் ...	4	6	10	16	12	8	4

தீர்வு :

மதிப்பெண் (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் (f)	மடக்கை x ($\log x$)	f. மடக்கை x ($f \log x$)
2.5	4	0.39794	1.59176
7.5	6	0.87506	5.25036
12.5	10	1.09691	10.96910
17.5	16	1.24304	19.88864
22.5	12	1.35218	16.22616
27.5	8	1.43933	11.51464
32.5	4	1.51188	6.04752
மொத்தம்	60		71.48818

$$\text{மடக்கை } G = \frac{\Sigma f.\ \text{மடக்கை } x}{N}$$

$$= \frac{71.48818}{60}$$

$$= 1.19147.$$

$$\therefore G = \text{எதிர்மடக்கை } 1.19147$$

$$= 15.542$$

பெருக்குச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள் (Merits of the G.M.)

(1) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் கணிதச் சூத்திரத்தைக் கொண்டு பெருக்குச் சராசரி அமைந்துள்ளது.

(2) பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்துள்ளது.

(3) இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளுக்குட்படக் கூடிய தன்மையில் அமைந்திருக்கிறது.

(4) மிகக் குறைந்த மதிப்புக்களையும், மிகக்கூடிய மதிப்புக்களையும் கொண்ட முனையுறுப்புகளுக்கு மிதமான முக்கியத்துவமே பெருக்குச் சராசரியின் மூலம் கொடுக்கப்படுவதால்' முனையுறுப்புக்களால் பெருக்குச் சராசரி பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதில்லை. மேலும், இதன் காரணமாக, ஓர் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை விட பெருக்குச் சராசரி குறைந்த மதிப்பையே பெற்றிருக்கும்.

(5) ஓர் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் தெரிந்தால் அவ்வுறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலனைக் காண முடியும்.

(6) பல பரவல்களின் பெருக்குச் சராசரிகளும், உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளும் தெரிந்தால் கூட்டுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண முடியும்.

$N_1, N_2, \ldots\ldots, N_r$ என்ற மொத்த நிகழ்வெண்களைக் கொண்ட r பரவலின் பெருக்குச் சராசரிகள் முறையே $G_1, G_2, \ldots, G_r$ என்றும், $N = N_1 + N_2 + \ldots\ldots, N_r$ என்ற மொத்த நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட கூட்டுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி G என்றும் கொண்டால்,

$$\log G = \frac{N_1 \log G_1 + N_2 \log G_2 + \ldots\ldots + N_r \log G_r}{N_1 + N_2 + \ldots\ldots N_r}$$

$$= \frac{\Sigma N_i \log G_i}{N}$$

$$\therefore \; G = anti \log \left(\frac{\Sigma N_i \log G_i}{N}\right)$$

உதாரணம் :

40, 60 உறுப்புக்களைக் கொண்ட இரு கூறுகள் பெருக்குச் சராசரிகள் முறையே 52.78, 43.54. இக்கூறுகளை ஒன்றாக இணைத்துப் பெறக் கூடிய கூட்டுப் பரவலின் பெருக்குச் சரா சரியைக் காண்க.

இங்கு $N_1 = 40$, $N_2 = 60$ $\therefore$ $N = 40 + 60 = 100$

$G_1 = 52.78$. $G_2 = 43.54$; $G = ?$

$$\log G = \frac{N_1 \log G_1 + N_2 \log G_2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{40 \log 52.78 + 60 \log 43.54}{100}$$

$$= \frac{40\,(1.72247) + 60(1.63889)}{100}$$

$$= \frac{68.89880 + 98.33340}{100}$$

$$= \frac{167.23220}{100}$$

$$= 1.6723$$

$\therefore$ G = எதிர் மடக்கை 1.6723 = 47.022

(7) ஓர் தொடரிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் அவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைக் கொண்டு வகுத்து பெறக் கூடிய விகிதங்களின் பெருக்கற்பலன் 1 ஆகும்.

G என்பது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியெனில்,

$$G=(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)^{1/n}$$

$$\therefore\ G^n=x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$$

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் G-யால் வகுத்து பெறக் கூடிய விகிதங்களாவன :

$$\frac{x_1}{G}, \frac{x_2}{G}, \ldots\ldots, \frac{x_n}{G}$$

இவ்விகிதங்களின் பெருக்கற் பலன் $=\frac{x_1}{G}, \frac{x_2}{G} \ldots\ldots, \frac{x_n}{G}$

$$=\frac{(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)}{G^n}$$

$$=\frac{G^n}{G^n}=1$$

பெருக்குச் சராசரியின் குறைபாடுகள் (Demerits of the G.M.):

(1) பெருக்குச் சராசரியை எளிதில் புரிந்து கொள்ள முடியாது.

(2) பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுவதும் எளிதன்று.

(3) பெருக்குச் சராசரி பரவலிலுள்ள மதிப்புக்களுள் எந்த மதிப்பையும் கொண்டு பொதுவாக அமைவதில்லை.

(4) பரவலிலுள்ள மதிப்புக்களுள் ஏதாவது ஒன்று பூச்சிய மாகயிருப்பின் பெருக்குச் சராசரியும் பூச்சியமாகிவிடுமாகை யால் இத்தகைய பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரி பயன்படாது.

(5) நேரெண் மதிப்புக்களையுடைய பரவல்களுக்கு மட்டுமே பெருக்குச் சராசரி கணக்கிட முடியும்.

பெருக்குச் சராசரியின் பயன்கள் (Uses of the G. M.)

(1) விகிதங்களின் சராசரியைக் கணக்கிடவும், மாறிகளின் மாறுபாடு வீதங்களின் சராசரியைக் கணக்கிடவும் பெருக்குச் சராசரி பயன்படுகிறது.

(2) சதவீத மாறுபாடுகளின் சராசரியைக் கணக்கிடப் பெருக்குச் சராசரி பயன்படுவதால் குறியீட்டெண் (index number) தயாரிப்பில் இதன் பயன் குறிப்பிடத்தக்கவாறு அமைந்துள்ளது ('குறியீட்டெண்' அத்தியாயத்தைப் பார்க்கவும்.)

(3) பரவலிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களும் உரிய முக்கியத் துவம் கொடுப்பதால் தொழிலியல் உற்பத்திக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பிலும், வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பி லும் ஏனைய சராசரிகளைவிட இதுவே சிறந்ததெனக் கருதப் பட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. (குறியீட்டெண் அத்தியாயத் தைப் பார்க்கவும்).

(4) பொதுவாக எந்தப் பண்டத்தின் விலையும் பூச்சிய மதிப்பையோ அல்லது எதிர் பெறுமானத்தையோ பெறுவதில்லை யாகையால், விலைவாசி என்ற மாறி மீச்சிறு நேர் மதிப்பிலிருந்து நேர் கந்தழி (positive infinity) வரையுள்ள எல்லா மதிப்புக்களை யும் பெறக் கூடியதாகயிருக்கிறது. ஆகவே, விலைவாசி பற்றிய சராசரிகளின் கணக்கீடுகளில் பெருக்குச் சராசரி அதிகமாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

பெருக்குச் சராசரியை எப்பொழுது பயன்படுத்த வேண்டும்?

மூன்று வகையான விவரங்களின் சராசரிகளைக் கணக்கிட பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்த வேண்டும். அவை யாவன :—

(1) மாறியினுடைய மதிப்புக்களின் மாறுபாடு வீதங் களின் சராசரியைக் காண பெருக்குச் சராசரியைப் பயன் படுத்த வேண்டும்.

(2) விகிதங்கள், சதவீதங்கள் ஆகியவற்றின் சராசரி களைக் கணக்கிட பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்த வேண் டும்.

(3) ஏதாவதொரு நேரெண்ணைக் கீழ் எல்லை மதிப்பாகக் கொண்டும், மேல் எல்லையற்றதாகவுமுள்ள மாறிகளின் சராசரி களைக் காண பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்த வேண்டும். மீச்சிறு நேர்மதிப்பிலிருந்து நேர்கந்தழி வரையுள்ள மதிப்புக் களைக் கொண்ட ஒரு பரவல் அதிக நேர்கோட்டமுடைய (high degree of positive skewness — கோட்டம் அத்தியாயத்தைப்

பார்க்கவும்) பரவல் எனப்படும். ஆகவே, அதிக நேர் கோட்டமுடைய பரவலின் சராசரியைப் பெருக்குச் சராசரியி லிருந்து பெற வேண்டும்.

5. *இசைச் சராசரி* (Harmonic mean) :

ஒரு பரவலின் இசைச் சராசரி யென்பது அப்பரவலிலுள்ள மதிப்புக்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்பு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன ஒரு தொடரிலுள்ள n உறுப்புக் களின் மதிப்புக்களெனக் கொள்க.

$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ என்பன அம்மதிப்புக்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களாகும். இத் தலைகீழ் மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{\left(\Sigma\frac{1}{x}\right)}{n}$$

ஆகும். இசைச் சராசரி யென்பது இத் தலைகீழ்க் கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்பாகும். ஆகவே, H என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள n மதிப்புக்களின் இசைச் சராசரி என்றால்,

$$\frac{1}{\mathrm{H}}=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{\left(\Sigma\frac{1}{x}\right)}{n}$$

$$\therefore \mathrm{H}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=\frac{n}{\left(\Sigma\frac{1}{x}\right)}$$

இசைச் சராசரி பெரும்பாலும் காலவீதங்களின் (Time rates) சராசரியைக் காணப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உதாரண மாக, அ, ஆ, இ என்ற மூவர் ஒரு மர்ம நாவலை முறையே 30, 20, 40 நிமிடங்களில் வாசித்து முடிப்பரெனக் கொள் வோம். அந்த நாவலை வாசித்து முடிக்க சராசரி எத்தனை நிமிடங்களாகும் என்பது போன்ற கணக்கீடுகளில் இசைச் சராசரியைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இங்கு, 30 நிமி.,

20 நிமி., 40 நிமி. என்பவை ஒரு நாவலை வாசித்து முடிக்க அ, ஆ, இ என்பவர்களால் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட கால வீதங்களாகும். இக்கால வீத மதிப்புக்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்கள் முறையே $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40}$ ஆகும். இத் தலைகீழ் மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}}{3}$$

$$= \frac{0.0333+0.0500+0.0250}{3}$$

$$= \frac{0.1083}{3}$$

∴ இசைச் சராசரி = இக் கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்பு

$$= \frac{3}{0.1083}$$

$$= 27.7 \text{ நிமி.}$$

ஆகவே, அந்த நாவலை வாசிக்க எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சராசரி நேரம் 27.7 நிமிடங்கள்.

நிகழ்வெண் பரவலின் இசைச் சராசரி.

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற மதிப்புக்களை மைய மதிப்புக்களாகவும், $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ என்பவற்றை அவைகளுக்குரிய நிகழ்வெண்களாகவும் கொண்ட ஒரு பரவலின் இசைச் சராசரி H என்பது

$$H = \frac{1}{\frac{\left(\Sigma \frac{f}{x}\right)}{N}}$$

$$= \frac{N}{\Sigma \frac{f}{x}}$$

$$= \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_n}{x_n}}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் பெறப்படுகிறது.

மாதிரி **47 :**

பின்வரும் பரவலின் இசைச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

நிமிடங்கள்	...	10	15	20	25	30
ஆட்கள்	...	20	30	60	50	30

தீர்வு :

நிமிடங்கள் x	ஆட்கள் f	$\frac{f}{x}$
10	20	2
15	30	2
20	60	3
25	50	2
30	30	1
மொத்தம்	190	10

$\therefore$ இசைச் சராசரி $= \frac{N}{\left(\Sigma \frac{f}{x}\right)} = \frac{190}{10} = 19$ நிமிடங்கள்.

இசைச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள் (Merits of the H.M.)

(1) இசைச் சராசரி நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு கணிதச் சூத்திரத்தைக் கொண்டு அமைந்துள்ளது.

(2) பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்துள்ளது.

(3) இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளுக்குட்படக் கூடியதாக அமைந்துள்ளது.

(4) காலவிதங்களின் சராசரியைச் சரியாக அளவிடக் கூடியது.

(5) பெருக்குச் சராசரியைவிட குறைவான மதிப்புடைய தாகயிருப்பதால் விலைவாசிகளின் அசைவுகளை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

இசைச் சராசரியின் குறைபாடுகள் (Demerits of the H. M):

(1) இசைச் சராசரியைப் புரிந்துகொள்ளுவது சற்று சிரம மாகயிருக்கும்.

(2) தலைகீழ் மதிப்புக்களைக் கொண்டு கணக்கீடுகள் செய்யப்படுவதால் இசைச் சராசரியைக் கணிப்பது மிகவும் கடினம்.

(3) பெரிய மதிப்புக்களுக்குக் குறைந்த முக்கியத்துவமும்; சிறிய மதிப்புக்களுக்கு அதிக முக்கியத்துவமும் அளிக்கப்படு கின்றன.

(4) மிகக் குறைந்த மதிப்புக்களால் பெரிதும் பாதிக்கப் படுகிறது.

(5) பூச்சிய மதிப்புக்களைக் கொண்ட தொடர்களுக்கு இசைச் சராசரி காண முடியாது.

இசைச் சராசரியின் பயன்கள் (Uses of the H. M):

இசைச் சராசரி மிகவும் குறைந்த அளவிலேயே பயன்படுத் தப்படுகிறது. தொழிலாளி செய்யும் வேலையின் அளவை மாறிலியாகக் கொண்டு சராசரி வேலை வீதத்தைக் கணக்கிட இசைச் சராசரி பயன்படுத்தப் படுகிறது பெருக்குச் சராசரியை விட குறைந்த மதிப்புடையதாகயிருப்பதால் விலைவாசி அசைவு களின் சராசரியைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. சராசரி வேலை வீதங்களையும், சராசரி வேகத்தையும் அளவிட தொழில் துறைகளில் இசைச் சராசரி பெரிதும் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

பல்வேறு சராசரிகளின் இணை தராதரங்கள்

(1) கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணிதச் சூத்திரங்களுடன் அமைந்துள்ளன. ஆகவே இவை மூன்றும் இயற்கணிதக் கணக்கீடுகளுக்குட்படக் கூடிய தன்மை பெற்றுள்ளன. ஆனால், இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றின் சூத்திரங்கள் கணிதக் கொள்கையின் அடிப்படையில் அமையவில்லையாகையால் இவற்றை இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளில் செயல்படுத்த முடியாது.

(2) எல்லாச் சராசரிகளுள் கூட்டுச் சராசரிதான் எளிதில் புரிந்துக்கொள்ள கூடியதாகவும், கணக்கிடக் கூடியதாகவும் அமைந்துள்ளது. இதற்கு அடுத்தபடியாக இடைநிலையளவும் முகட்டளவும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் வகையிலமைந்துள்ளன. ஆனால் பெருக்குச் சராசரியையும், இசைச் சராசரியையும் புரிந்து கொள்வதும், கணக்கிடுவதும் மிகவும் கடினம்.

(3) கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவை பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்துள்ளன. ஆனால் இடைநிலையளவும், முகட்டளவும் இவ்வாறு எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமையவில்லை. ஆகவே, முனையுறுப்புக்கள் விடுபட்டிருந்தாலும் அல்லது தெளிவாகக் கொடுக்கப்படாவிடினும், நிகழ்வெண் பரவலில் முனைப்பிரிவு எல்லைகள் தெளிவாகக் கொடுக்கப் படாமலிருந்தாலும் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடமுடியாது; ஆனால் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிட முடியுமாகையால் இத்தகைய பரவல்களில் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவையே சராசரிகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்றன. மேலும் இயல்புக்குப் புறம்பான மதிப்புக்களையுடைய முனையுறுப்புக்களால் கூட்டுச் சராசரியும் இசைச் சராசரியும் பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றன. ஆனால் பெருக்குச் சராசரி முனையுறுப்புக்களுக்கு மிதமான முக்கியத்துவமே அளிப்பதால் பெரிதளவில் பாதிக்கப்படுவதில்லை. இதன் காரணமாகவே, குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பெருக்குச் சராசரி அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆனால் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றின் கணக்கீடுகளில் முனையுறுப்புக்கள் பயன்படுத்தப் படுவதில்லையாகையால் இவை முனையுறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

(4) பூச்சிய மதிப்புக்களைக் கொண்ட தொடர்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிட

முடியாது. ஆனால் மற்ற மூன்று சராசரிகளையும் கணக்கிட முடியும்.

(5) மாறியின் தனி மதிப்புக்களின் **(absolute values)** சராசரியை அளவிட கூட்டுச் சராசரியையும், மாறியின் மதிப்புக்களில் காணப்படுகின்ற வீதங்கள், விகிதங்கள் சதவீத மாறுபாடு ஆகியவற்றின் சராசரிகளை அளவிட பெருக்குச் சராசரியையும், கள் காலவீதங்களின் சராசரியை அளவிட இசைச் சராசரியையும், பெரும்பான்மை உறுப்புக்களின் மையப்போக்கை அளவிட முகட்டளவையும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(6) இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றை வரைபட முறையிலும் காண முடியும். ஆனால் மற்ற சராசரிகளை வரைபட முறையில் அளவிட முடியாது.

(7) அளவின விவரங்களாக மாற்ற முடியாத மாறிகளுக்கும் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றைக் காண முடியும்; ஆனால் மற்ற சராசரிகளைக் காண முடியாது.

(8) வருமானம், ஊதியம், சொத்து பற்றிய அதிகக் கோட்டம் வாய்ந்த பரவல்களில் ஏனைய சராசரிகளைவிட இடைநிலையளவுதான் மையப் போக்கைச் சரியாகப் பிரதிபலிக்கக் கூடியதாக அமைந்துள்ளது. வருமானம், ஊதியம் போன்ற அதிக நேர் கோட்டம் வாய்ந்த பரவல்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரியைச் சிறந்த மையப் போக்காக ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

(9) சிலவகைப் புள்ளி விவரத் தொடர்களின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆறியவற்றைப் பார்வையினாலேயே அளவிட முடியும். ஆனால் மற்ற சராசரிகளுக்கு இப்பண்பு கிடையாது.

(10) பல பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் அல்லது பெருக்குச் சராசரிகள் ஆகியவற்றையும் அப்பரவல்களின் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளையும் கொண்டு கூட்டுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி அல்லது பெருக்குச் சராசரியைர் கணக்கிட முடியும். ஆனால் ஏனைய சராசரிகளுக்கு இத்தகைய சிறப்பு கிடையாது.

(11) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும் பெருக்கி அப்பரவலிலுள்ள உறுப்புக்களின் மொத்த மதிப்பைப் பெற முடியும். இதுபோல், ஒரு

பரவலின் பெருக்குச் சராசரியையும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும் கொண்டு அவ்வுறுப்புக்களுடைய மதிப்புக்களின் பெருக்கற் பலனைப் பெறமுடியும். ஆனால் மற்ற சராசரிகளுக்கு இத்தகைய பண்பு எதுவும் கிடையாது.

(12) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறக்கூடிய எல்லா உறுப்புக்களின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். ஒரு தொடரின் இடைநிலையளவிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எல்லா உறுப்புக்களின் தனி விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை மீச்சிறு மதிப்புடையதாக யிருக்கும். ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் அத்தொடரின் பெருக்குச் சராசரியைக் கொண்டு வகுத்து பெறக்கூடிய விகிதங்களின் பெருக்கற் பலன் 1 ஆகும்.

(13) கூறெடுத்தல் முறைகளிலேற்படுகின்ற சிறு மாறுபாடுகளால் பாதிக்கப்படாமல் கூட்டுச் சராசரி மட்டுமே நிலைத்தன்மை பெற்று விளங்குகின்றது. ஏனைய சராசரிகளுக்கு இத்தகைய நிலைத்தன்மை கிடையாது. இதன் காரணமாகத்தான் கூறெடுத்தல் கொள்கைகளில் கூட்டுச் சராசரி பரந்த அளவில் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(14) *சீரான* பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகிய மூன்றும் சமமாயிருக்கும். ஒரு மிதமான சீரில்லாப் பரவலில் இம்மூன்று சராசரிகளும்

கூட்டுச் சராசரி — முகடு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலையளவு) என்ற தொடர்பில் அமைந்திருக்கும். குறைந்த மதிப்புக்களை நோக்கி நீண்ட வாலுடன் அமைந்த எதிர்கோட்டப் பரவல்களில் இம்மூன்று சராசரிகளும் அவற்றின் மதிப்புகளுக்கேற்ப கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு என்ற ஏறுவரிடசயிலும், உயர்ந்த மதிப்புக்களை நோக்கி நீண்ட வாலுடன் அமைந்த நேர்கோட்டப் பரவல்களில் இவை மூன்றும் முகட்டளவு, இடைநிலையளவு, கூட்டுச் சராசரி என்ற ஏறு வரிசை மதிப்புக்களுடனும் அமைந்திருக்கும். பொதுவாக எல்லாப் பரவல்களிலும் எல்லாப் உறுப்புகளின் மதிப்புக்களும் சமமாக யில்லாவிடில் பெருக்குச் சராசரி இசைச் சராசரியைவிட அதிகமாகவும், கூட்டுச் சராசரி பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகமாகவுமிருக்கும்.

(6) நிறையிட்ட சராசரிகள் (Weighted averages)

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகளுள் ஒரு சில உறுப்புக்கள் ஏனைய உறுப்புக்களைவிட அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகக் கருதப்படலாம். இத்தகைய உறுப்புகளின் முக்கியத்துவங்கள் அத்தொடரின் சராசரியில் பிரிதிபலிக்க வேண்டுமாயின் அவ்வுறுப்புக்கள் பிற உறுப்புகளைவிட எந்த விகிதங்களில் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகக் கருதப் படுகின்றனவோ அந்த விகிதங்களில் அவ்வுறுப்புகளின் மதிப்புக்களுக்கு முக்கியத்துவங்கள் அளிக்கப்படவேண்டும். இவ்வாறு ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் முக்கியத்துவங்களைக் குறிப்பிடுகின்ற விகிதங்களுக்கு "நிறைகள்" (weights) என்று பெயர். உதாரணமாக, ஆங்கிலம், தமிழ், கணிதம், பொருளாதாரம், வரலாறு ஆகிய பாடங்களில் ஒரு மாணவன் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் முறையே 41, 48, 87, 38, 46 எனக் கொள்வோம். அம்மாணவன் ஐந்து பாடங்களிலும் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{41+48+87+38+46}{5} = \frac{260}{5} = 52$$

ஆகும். இச்சராசரியில் எல்லாப் பாடங்களும் சம முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகக் கருதப்பட்டுள்ளன. ஆனால் தமிழ்ப் பாடத்தைப் போல் ஆங்கிலம் இருமடங்குகளும் கணிதம் மூன்று மடங்குகளும், பொருளாதாரம் இரு மடங்குகளும், வரலாறு ஒரு மடங்கும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை யெனக் கொள்வோம். ஆகவே, சராசரியைக் கணக்கிடும்போது, தமிழ், வரலாறு ஆகிய பாடங்களின் மதிப்பெண்களை 48, 46 என்றே வைத்துக் கொண்டு ஆங்கிலம், பொருளாதாரம் ஆகிய பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இரு மடங்கு முக்கியத்துவமும், கணிதப் பாடத்தின் மதிப்பெண்ணுக்கு மூன்று மடங்கு முக்கியத்துவமும் அளிக்கப்படவேண்டும். அதாவது, கூட்டுச் சராசரி காணும் போது மேற் கூறப்பட்ட பாங்களின் மதிப்பெண்களை முறையே 2, 1, 3, 2, 1 ஆகியவற்றால் பெருக்கி வந்த பெருக்கற் பலன்களின் கூட்டுத் தொகையை 2, 1, 3, 2, 1 என்ற காரணிகளின் கூட்டுத் தொகையால் வகுக்க வேண்டும். 2 1, 3, 2, 1 என்ற இக்காரணிகளிகள் முறையே ஆங்கிலம், தமிழ், கணிதம், பொருளாதாரம், வரலாறு ஆகிய பாடங்களின் நிறைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு பெறப்படுகிற கூட்டுச் சராசரிக்கு "நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி" (weighted arthmetic mean) என்று பெயர். பொதுவாக, ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்

புக்களின் முக்கியத்துவங்களுக்கேற்ப அவ்வுறுப்புக்களின் மதிப்புக்களுக்கு நிறைகள் அளிக்கப்பட்டுக் கணக்கிடப்படுகின்ற ஒரு சராசரிக்கு ''நிறையிட்ட சராசரி'' (weighted average) என்று பெயர். மேற்கூறப்பட்ட உதரணத்தில்,

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{2\,(41)+1\,(48)+3\,(87)+2\,(38)+1\,(46)}{2+1+3+2+1}$$

$$= \frac{82+48+261+76+46}{9}$$

$$= \frac{513}{9}$$

$$= 57$$

பொதுவாக, ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் x_1, x_2, x_3,......x_n என்றும், அவற்றின் நிறைகள் முறையே w_1 w_2, w_3,......, w_n என்றும் கொள்வோமானல், அத்தொடரின்

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + \ldots\ldots + w_n\,x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n}$$

$$= \frac{\Sigma\,w\,x}{\Sigma\,w}$$

மேற்கண்ட தொடரின் நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$$= \left(x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \ldots\ldots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+w_2+\ldots\ldots+w_n}}$$

$$= \left(x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \ldots\ldots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma\,w}}$$

∴ நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியின் மடக்கை

$$= \frac{w_1 \,.\, \text{மடக்}\; x_1 + w_2\; \text{மடக்}\; x_2 + \ldots + w_n \cdot \text{மடக்}\; x_n}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n}$$

$$= \frac{\Sigma\,w \,.\, \text{மடக்கை}\; x}{\Sigma\,w}$$

$$= \frac{\Sigma\ w \log w}{\Sigma\ w}$$

∴ நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$$= \text{எதிர்மடக்கை} \left(\frac{\Sigma\ w\ \text{மடக்கை}\ x}{\Sigma\ w} \right)$$

$$= \text{antilog} \left(\frac{\Sigma\ w \log x}{\Sigma\ w} \right)$$

இதுபோல், நிறையிட்ட இசைச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma\ w}{\left(\Sigma\ \dfrac{w}{x} \right)}$ என்று

காணலாம். ஆகவே நிறையிட்ட சராசரி என்பது மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகளை மையமதிப்புக்களாகவும், அவற்றிற்குரிய நிறைகளை மைய மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்வெண்களாகவும் கொண்ட ஓர் நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியென்பது விளங்கும். நிறையிட்ட சராசரி முறை குறியீட்டெண் தயாரிப்புகளிலும் கல்வி, உளவியல் தொடர்பான விவரங்களுக்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மாதிரி 48 :

உதவித் தொகையளிப்பதை நிர்ணயிக்கும் பொருட்டு ஓர் தேர்வு நடத்தப்பட்டது. பல்வேறு பாடங்களுக்கும் வெவ்வேறு நிறைகள் வழங்கப்பட்டன. தேர்வு எழுதியவர்களுள் மூன்று பேர்களே ஒவ்வொரு பாடத்தில் 50% மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றிருந்தனர். மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

பாடம்	நிறை	A-யின் மதிப்பெண்கள்	B-யின் மதிப்பெண்கள்	C-யின் மதிப்பெண்கள்
புள்ளியியல்	4	63	60	65
கணக்குப் பதிவியல்	3	65	64	70
பொருளாதாரம்	2	58	56	63
வணிகச் சட்டம்	1	70	80	52

உயர்ந்த மதிப்பெண்ணைப் பெற்றவருக்கு உதவித்தொகை யளிக்கப்பட வேண்டுமானால், உதவித் தொகையைப் பெறுவர் யார்? (மதுரை பி. காம். 1969 ஏப்.)

தீர்வு :

A-யின் நிறையிட்ட

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{4(63)+3(65)+2(58)+1(70)}{4+3+2+1}$$

$$= \frac{252+195+116+70}{10}$$

$$= \frac{633}{10} = 63.3 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

B-யின் நிறையிட்ட

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{4(60)+3+(94)+2(56)+1(80}{4+3+2+1}$$

$$= \frac{240+192+112+80}{10}$$

$$= \frac{624}{10} = 62.4 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

C-யின் நிறையிட்ட

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{4(65)+3(70)+2(63)+1(52)}{4+3+2+1}$$

$$= \frac{260+210+126+52}{10}$$

$$= \frac{648}{10} = 64.8 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

C-யின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி மற்ற இருவரையும் விட அதிகமாகயிருப்பதால் உதவித் தொகை C-க்கு அளிக்கப்பட வேண்டும்.

சீர்படா இறப்பு வீதமும், தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதமும் (Crude death- rate and standardised death-rate) :

ஓர் குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு ஆண்டிலேற்பட்ட இறப்புகளின் எண்ணிக்கையை அவ்விடத்தில் வாழ்ந்து வந்த மொத்த மக்கள் தொகையால் வகுத்துக் கிடைக்கப் பெறும் விகிதத்தை ஆயிரத்தால் பெருக்கிக் கிடைப்பது அந்த இடத்தின் 'சீர்படா இறப்பு வீதம்' (crude death-rate) என்றழைக்கப்படுகிறது. இறப்பு வீதம் ஆண்களுக்கும் பெண்களுக்கும் வித்தியாசமாக யிருப்பதோடு வயதுக்குத் தக்க மாறுபாடும் தன்மை வாய்ந்த ததுமாகும். மேலே கூறப்பட்ட இறப்பு வீதத்தின் வரையறை ஆண்-பெண் என்ற பாகுபாட்டையும், பல்வேறு வயதுப் பிரிவுகளையும் கருதாமல் கூறப்பட்டிருப்பதால் அது சீர்படா இறப்பு வீதம் என்றழைக்கப்படுகிறது. ஓர் இடத்திலுள்ள மக்களின் பல்வேறு வயதுப் பிரிவுகளின் இறப்பு வீதங்கள் ஒரே தரமான மக்கள் தொகுதியின் பல்வேறு வயதுப் பிரிவுகளின் இறப்பு வீதங்களுடன் ஒப்பிடப்பட்டு, தரமான மக்கள் தொகுதியின் அடிப்படையில் அவற்றின் நிறையிட்ட சராசரி காணப்படுகிறது. இத்தகைய நிறையிட்ட சராசரி இறப்பு வீதத்திற்குத் 'தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம்' (Standardised death-rate) என்று பெயர். இத்தகைய தரப்படுத்தப்படும் முறை பிறப்பு வீதம், திருமண வீதம் ஆகியவற்றிற்கும் பயன்படுத்தப் படுகிறது. பல்வேறு இடங்களின் தரப்படுத்தப்பட்ட வீதங்களை ஒன்றோடொன்று ஒப்பிட முடியும்.

மாதிரி 49 :

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியின் சீர்படா இறப்பு வீதம், தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு, அவற்றைத் தரமான மக்கள் தொகுதியின் சீர் படா இறப்பு வீதத்துடன் ஒப்பிடுக. ஒப்புமையிலிருந்து நீங்கள் கொள்ளும் முடிவு யாது ?

வயதுப் பிரிவு	தரமான மக்கள் தொகுதி		உள்ளூர் மக்கள் தொகுதி	
	மக்கள் தொகை	இறப்புகள்	மக்கள் தொகை	இறப்புகள்
0 — 10	600	18	400	16
10 — 20	1000	5	1500	6
20 — 60	3000	24	2400	24
60—100	400	20	700	21
மொத்தம்	5000	67	5000	67

தீர்வு :

வயதுப் பிரிவு	தரமான மக்கள் தொகை W	உள்ளூர் மக்கள் தொகை			Wx
		மக்கள் தொகை	இறப்புகள்	இறப்பு வீதம் (x)	
0-10	600	400	16	40	24000
10-20	1000	1500	6	4	4000
20-60	3000	2400	24	10	30000
60-100	400	700	21	30	12000
மொத்தம்	5000	5000	67		70000

தரமான மக்கள் தொகுதியின் சீர்படா இறப்பு வீதம்

$$= \frac{67}{5000} \times 1000 = 13.4.$$

உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியின் சீர்படா இறப்பு வீதம்

$$= \frac{67}{5000} \times 1000 = 13.4$$

உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியின் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம்

$$= \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W}$$

$$= \frac{7000}{5000} = 14.$$

தரமான மக்கட் தொகுதியின் சீர்படா இறப்பு வீதம் உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியின் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதத்தைவிட குறைவாகயிருப்பதால், தரமான மக்கள் தொகுதி உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியைவிட நலமாக யிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

மக்கள் தொகை மதிப்பீடு :

நம் நாட்டில் பத்து ஆண்டுகட்கொரு முறை மக்கள் தொகைக் கணிப்புச் செய்யப்படுவதை நாமறிவோம். ஆனால், இடைப்பட்ட ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகை மதிப்பீடுகள் அரசாங்கத்தின் பல பணிகளுக்குத் தேவைப்படுகின்றன. ஆண்டுதோறும் மக்கள் கணிப்புச் செய்வதும் சாத்தியமன்று. இடைப்பட்ட ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகைகளை இடைச் செருகல் (Interpolation) முறைகளின் மூலம் மதிப்பிட முடியும். இருப்பினும், இடைப்பட்ட ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகைகள் பெரும்பாலும் மால்துஸ் (Malthus) கொள்கையின் அடிப்படை யிலேயே மதிப்பிடப்படுகின்றன. மக்கள் பெருக்கம் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைந்திருப்பதாகவும் கூட்டுவட்டி விதிக் குட்பட்டிருப்பதாகவும் (compound interest law) கி.பி 1798 இல் மால்துஸ் என்பவர் அறிவித்தார். அடுத்தடுத்த மக்கள் கணிப்புக்களின்போது $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ என்பன மக்கள் பெருக்கத் தின் வீதங்களையும் r என்பது சராசரி மக்கள் பெருக்க வீதத்தை யும் குறிப்பிட்டால், $r, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ என்பன பின்வரும் சூத்திரத்தின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$(1+r)^n = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\ldots\ldots(1+r_n)$$

மாதிரி 50 :

இந்தியாவின் மக்கட் தொகை பற்றிய பின்வரும் விவரங் களிலிருந்து சராசரி மக்கட் பெருக்க வீதத்தைக் கணக்கிட்டு, 1971-ஆம் ஆண்டின் மக்கட் தொகையிலிருந்து 1981-ஆம் ஆண்டின் மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	மக்கள் தொகை (மில்லியன்களில்)
1901	236.2
1911	252.1
1921	251.3

1931	279.0
1941	318.7
1951	361.1
1961	439.2
1971	542.0

தீர்வு :

ஆண்டு	மக்கள் தொகை (மில்லியன்கள்)	$(1+r_i)$	$log\ (1+r_i)$
1901	236.2	—	
1911	252.1	$\frac{252.1}{236.2}$	0.02828
1921	251.3	$\frac{251.3}{252.1}$	$\bar{1}.99861$
1931	279.0	$\frac{279.0}{251.3}$	0.04542
1941	318.7	$\frac{318.7}{279.0}$	0.05780
1951	361.1	$\frac{361.1}{318.7}$	0.05411
1961	439.2	$\frac{439.2}{361.1}$	0.08515
1971	542.0	$\frac{542.0}{439.2}$	0.09134
		மொத்தம்	0.36072

$$(1+r)^7\ (1+r_1)(1+r_2)\ldots\ldots(1+r_7)$$

$$\therefore\ 7\ log\ (1+r) = \Sigma\ log\ (1+r_i)$$

$$0.36072$$

$$\therefore\ log\ (1+r) = \frac{0.36072}{7} = 0.05153$$

$\therefore \quad 1+r \quad = antilog\ 0.05153$

$= 1.1259$

$\therefore$ சராசரி மக்கள் பெருக்க விதம் $= r = 1.1259 - 1 = 0.1259$.

1981 மக்கள் தொகை மதிப்பீடு $= (1+r) \times 1971$இல் மக்கள் தொகை

$= 1.1259 \times 542$

$= 610.24$ மில்லியன்கள்

$= 61.024$ கோடிகள்;

வினாத்தாள் 6.

(1) கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவை "மையப் போக்கு அளவைகள்" என்றழைக்கப்படுகின்றன. "மையப்போக்கு" என்பதன் மூலம் நீவிர் அறிந்து கொள்வது யாது?

(2) இடைநிலையளவு என்றாலென்ன? (i) வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஒரு தொடரிலிருந்து, (ii) ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து இடைநிலையளவு எவ்வாறு கணக்கிடப் படுகிறதென்பதை விவரிக்கவும்.

(3) ஓர் சராசரி என்ற முறையில் இடைநிலையளவின் சிறப்பியல்புகளையும், தீய பண்புகளையும் கூறுக.

(சென்னை, பி.காம். 1967 ஏப்.)

(4) முகட்டளவை வரையறுக்கவும்; அது எவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது? அது எப்பொழுது பயன்படுத்தப் பட வேண்டும்?

(5) நிகழ்வெண் பரவலில் ஓர் பிரிவு எல்லைக்குள் முகட்டளவை நிர்ணயிப்பதற்குரிய விதி முறைகளைக் கூறுக.

(6) ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றிற்குரிய சூத்திரங்களை எழுதுக.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1969)

(7) கூட்டுச் சராசரி இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றை வரையறுக்கவும்; மையப் போக்கு அளவைகள் என்ற முறையில் அவைகளை ஒப்பிடுக.

ஒரு பரவலின் முகட்டளவை நிர்ணயிக்கின்ற வரைபட முறை யொன்றையும், பகுமுறை (analytical method) ஒன்றையும் தற்கோள்களுடன் விளக்குக.

(மதுரை, எம்.ஏ. 1969 பு மு)

(8) முகட்டளவின் பயன்களையும் தீய பண்புகளையும் விவரிக்கவும்.

(9) கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிடும்பொழுது முகட்டளவின் சிறப்பியல்புகளையும் குறைபாடுகளையும் விவரிக்கவும்.

(மதுரை, பி.காம்., 1969 ஏப்.)

(10) பெருக்குச் சராசரியை வரையறுக்கவும்; அது எவ்வாறு கணக்கிடப்படுகிறதென்பதை விளக்கவும்.

(11) பெருக்குச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகளையும், தீய பண்புகளையும் விவரிக்கவும்.

(12) பெருக்குச் சராசரியை ஓர் பரவலின் சராசரியாக ஏற்றுக் கொள்வதால் பெறப்படும் நன்மைகள் யாவை?

(13) மற்ற சராசரிகளுக்குப் பதிலாக பெருக்குச் சராசரியை எப்பொழுது பயன்படுத்த வேண்டும்?

(14) எந்தெந்த சந்தர்ப்பங்களில், சராசரியை அளவிட

(i) கூட்டுச் சராசரியைவிட பெருக்குச் சராசரி உகந்தது?

(ii) இடைநிலையளவை விட முகட்டளவு உகந்தது என்பதை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(மதுரை, பி.காம். 1971 ஏப்.)

(15) (அ) கூட்டுச் சராசரியை விட இடைநிலையளவைப் பயன்படுத்துதல் நன்று.

(ஆ) பெருக்குச் சராசரியைப் போல் கூட்டுச் சராசரி திருப்திகரமானதாக யிராது.

(இ) இடைநிலையளவை விட முகட்டளவு சிறந்ததாகப் பயன்படுத்தப்படும் என்பதற்கு ஓர் சந்தர்ப்பத்தைக் குறிப்பிட்டு ஒரு உதாரணத்துடன் விளக்குக.

(16) இசைச் சராசரியை வரையறுத்து, அது எவ்வாறு கணிக்கப்படுகிறதென்பதை விளக்குக. இதன் பயன்கள் யாவை?

(17) இசையிடையளவு (harmonic mean) எந்தெந்த சந்தர்ப்பங்களில் மையப் போக்கினை அளவிடக் கூடிய தகுதி பெற்றிருக்கிறதென்பதைக் விளக்குக.

(சென்னை, பி.காம். 1962 செப்)

(18) 'மையப் போக்கு' என்ற தொடருடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள பொருளை விளக்குக. மையப் போக்கு அளவைகள் என்ற முறையில் கூட்டுச் சராசரி பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றின் பயன்களை விவரிக்கவும். எந்தெந்த சந்தர்ப்பங்களில் மேற்கண்ட மூன்று சராசரிகளுள் ஒவ்வொன்றும் பொருத்தமான அளவையாகத் தெரிவு செய்யப்பட வேண்டும்? (மதுரை, எம்.ஏ. 1969 ப. மு.)

(19) பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றை வரையறுக்கவும். அவற்றின் பயன்களையும் வரம்புகளையும் விளக்குக. (மதுரை, பி.காம். 1972 ஏப்.)

(20) பல்வேறு சராசரிகளையும் குறிப்பிட்டு, அவற்றின் சிறப்பியல்புகள், குறைபாடுகள் ஆகியவற்றை ஒப்பிடுக. (சென்னை பி.காம். 1962 செப்.)

(21) நான்கு முக்கிய மையப் போக்கு அளவைகளின் சிறப்பியல்புகள், குறைபாடுகள் ஆகியவற்றை விவரிக்கவும்.

(22) கால்மங்கள், பதின்மங்கள், நூற்றுமங்கள் என்றுலென்ன? அவை எவ்வாறு பயன்படுகின்றன?

(23) பின்வருவனவற்றை விளக்குக ;—

(i) பதின்மங்கள்,

(ii) நூற்றுமங்கள். (மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

(24) கால்மங்கள், பதின்மங்கள் ஆகியவற்றின் வேறுபாடுகளை விவரிக்கவும். (மதுரை பி.காம். 1972 ஏப்.)

(25) நியையிட்ட சராசரி என்றுலென்ன? நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியின் பயன்கள் யாவை?

(26) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி என்றுலென்ன? அதன் பயன்களை விவரிக்கவும்.

(27) பல்வேறு சராசரிகளின் இணை தராதரங்கள் பற்றி விவாதிக்கவும்.

(28) சிறந்த சராசரி எது? (மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

(29) சீர்படா இறப்பு வீதம், தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் ஆகியவற்றை விளக்குக.

(30) சிறு குறிப்பு வரைக :—

(அ) மையப்போக்கு அளவைகள்.

(மதுரை பி.காம். 1970 செப்., எம்.ஏ. 1971)

(ஆ) கால்மங்கள்.

(சென்னை பி.காம். 1960 செப்., 61 ஏப்., 68 ஏப்)

(இ) முகட்டளவு. (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்)

(ஈ) பதின்மங்களும் நூற்றுமங்களும்.

(உ) பெருக்குச் சராசரி

(பி.காம். சென்னை 1960 ஏப்., 62 ஏப்., 68 ஏப்., மதுரை 1970 செப்.)

(ஊ) பெருக்குச் சராசரியும் இசைச் சராசரியும்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்)

பயிற்சி 5

(1) ஐந்து ஆண்டுகட்கு ஒரு தொகை ஒரு தொழிலில் முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஐந்து ஆண்டுகளிலும் அத் தொகைக்கு முறையே 5.50%, 4.78%, 4.20%, 3.91%, 4.64% என்ற வீதங்களில் இலாபங்கள் கிடைக்தன. அம்முத லுக்குக் கிடைத்த ஆண்டுச் சராசரி இலாபமென்ன ?

(2) மதுரையில் ஒரு பகுதியில் வாழும் 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் வருமாறு :

வருமானம்......85, 70, 10, 75, 500, 8, 42, 250, 40, 36. ரூபாய்கள்)

இவ்விவரங்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றை காண்க.

(3) பலதரப்பட்ட மக்களின் குடும்ப வருமானம் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. நிறையிட்ட பெருக்குச் சரா சரியைக் கணக்கிடுக.

மக்களின் தரம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	வருமானம் (ரூபாய்கள்)
நிலச்சுவான்கள்	1	1000
விவசாயிகள்	50	80
உழைப்பாளிகள்	25	40
வட்டிக்கடைக்காரர்கள்	2	750
ஆரம்ப ஆசிரியர்கள்	3	100
மளிகை வியாபாரிகள்	4	150
தச்சர்கள்	3	120
நெசவாளர்கள்	5	60

(4) புள்ளியியல் பாடத்தில் ஒரு மாணவன் முதல் பருவத் தேர்வில் 85 சதவீதமும், இரண்டாம் பருவத் தேர்வில் 80 சத விதமும், ஆண்டு இறுதித் தேர்வில் 65 சதவீதமும் மதிப்பெண் கள் பெற்றிருந்தான். இம் மூன்று தேர்வுகளின் நிறைகளை முறையே 1, 2, 3 எனக் கொண்டு அம்மாணவனின் நிறை யிட்ட கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

(5) சென்னை நகரில் ஒரு மாதத்தில் ஏற்பட்ட 100 விபத் துக்கள் பற்றிய விவரம் கீழே பட்டியல் தரப்பட்டுள்ளது. அம்மாதத்தில் திங்கள், செவ்வாய், புதன்கிழமைகள் ஒவ்வொன் றிலும் ஐந்தும், மற்ற கிழமைகள் ஒவ்வொன்றிலும் நான்கும் இருந்தால் ஒரு நாளிலேற்பட்ட சராசரி விபத்துக்களைக் காண்க.

நாள்...	ஞா	திங்	செவ்	புத	வியா	வெள்	சனி
விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை...	26	16	12	10	8	10	18

(6) மூன்று பல்கலைக் கழகங்கள் ஒரு ஆண்டில் நடத்திய பல்வேறு தேர்வுகளின் முடிவுகள் பின்வரும் பட்டியலில் தரப் பட்டுள்ளன. எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி., பி.காம். ஆகிய தேர்வு களின் நிறைகளை முறையே 3, 2, 10, 6, 4 எனக் கொண்டு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியின் மூலம் எது சிறந்த பல்கலைக் கழகமென நிர்ணயிக்கவும்.

தேர்வுகள்	தேறியவர்கள் சதவீதம்		
	பல்கலைக் கழகங்கள்		
	அ	ஆ	இ
எம். ஏ.	80	70	70
எம். எஸ்.ஸி.	65	70	60
பி. ஏ.	70	80	70
பி. எஸ்ஸி.	60	70	80
பி. காம்.	75	60	70

(7) ஒரு புகைவண்டி முதல் 16 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 20 மைல் வேகத்திலும், அடுத்து 20 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 40 மைல் வேகத்திலும், இறுதி 10 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 15 மைல் வேகத்திலும் கடந்து சென்றால் அதன் சராசரி வேக மென்ன ?

(8) ஒரு விமானம் 100 மைல் பக்கமுடைய ஒரு சதுர வடிவமான சதுக்கத்தைச் சுற்றி, முதல் பக்கத்தை மணிக்கு 100 மைல் வேகத்திலும், இரண்டாவது பக்கத்தை மணிக்கு 200 மைல் வேகத்திலும், மூன்றாவது பக்கத்தை 300 மைல் வேகத்திலும், நான்காவது பக்கத்தை மணிக்கு 400 வேகத்தி திலும் கடந்து சென்றால் அதன் சராசரி வேகமென்ன ?

(9) வேலையின்மை பற்றிய பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து நகரமான மக்கள் தொகுதி, உள்ளூர் மக்கள் தொகுதி ஆகியவற் றின் சீர்படாத வேலையின்மை வீதங்களையும், உள்ளூர் மக்கள் தொகுதியின் தரப்படுத்தப்பட்ட வேலையின்மை வீதத்தையும் கணக்கிட்டு, எந்த மக்கள் தொகுதியில் வேலை வாய்ப்பு நிலைமை சிறந்ததாக வுள்ளதென்று காண்க.

வயது	தரமான மக்கள் தொகுதி		உள்ளூர் மக்கள் தொகுதி	
	மக்கள் தொகை	வேலையில்லாதவர் எண்ணிக்கை	மக்கள் தொகை	வேலையில்லாதவர் எண்ணிக்கை
15 — 30	2500	125	3000	120
30 — 45	3500	280	3000	270
45 — 60	3000	360	3500	420
60க்குமேல்	1000	150	500	100

6. பரவுகை அளவைகள்

(MEASURES OF DISPERSION)

நிகழ்வெண் பரவல்களின் தன்மைகளை அளவிடுவதில் சராசரிகளுக்கு அடுத்தபடியாக முக்கியமானவை பரவுகை அளவைகளாகும். ஒரு பரவலின் மையம் போக்கினைச் சராசரியின் மூலம் அளவிட முடிந்தபோதிலும், அப்பரவலின் உறுப்புக்கள் யாவும் அம்மையப் போக்கைச் சுற்றிலும் குவித்து கிடக்கின்றனவோ அல்லது பல பக்கங்களிலும் சிதறிக்கிடக்கின்றனவா என்று அச்சராசரியின் மூலம் தெரிந்து கொள்ள முடியாது. ஒரு பரவலின் உறுப்புக்களுள் பல உறுப்புக்கள் அப்பரவலின் மையப் போக்கிற்கு நேர்மாறான போக்கினைக் கொண்டிருக்கலாம். நுகர்வு பண்டங்களின் பொதுவான விலை ஏறும் போக்கைக் கொண்டிருந்த போதிலும் ஓர் குறிப்பிட்ட பண்டத்தின் விலை இறங்கும் போக்கைக் கொண்டிருக்கலாம். உதாரணமாக, பெரும்பாலான பண்டங்களின் விலைகள் குறைந்து கொண்டேயிருந்த போதிலும், அரிசி விலை வெகுவேகமாகக் கூடிக் கொண்டேயிருப்பதால் பண்டங்களின் பொதுவிலைக் குறியீட்டெண் ஏறும் போக்குடன் அமையலாம். இரண்டு பரவல்கள் ஒரே சீராகவும் சமமான கூட்டுச் சராசரிகள், இடைநிலையளவுகள், முகட்டளவுகள், சம நிகழ்வெண்களைக் கொண்ட முகட்டும் பிரிவுகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டும் அமைந்திருக்கலாம். இருந்த போதிலும், இப்பரவல்களிலுமுள்ள உறுப்புக்கள் அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து வெவ்வேறு விதமாகச் சிதறிக்கிடக்கலாம். ஒரு பரவலில் பெரும்பான்மையான உறுப்புக்கள் சராசரியைச் சுற்றி குவிந்தும், மற்றொன்றில் பெரும்பான்மையான உறுப்புக்கள் சராசரியிலிருந்து இரு பக்கங்களிலும் வெகு தூரத்தில் சிதறியும் கிடக்கலாம். உதாரணமாக, இரு விடுதிகளைச் சேர்ந்த மாணவர்களின் மாதச் சராசரி செலவுகள் சமமாகயிருப்பதாக் கொள்வோம். ஒரு

விடுதியில் மாணவர்கள் ரூ. 70 முதல் ரூ. 90 வரை செலவு செய்வதன் காரணமாக மாதச் சராசரி செலவு ரூ. 80 ஆகவும், மற்றென்றில் ரூ. 50 முதல் ரூ. 120 வரை செலவு செய்வதன் காரணமாக மாதச் சராசரி செலவு ரூ. 80 ஆகவுமிருந்தால் இரு விடுதிகளிலும் மாணவர்கள் ஒரே மாதிரியாகச் செலவு செய்வதாக எங்ஙனம் ஏற்றுக் கொள்ள முடியும்? இரண்டாவது விடுதியில் பெரும்பாலான மாணவர்கள் சராசரி ரூ. 60 செலவு செய்பவர்களாகவும், ஒரு சில பணக்கார மாணவர்கள் அதிகமாகச் செலவு செய்வதன் காரணமாக சராசரியின் மதிப்பு ரூ. 80க்கு உயர்த்தப்பட்டிருக்கலாம். எனவே, ஓர் பரவலைப் பற்றிய தன்மைகளுள் ஒரு குறிப்பிட்ட தன்மையினைப் பற்றி மட்டுமே சராசரிகள் விளக்குகின்றனவென்று அறிகிறோம். ஆகவே, சராசரிகளின் மூலம் ஓர் பரவலின் முழுத்தன்மைகளையும் சரிவர அறிந்துகொள்ள முடியாதென்று தெரிகிறது. இவ்வாறு ஓர் நிகழ்வெண் பரவலின் அநேக பண்புகளைச் சராசரிகள் மறைத்து விடுகின்ற காரணத்தினால் அப்பரவலின் தன்மைகளைப் பற்றி நன்கு அறிந்து கொள்ள வேறு சில புள்ளியியல் மாறிகளையும் காண வேண்டியதிருக்கிறது அவற்றுள் முக்கியமானது சராசரியைச் சுற்றி உறுப்புக்களின் சிதறல் அல்லது பரவுகை தன்மை பற்றிய அளவையாகும். ஓர் பரவலின் சராசரியைச் சுற்றி அப்பரவலின் உறுப்புககள் பரவிக்கிடக்கும் தன்மை 'பரவுகை' (dispersion) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதைச் 'சிதறல் தன்மை' (degree of scatter) என்றும் அழைக்கலாம் உறுப்புக்களின் சிதறல் தன்மையை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுகின்ற அளவைகளுக்குப் 'பரவுகை அளவைகள்' (measures of dispersion) என்று பெயர். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் பரவல் தன்மையை வீச்சு (Range), கால்ம விலக்கம் (Quartile Deviation) சராசரி விலக்கம் (Average Deviation) திட்ட விலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம் (Standard Deviation) ஆகிய பரவுகையளவைகள் மூலம் அளவிடலாம். இவற்றுள் வீச்சு என்பது தெளிவற்ற முறையில் பரவல் தன்மையை அளவிடுவதால் பயனற்றதாகி விடுகிறது. இப்பரவுகையளவைகளையும் சராசரிகளைப்போன்ற திரட்டு எண்கள் (Summary numbers) என்று குறிப்பிடலாம், ஒரு பரவலின் மையப்போக்கைச் சராசரிகள் அளவிடுதல் போன்று அப்பரவலின் சிதறல் தன்மைகளைப் பரவுகையளவைகள் அளவிடுகின்றன. எனவே, ஓர் நல்ல சராசரிக்கு இருக்க வேண்டிய சிறப்பியல்புகள் யாவும் ஒரு நல்ல பரவுகையளவைக்கு இருக்க வேண்டியது அவசியமாகும்.

பரவுகைக்கெழு (Coefficient of Dispersion) :

ஒரு பரவலின் சிதறல் தன்மையை அளவிடுகின்ற மேற்கூறப்பட்ட பரவுகையளவைகள் யாவும் அப்பரவலின் மாறியின் மதிப்புக்கள் எந்த அலகின் வாயிலாகக் கூறப்பட்டுள்ளனவோ அதே அலகிலேயே அமைந்திருக்கும். அதாவது, பரவலின் மாறியின் மதிப்புக்கள் எந்த உயரத்தை அங்குலகங்களில் குறிப்பிட்டால், அப்பரவலின் பரவுகையளவைகளாகிய வீச்சு, கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவையும் அங்குலங்களிலேயே அமைந்திருக்கும். ஆகவே, பல பரவல்களின் சிதறல் தன்மைகளை ஒன்றொடொன்று ஒப்பிட வேண்டுமாயின் இப்பரவுகையளவைகளினின்றும் அலகுகள் நீக்கப்பட வேண்டும். இரு பரவல்களின் மதிப்புக்கள் ஒரே மாதிரியான அலகுடன் அமைந்திருந்த போதிலும் ஓர் பரவல் உயர்ந்த மதிப்புக்களையும், மற்றது குறைந்த மதிப்புக்களையும் பெற்றிருக்கலாம். இத்தகைய பரவல்களின் சிதறல் தன்மைகளை மேற்கூறப்பட்ட பரவுகையளவைகளைக் கொண்டு ஒப்பிட முடியாது. உதாரணமாக, இரு கம்பெனிகளில் தயாரிக்கப்பட்ட சைக்கிள் டயர்களின் (cycle tyres) உழைப்புத் தூரங்களின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 1150 மைல்கள், 1275 மைல்கள் என்று கொள்வோம். இவற்றிலிருந்து முதல் கம்பெனி டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்களின் திட்ட விலக்கம் இரண்டாவது கம்பெனி டயர்களின் திட்ட விலக்கத்தைவிட குறைவாகயிருப்பதால் முதல் கம்பெனி டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்கள் இரண்டாவது கம்பெனி டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்களைவிட அதிக அளவில் சீராக அமைந்திருப்பதாக எண்ணத்தோன்றும். ஆனால் இரு கம்பெனி டயர்களின் சராசரி உழைப்புத் தூரங்கள் முறையே 17,000 மைல்கள், 28,000 மைல்கள் என்ருல் இவ்வெண்ணம் தவருனதென்பதை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். 17,000 மைல்களைச் சராசரி உழைப்புத் தூரமாகக் கொண்ட டயர்களின் திட்ட விலக்கம் 1,150 மைல்கள். ஆனல், 26,000 மைல்களைச் சராசரி உழைப்புத் தூரமாகக் கொண்ட டயர்களின் திட்ட விலக்கம் 1,275, மைல்களே. ஆகவே, இவ்விரண்டு திட்ட விலக்கங்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டுமானுல், ஒரு மைல் சராசரி உழைப்புத் தூரத்திற்கு இரு கம்பெனியார்களின் திட்ட விலக்கங்கள் எவவளவு என்ற கணக்கிட்டு அவற்றை ஒப்பிட வேண்டும். அதாவது, திட்ட விலக்கங்களை அவற்றிற்குரிய சராசரிகளால் வகுத்துப் பெறப்படுகின்ற விகிதங்களை ஒன்றொடொன்று ஒப்பிட வேண்டும். இவ்வாறு

கணக்கிடப்படுகின்ற விகிதத்திற்குத் 'திட்ட விலக்கக் கெழு' (coefficient of standard deviation) என்று பெயர். ஆகவே,

முதல் கம்பெனி டயர்களின் திட்ட

$$\text{விலக்கக்கெழு} = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{சராசரி}}$$

$$= \frac{1150 \text{ மைல்கள்}}{17{,}000 \text{ மைல்கள்}}$$

$$= 0.0676$$

இரண்டாவது கம்பெனி டயர்களின் திட்ட விலக்கக்

$$\text{கெழு} = \frac{1250 \text{ மைல்கள்}}{26{,}000 \text{ மைல்கள்}}$$

$$= 0.048$$

இவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்ற திட்ட விலக்கக் கெழுக்கள் அலகுகள் நீக்கப்பட்டு வெறும் எண்களாகவேயிருப்பதால் இவற்றை ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடலாம். மேற்கண்ட திட்ட விலக்கக் கெழுக்களுள் இரண்டாவது கம்பெனி டயர்களின் திட்ட விலக்கக் கெழு முதல் கம்பெனி டயர்களின் திட்ட விலக்கக் கெழுவை விட குறைவாகயிருப்பதால் இரண்டாவது கம்பெனி டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்களே முதல் கம்பெனி டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்களைவிட அதிக அளவில் சீராக அமைந்திருப்பதாகக் கொள்ளலாம். திட்ட விலக்கக் கெழு எப்பொழுதும் தசம பின்னத்திலேயே யிருக்குமாகையால் அதை 100 ஆல் பெருக்கிச் சதவீதமாகக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்வாறு பெறப்படுகின்ற சதவீதத் திட்ட விலக்கக் கெழுவிற்கு 'மாறு விகிதக் கெழு' (coefficient of variation—C.V. என்று பெயர். ஆகவே,

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு} = \text{திட்டவிலக்கக் கெழு} \times 100$$

$$= \frac{\text{திட்டவிலக்கம்}}{\text{சராசரி}} \times 100.$$

எனவே, முதல் கம்பெனி டயர்களின் மாறு விகிதக் கெழு $= 0.0676 \times 100 = 6.76\%$; இரண்டாவது கம்பெனி டயர்

களின் மாறுவிகிதக் கெழு $= 0.048 \times 100 = 4.8\%$. இரண்டாம் வகை டயர்களின் மாறுவிகிதக் கெழு முன்னதைவிட குறைவாகயிருப்பதால் இரண்டாம் வகை டயர்களின் உழைப்புத் தூரங்கள் முன்னதைவிட அதிக மாறுபாடின்றி சீராக அமைந்திருப்பதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

பொதுவாக, ஒரு பரவுகையளவையை அது எந்தச் சராசரியைச் சார்ந்து அளவிடப்படுகிறதோ அந்தச் சராசரியினுல் வகுத்து அப் பரவுகையளவையிலுள்ள அலகினை நீக்கிவிடலாம். இவ்வாறு அலகு நீக்கப் பெற்ற விகிதத்திற்குப் ''பரவுகைக் கெழு'' (Coefficient of Dispersion) என்று பெயர். ஆகவே,

$$\text{பரவுகைக் கெழு} = \frac{\text{பரவுகையளவை}}{\text{சராசரி}}$$

இவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்ற பல பரவல்களின் பரவுகைக் கெழுக்களை ஒன்ருேடொன்று ஒப்பிட்டு அப்பரவல்களின் சிதறல் தன்மைகளை ஒப்பிடலாம்.

பல்வேறு பரவுகையளவைகள் (Different measures of Dispersion):

(அ) *வீச்சு* (Range)

பரவுகையளவைகளுள் மிகவும் எளிதானது வீச்சு ஆகும். ஒரு தொடரின் மீப்பெரு மதிப்புக்கும், மீச்சிறு மதிப்புக்குமுள்ள வித்தியாசம் ''வீச்சு'' என்றழைக்கப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் இறுதிப் பிரிவின் மேல் எல்லைக்கும், முதல் பிரிவின் கீழ் எல்லைக்குமுள்ள வித்தியாசம் அப்பரவலின் வீச்சு எனக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆனுல் பெரும்பாலான பரவல்களில் இறுதிப் பிரிவுகளின் இடை வெளிகள் கொடுக்கப்படாமலிருக்கக் கூடுமென்றும், முனையுறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் இயல்புக்கு மாருன வகையில் மிகம் பெரியதாக அல்லது மிகச் மிகச் சிரியதாகயிருக்கலாமென்றும் கண்டோம். ஆகவே, இத்தகைய இயல்புக்குப் புறம்பான முனையுறுப்புக்களின் வித்தியாசத்திலிருந்து பெறப்படுகின்ற வீச்சு அப்பரவலின் சிதறல் தன்மையைச் தரியாக பிரதிபலிக்காதென்ற காரணத்தினுல் புள்ளி விவர ஆய்வுகளில் இது பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. ஆனுல் நடைமுறையில் இது சாதாரண மனிதர்களாலும் மிகச் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தப்படுவதைக் காணலாம். ''ஒரு விடுதி மாணவனின் மாதச் செலவு ரூ. 70

முதல் ரூ. 100 வரை ஆகலாம்''; ''இரண்டு இடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 20 மைல் முதல் 30 மைல் வரையிருக்க லாம்''; ''ஒரு மூட்டை அரிசி விலை ரூ. 100 முதல் ரூ. 140 முதல் வரை விற்கப்படுகிறது'' என்பது போன்ற மதிப்பீடுகள் யாவும் வீச்சு அளவைகளேயாகும். இந்த வீச்சு அளவைகளின் மூலம் பரவலின் சிதறல் தன்மையைப் பற்றி ஓரளவு தெரிந்து கொள்ளலாமேயன்றி இவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறு எந்த முடிவுகளும் பெற முடியாது. இருந்த போதிலும் புள்ளியலில் ''தரக்கட்டுப்பாடு'' (Quality Control) முறைகளில் இது மிகுந்த அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. (தரக்கட்டுப் பாடுபற்றிய அத்தியாயத்தைப் பார்க்கவும்).

(ஆ) *கால்ம விலக்கம்* (Quartile Deviation—Q.D.):

ஒரு பரவலின் இரு முனையுறுப்புக்களின் வித்தியாசமாக வீச்சு அமைந்திருப்பதாலேயே அது பெரிய குறைபாடுடைய பரவுகையளவையாகக் கருதப்படுகிறது. ஒரு பரவலின் முனைப் பிரிவுகளைச் சார்ந்த உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் சரியாகத் தெரியாமலும் அல்லது அப்பரவலின் இயல்புக்கு மாறாகவும் அமைந்திருக்கலாமாகையால் முனையுறுப்புக்களுக்குப் பதிலாக வேறு இரு பொருத்தமான மதிப்புக்களின் வித்தியாசத்தைப் பரவுகையளவையாகக் கொள்வதன் மூலம் மேற்கூறப்பட்ட குறைபாட்டை நீக்கிவிட முடியும். ஆகவே, வீச்சுக்குப் பதிலாக, கால்மங்களின் வித்தியாசத்தில் பாதி மற்றொரு பரவுகையளவை யாகக் கருதப்படுகிறது. இப் பரவுகையளவை ''கால்ம விலக்கம்'' (Quartile Devition) என்றழைக்கப்படுகிறது. எனவே,

$$\text{கால்மவிலக்கம் (கா.வி.)} = \frac{\text{கா}_3 - \text{கா}_1}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

ஆனால் கால்மங்களின் வித்தியாசமாகிய ($\text{கா}_3 - \text{கா}_1$) என்பது ''கால்ம இடைவெளி'' (Inter-quartile range) என்றழைக்கப் படுகிறது. ஆகவே, கால்மவிலக்கத்தைக் ''கால்ம இடை வெளிப் பாதி'' (Semi-interquartile range) என்றும் அழைக்க லாம். கால்ம விலக்கத்தை இரு கால்ம விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகிய $\frac{\text{கா}_2 + \text{கா}_1}{2}$ $\left(\text{அதாவது } \frac{Q_3 + Q_1}{2}\right)$- ஆல் வகுத்து அலகுகள் நீக்கப் பெற்ற ''கால்ம விலக்கக் கெழு'' (**Coefficient of quartile deviation**) அல்லது ''கால்ம இடைவெளிப் பாதிக் கெழு'' (**Coefficient of Semi-interquartile range**) என்ற பரவுகைக் கெழுவைப் பெறலாம். ஆகவே,

$$\text{கால்ம விலக்கக் கெழு} = \frac{(\text{கா}_3 - \text{கா}_1)/2}{(\text{கா}_3 + \text{கா}_1)/2}$$

$$= \frac{\text{கா}_3 - \text{கா}_1}{\text{கா}_3 + \text{கா}_1} \left(\text{அதாவது, } \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}\right)$$

கால்மவிலக்கத்தின் இயல்புகள் :

கால்ம விலக்கம் எளிதில் புரிந்துகொள்ளக் கூடியதாகவும் கணக்கிடக் கூடியதாகவுமிருக்கிறது. இதன் சூத்திரம் முனை யுறுப்புக்களின் அடிப்படையில் அமையவில்லையாகையால் இயல்புக்குப் புறம்பான முனையுறுப்புக்களால் கால்ம விலக்கம் பாதிக்கப்படுவதில்லை. இப் பண்பு காரணமாக, கால்விலக் கத்தை ஏனைய பரவுகையளவைகளை விடச் சிறந்ததாகக் கொள்ளலாம். மேலும், திறப்பு முனைப் பிரிவுகளைக் கொண்ட பரவல்களின் பரவுகையளவைகளைக் கணக்கிட இதுவே சிறந்த தாகக் கருதப்படுகிறது. இத் தன்மையின் காரணமாகவும் அதிகக் கோட்டம் வாய்ந்த பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை அளவிட கால்ம விலக்கமே சிறந்ததென கருதப்படுகிறது ஆனால் கால்ம விலக்கத்தின் சூத்திரம் இயற் கணித அடிப் படையில் அமையவில்லை யாகையால் இதன் பயன் குறுகிய வரம்புகட்குட்பட்டதாக யிருக்கின்றது.

மாதிரி 51 :

ஒரு ஆலையில் பணிபுரியும் மக்களின் வயது பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப் பரவலின் கால்ம விலக்கம் கால்ம விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

வயதுப் பிரிவு	மக்கள் எண்ணிக்கை
16 — 20	36
21 — 25	98
26 — 30	274
31 — 35	204
36 — 40	133
41 — 45	107
46 — 50	91
51 — 55	51
56 — 60	6
மொத்தம்	1000

தீர்வு :

வயதுப் பிரிவு	நிகழ்வெண்	வ. நி.
15.5 — 20.5	36	36
20.5 — 25.5	98	134
25.5 — 30.5	274	408
30.5 — 35.5	204	612
35.5 — 40.5	133	745
40.5 — 45.5	107	852
45.5 + 50.5	91	943
50.5 — 55.5	51	994
55.5 — 60.5	6	1000

$= 1000,\ N/4 = 250,\ 3N/4 = 750$

25.5—30.5 என்பது கா_1—பிரிவு.

$\therefore\ l = 25.5,\ c = 5,\ f = 274,\ m = 134.$

$$\text{கா}_1 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{4} - m\right)$$

$$= 25.5 + \frac{5}{274}(250 - 134)$$

$$= 25.5 + \frac{5}{274}(116)$$

$$= 25.5 + \frac{580}{274}$$

$$= 25.5 + 2.1$$

$= 27.6$ வயது.

40.5—45.5 என்பது கா_3—பிரிவு.

$\therefore\ l = 40.5,\ c = 5,\ f = 107,\ m = 745$

$$\text{கா}_3 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right)$$

$$= 40.5 + \frac{5}{107}(750-745)$$

$$= 40.5 + \frac{5}{107}(5)$$

$$= 40.5 + \frac{25}{107}$$

$$= 40.5 + 0.2$$

= 40.7 வயது.

கால்ம விலக்கம் (கா. வி.) $= \frac{கா_3 - கா_1}{2}$

$$= \frac{40.7-27.6}{2}$$

$$= \frac{13.1}{2}$$

= 6.55 வயது.

கால்ம விளக்கக் கெழு (கா.வி. கெழு) $= \frac{கா_3 - கா_1}{கா_3 + கா_1}$

$$= \frac{40.7-27.6}{40.7+27.6}$$

$$= \frac{13.1}{68.3}$$

$$= 0.177.$$

மாதிரி 52 :

பின்வரும் வாரச் சம்பள நிகழ்வெண் பரவலின் கால்ம இடைவெளிப் பாதியைக் காண்க ;—

வாரச் சம்பளம் ரூபாயில்	நிகழ்வெண்
40—43	4
43—46	15
46—49	27
49—52	36
52—55	24
55—58	18
58—61	9
61—64	7
மொத்தம்	140

(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

வாரச் சம்பளம்	நி.	வ.நி.
40 — 43	4	4
43 — 46	15	19
46 — 49	27	46
49 — 52	36	82
52 — 55	24	106
55 — 58	18	124
58 — 61	9	133
61 — 64	7	140

$N = 140, \frac{N}{4} = 35, \frac{3N}{4} = 105.$

46—49 என்பது கா$_1$—பிரிவு.

$\therefore\ l=46,\ c=3,\ f=27,\ m=19$

$$கா_1 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{4} - m\right)$$

$$= 46 + \frac{3}{27}(35-19)$$

$$= 46 + \frac{16}{9}$$

$$= 46 + 1.778$$

$= 47.778$ ரூபாய்கள்.

52—55 என்பது $கா_3$—பிரிவு.

$\therefore\ l=52,\ c=3,\ f=24,\ m=82.$

$$கா_3 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right)$$

$$= 52 + \frac{3}{24}(105-82)$$

$$= 52 + \frac{23}{8}$$

$$= 52 + 2.875$$

$= 54.875$ ரூபாய்கள்.

$\therefore$ கால்ம இடைவெளிப் பாதி $= \dfrac{கா_3 - கா_1}{2}$

$$= \frac{54.875 - 47.778}{2}$$

$$= \frac{7.097}{2}$$

$$= 3.5485$$

$= 3.55$ ரூபாய்கள்

(இ) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (**Mean Deviation M.D.**)

ஐந்து மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஏறு வரிசையில் 28, 33, 38, 47, 54 எனக் கொள்க. இவற்றின் இடைநிலை மதிப்பு 38 ஆகும். இப்பொழுது மூல மதிப்பெண்களிலிருந்து இவ்விடைநிலை மதிப்பாகிய 38ஐக் கழித்தால்

$28-38=-10$, $33-38=-5$, $38-38=0$, $47-38=9$, $54-38=16$ என்ற விலக்கங்கள் (deviations) கிடைக்கின்றன. இவை, இடைநிலையளவு ஆதிகொண்டு கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களாகும். இவ்விலக்கங்களின் எதிரடையாளங்களை (negative signs) நீக்கிய நேரெண் மதிப்புக்கள் 10, 5, 0, 9, 16 ஆகும். இவ்வாறு எதிரடையாளங்கள் விடப்பட்ட விலக்கங்களுக்குத் "தனி விலக்கங்கள்" (**absolute deviations**) என்று பெயர். இத்தனி விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகிய

$$\frac{10+5+0+9+16}{5}=\frac{40}{5}=8 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

என்பது மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து மதிப்பெண்களைக் கொண்ட தொடரின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (**Mean deviation**) அல்லது சுருக்கமாக சராசரி விலக்கம் (**Average deviation**) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, ஒரு தொடரின் சராசரி விலக்கம் (ச.வி.) என்பது, அத்தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் இடைநிலையளவு ஆதியாக கொண்டு பெறப்பட்ட தனி விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி என்று காண்கிறோம். பொதுவாக, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற N உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடரின். இடைநிலையளவை M எனக் கொண்டால்,

$$(x_1-M), (x_2-M), \ldots\ldots\ldots, (x_n-M)$$

என்பன அவ்வுறுப்புக்களின் இடைநிலை ஆதிகொண்டு பெறப்பட்ட விலக்கங்களாகும். இவற்றின் எதிரடையாளங்கள் நீக்கப்பெற்ற தனிவிலக்கங்களை முறையே

$$|x_1-M|, \quad |x_2-M|, \ldots\ldots\ldots |x_n-M|$$

என்று குறிப்பிடலாம். இவற்றை எண்ணளவை விலக்கங்கள் (**moduli of the deviations**) என்றும் கூறலாம். ஆகவே, மேற்கண்ட தொடரின் இடைநிலை ஆதிகொண்டு கணிக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (கூ.ச.வி.)

$$= \frac{|x_1-M| + |x_2-M| + \cdots\cdots + |x_n-M|}{N}$$

$$= \frac{\Sigma\ |x-M|}{N}$$

ஆகும். இதுபோல் உறுப்புக்களின் தனி விலக்கங்களை இடை நிலை ஆதிகொண்டு கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, கூட்டுச் சராசரி $(\bar{x})$யைக் ஆதியாகக் கொண்டு கணக்கிடலாம். இவ்வாறு கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு பெறப்படுகின்ற

$$|x_1-\bar{x}, \ |x_2-\bar{x}|, \ \ldots\ldots\ldots, \ |x_n-\bar{x}|$$

என்ற தனி விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகிய

$$\frac{\Sigma\ |x-\bar{x}|}{N} = \frac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + \cdot + |x_n-\bar{x}|}{N}$$

என்பது கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு பெறப்பட்ட சராசரி விலக்கம் என்றழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் இடைநிலையளவு ஆதி கொண்டு பெறப்படுகின்ற தனி விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி யென்பதே சராசரி விலக்கத்தின் சரியான வரையறையாக யிருந்த போதிலும், நடைமுறையில் கணக்கீடுகளிலுள்ள வசதி களின் காரணமாகப் பெரும்பாலும் கூட்டுச் சராசரியை ஆதி யாகக் கொண்டே சாாசரி விலக்கம் கணக்கிடப்படுகிறது. மேற்கூறப்பட்ட இருவகை சிராசரி விலக்கங்களையும்

சரிசாரி விலக்கம் (இடைநிலையளவு ஆதிகொண்டு) என்றும், சராசரி விலக்கம் (கூட்டுச் சராசரி ஆதிகொண்டு) என்றும் குறிப்கிடலாம்.

நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரி விலக்கம்

$x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ ஆகியவற்றை மையமதிப்புக்களாகவும், $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ ஆகியவற்றை அவற்றிற்குரிய நிகழ்வெண்களாக வும், $N = f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n$ஐ மொத்த நிகழ்வெண்ணாகவும் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் இருவகை சராசரி விலக் கங்களின் சூத்திரங்கள் வருமாறு :—

சராசரி விலக்கம் (இ.அ. ஆதிகொண்டு) $= \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$,

சராசரி விலக்கம் (கூ.ச. ஆதிகொண்டு $= \frac{\Sigma f \mid x - \bar{x} \mid}{N}$

***சராசரி விலக்கக் கெழு* (Coefficient of M. D.)**

ஒரு பரவலின் சராசரி விலக்கத்தை, அது எந்தச் சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்டதோ அந்தச் சராசரியைக் கொண்டு வகுத்து அச்சராசரி விலக்கத்திற்குகுரிய "சராசரி விலக்கக் கெழு" வைப் பெறலாம். மேற்கண்ட இரு சராசரி விலக்கங்களின் சராசரி விலக்கக் கெழுக்கள் முறையே

$$\frac{\text{சராசரி விலக்கம் (இ. அ. ஆதிகொண்டு)}}{\text{இடை நிலையளவு}},$$

$$\frac{\text{சராசரி விலக்கம் (கூ. ச. ஆதிகொண்டு)}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$

ஆகும்.

மாதிரி 53 :

ஒரு குறிப்பிட்ட சமூகத்தைச் சேர்ந்த கணவன்-மனைவிகளுக்கிடையேயுள்ள வயது வித்தியாசம் பற்றிய பரவல் கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக. அந்தச் சமுதாயத்தின் சமூக நிலைமை பற்றிய எந்த விளக்கத்தை அது தருகிறது ?

கணவன்—மனைவி வயது வித்தியாசம் (வருடங்களில்)	நிகழ்வெண்
0 — 5	449
5 — 10	705
10 — 15	507
15 — 20	281
20 — 25	109
25 — 30	52
30 — 35	16
35 — 40	4

வயது வித்தியாசம் (மைய மதிப்பு) x	நிகழ் வெண் f	d $\left(\frac{x-17.5}{5}\right)$	fd	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
2.5	449	−3	−1347	8	3592
7.5	705	−2	−1410	3	2115
12.5	507	−1	− 507	2	1014
17.5	281	0	0	7	1967
22.5	109	1	109	12	1308
27.5	52	2	104	17	884
32.5	16	3	48	22	352
37.5	4	4	16	27	108
மொத்தம்	2123		−2987		11340

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{-2987}{2123} = -1.4$$

$\therefore \bar{x} = A + c\bar{d} = 17.5 + 5\,(-1.4) = 17.5 - 7.0 = 10.5$ ஆண்டுகள்

சராசரி விலக்கம் (கூ. ச. ஆதிகொண்டு $= \dfrac{\Sigma f\,\lvert x-\bar{x}\rvert}{N}$

$= \dfrac{11340}{2123}$

$= 5.34$ ஆண்டுகள்.

சராசரி விலக்கக் கெழு (கூ.ச. ஆதிகொண்டு)

$= \dfrac{\text{ச. வி. (கூ. ச. ஆதிகொண்டு)}}{\text{கூ. ச.}}$

$= \dfrac{5.34 \text{ ஆண்டுகள்}}{10.5 \text{ ஆண்டுகள்}}$

$= 0.51.$

குறிப்பிட்ட சமுகத்திலுள்ள கணவன்—மனைவிகளின் கூட்டுச் சராசரி வயது வித்தியாசமாகிய **10.5** ஆண்டுகள் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலைப் பொறுத்தவரை குறைவான வித்தியாசம்தான். மேலும் சராசரி விலக்கமும் 5.34 ஆண்டுகள் என்ற குறைந்த அளவிலேயே இருப்பதோடு மிகக் குறைந்த அளவு வித்தியாசங்களில் நிறைய பேர்களும், மிகக் கூடுதலான வயது வித்தியாசங்களில் மிகக் குறைவான பேர்களுமிருப்பதை பரவலிலிருந்து அறிகிறோம். ஆகவே, குறிப்பிட்ட சமூகத்தில் கணவன்—மனைவிகளுக்கிடையே அதிக வயது வித்தியாசம் இல்லை யென்ற அடிப்படையில் அச்சமுதாயத்தின் சமூக நிலைமை மோசமானதாகயில்லை யென்று கூறலாம்.

மாதிரி 54 :

பின்வரும் பரவலுக்கு இடைநிலையளவையும், கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் (இடைநிலையளவு ஆதி கொண்டு) காண்க.

வாரச் செலவு (ரூபாய்)	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	2	9	11	14	20	25	24	23	20	16	5	4	2

தீர்வு :

முதலில் இடைநிலையளவைக் காண்க.

வாரச் செலவு (ரூபாய்கள்)	நிகழ்வெண்	வ.நி.
22.5 — 23.5	2	2
23.5 — 24.5	9	11
24.5 — 25.5	11	22
25.5 — 26.5	14	36
26.5 — 27.5	20	56

வாரச் செலவு (ரூபாய்கள்)	நிகழ்வெண்	வ. நி.
27.5 — 28.5	25	81
28.5 — 29.5	24	105
29.5 — 30.5	23	128
30.5 — 31.5	20	148
31.5 — 32.5	16	164
32.5 — 33.5	5	169
33.5 — 34.5	4	173
34.5 — 35·5	2	175

$$N = 175; \frac{N}{2} = \frac{175}{2} = 87.5$$

28.5—29.5 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு ஆகும்.

$\therefore l = 28.5, \; c = 1, \; f = 24, \; m = 81$

$$M = \text{இடைநிலைப் பிரிவு} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 28.5 + \frac{1}{24}(87.5 - 81)$$

$$= 28.5 + \frac{6.5}{24}$$

$$= 28.5 + 0.27$$

$$= 28.77 \text{ ரூபாய்}$$

இப்பொழுது மைய மதிப்புக்களைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து கீழ்க் கண்டவாறு சராசரி விளக்கம் காண்க.

வாரச் செலவு ரூபாய் – x	நிகழ்வெண் f	$\lvert x-M \rvert$	$f \lvert x-M \rvert$
23	2	5.77	11.54
24	9	4.77	42.93
25	11	3.77	41.47
26	14	2.77	38.78
27	20	1.77	35.40
28	25	0.77	19.25
29	24	0.23	5.52
30	23	1.23	28.29
31	20	2.23	44.60
32	16	3.23	51.68
33	5	4.23	21.15
34	4	5.23	20.92
35	2	6.23	12.46
மொத்தம்	175		373.99

சராசரி விலக்கம் (இ. அ, ஆதிகொண்டு) $= \dfrac{\Sigma f \lvert x-M \rvert}{N}$

$$= \frac{373.99}{175}$$

$$= 2.137$$

$$\text{சராசரி விலக்கக்கெழு} = \frac{\text{ச.வி. (இ. அ. ஆதிகொண்டு)}}{\text{இடைநிலையளவு}}$$

$$= \frac{2.137}{28.77}$$

$$= 0.074$$

சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் :

(1) சராசரி விலக்கம் பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்துள்ளது.

(2) சராசரியைப் புரிந்து கொள்ளக் கூடியவர்களால் சராசரி விலக்கத்தையும் எளிதில் புரிந்து கொள்ள முடியும்.

(3) இடைநிலையளவை ஆதியாகக் கொண்டு கணக்கிடப் படுகின்ற சராசரி விலக்கம் பிற சராசரிகளை ஆதிகளாகக் கொண்டு கணக்கிடப்படுகின்ற சராசரி விலக்கங்களைவிட குறைவானதாகயிருக்கும். இப்பண்பின் காரணமாக இது கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு கணக்கிடப்படுகின்ற சராசரி விலக்கத்தைவிட சிறந்ததாக கருதப்படுகிறது.

சராசரி விலக்கத்தின் குறைபாடுகள் :

(1) சராசரி விலக்கத்தின் கணக்கீட்டின்போது சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு கணிக்கப்படுகின்ற விலக்கங்களின் எதிரடையாளங்கள் புறக்கணிக்கப்படுகின்ற காரணத்தினுல் இயற்கணிதக் கொள்கை மீறப்படுகிறது. இதன் காரணமாக, சராசரி விலக்கம் புள்ளியியலில் மேற்கொண்டு எந்த இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளிலும் பயன்படுத்தத் தகுதியற்றதாகி விடு கிறது.

(2) ஆதியாகக் கொள்ளப்படுகின்ற சராசரியானது அதிக இடங்களைக் கொண்ட தசம பின்னமாகயிருந்தாலும், பரவலின் நிகழ்வெண்கள் மிகப்பெரிய மதிப்புக்களைக் கொண்டிருந் தாலும் சராசரி விலக்கத்தின் கணக்கீடு மிகவும் கடினமானதாக யிருக்கும். இத்தகைய சத்தர்ப்பங்களில் சராசரி விலக்கத்தின் மதிப்பைத் தோராயமாகவே பெற முடியும்.

(3) பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து சராசரி விலக்கம் அமைந்திருப்பதால், முனைப் பிரிவுகளின் எல்லைகள் தெளிவற்றிருந்தாலும், முனையுறுப்புக்கள் இயல்புக்குப் புறம்

பான மதிப்புக்களைப் பெற்றிருந்தாலும் சராசரி விலக்கத்தைப் பயன்படுத்தி பரவலின் சிதறல் தன்மையைச் சரியாக அளவிட முடியாது.

சராசரி விலக்கத்தின் பயன்கள் :

ஒரு பரவலின் சிதறல் தன்மையைப் பற்றி சாதாரண மக்களும் புரிந்து கொள்ளக் கூடிய வகையில் சராசரி விலக்கத்தையே பயன்படுத்த முடியும். சிறு கூறெடுத்தல் முறைகளில் குறைந்த அளவில் சராசரி விலக்கம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொழிற் சுழற்சிகளின் முன் கணிப்புக்களில் சராசரி விலக்கம் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பயிற்சி 6.

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு கால்ம இடைவெளியைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு ...	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
நிகழ்வெண் ...	4	15	28	16	7

(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(2) பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்ம விலக்கம், கால்ம விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண் ...	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
நிகழ்வெண் ...	2	8	10	4	1

(3) பின்வரும் ஊதியப் பரவலுக்குக் கால்ம விலக்கம், கால்ம விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

ஊதியம் (ரூபாய்)...	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
தொழிலாளர்கள் ...	12	18	16	14	12	8	6

(4) பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்ம இடைவெளிப் பாதியையும் அதன் கெழுவையும் காண்க.

வயது (வருடங்கள்)... ...	20	30	40	50	60	70	80
உறுப்பினர் எண்ணிக்கை...	3	61	132	153	140	51	2

(5) பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்ம விலக்கமும், கால்ம விலக்கக் கெழுவும் கணக்கிடுக.

வயதுப் பிரிவு	நிகழ்வெண்
0 — 9	48
10 — 19	26
20 — 29	27
30 — 39	11
40 — 49	13
50 — 59	4
60 — 69	3
70ம் மேலும்	4

(6) பின்வரும் பரவலுக்கு இடைநிலையளவு, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையளவு ஆதிகொண்டு), கூட்டுச் சராசரி விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
10 — 20	5
20 — 30	8
30 — 40	15
40 — 50	7
50 — 60	3
60 — 70	1
70 — 80	1

(7) பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலை ஆதிகொண்டு) சராசரி விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
310 — 319	1
300 — 309	2
290 — 299	4
280 — 289	1

பிரிவு	நிகழ்வெண்
270 — 279	6
260 — 269	12
250 — 259	11
240 — 249	8
230 — 239	2
220 — 229	—
210 — 219	3

(8) பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கமும் (கூட்டுச் சராசரி ஆதிகொண்டு) அதன் கெழுவும் காண்க.

விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை ...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
விபத்துக்குள்ளானோர் எண்ணிக்கை ...	15	16	21	10	17	8	4	2	1	2	2	—	2

(9) 50 எழுத்தர்களின் மாதச் சம்பளப் பரவல் பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு சராசரி விலக்கம் காண்க.

மாதச் சம்பளம் (ரூபாய்கள்)	எழுத்தர்களின் எண்ணிக்கை
140 — 150	4
150 — 160	6
160 — 170	10
170 — 180	12
180 — 190	9
190 — 200	3

(10) பின்வரும் பரவலுக்கு (i) இடைநிலையளவு (ii) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையளவு ஆதிகொண்டு) காண்க.

கிலோவில் எடை	நிகழ்வெண்
91 — 100	13
101 — 110	52
111 — 120	79
121 — 130	133
131 — 140	121
141 — 150	64
151 — 160	27
161 — 170	11

இந்த நிகழ்வெண் பரவலின் எந்தப் பண்பை கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் அளிக்கிறது. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(11) பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக்கொண்டு சராசரி விலக்கம் காண்க.

வயதுப் பிரிவு	கண்டறியப்பட்ட எண்ணிக்கை
15 — 24	4,000
25 — 34	16,000
35 — 44	28,000
45 — 54	33,000
55 — 64	28,000

(சென்னை, பி.காம். 1968 ஏப்.)

(12) பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட சராசரி விலக்கத்தையும் அதன் கெழுவையும் காண்க.

மாத விற்பனை (ரூபாய்கள்)	பிரதிநிதிகளின் எண்ணிக்கை
500 — 900	20
900 — 1300	30
1300 — 1700	50
1700 — 2100	40
2100 — 2500	35
2500 — 2900	25

(ஈ) திட்ட விலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம் (Standard Deviation)

ஒரு பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களிலிருந்தும் அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கழிப்பதால் கிடைக்கின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி அப்பரவலின் "விலக்கவர்க்கச் சராசரி" (Variance) என்றழைக்கப்படுகிறது. இவ்விலக்கவர்க்கச் சராசரியின் வர்க்கமூலம் அப்பரவலின் "திட்ட விலக்கம்" அல்லது "தர விலக்கம்" (Standard deviation) என்றழைக்கப்படுகிறது. இது σ (சிக்மா—Sigma) என்ற கிரேக்க எழுத்தின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. ஆகவே, ஒரு பரவலின் திட்ட விலக்கமென்பது அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு பெறப்படுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியின் வர்க்க மூலமாகும். $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற N உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடரின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்றால், $\bar{x}$ ஐ ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கங்கள்

$$(x_1-\bar{x}), (x_2-\bar{x}), \ldots\ldots, (x_n-\bar{x})$$

ஆகும். இவ்விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் முறையே

$$(x_1-\bar{x})^2, (x_2-\bar{x})^2, \ldots\ldots, (x_n-\bar{x})^2$$

ஆகும். இவ்விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{N}$$

ஆகும். அதாவது, அத்தொடரின்

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி} = \frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{N}$$

இவ்விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் வர்க்க மூலம் தான் அப்பரவலின் திட்ட விலக்கம் (σ) ஆகும். அதாவது,

$$\text{திட்டவிலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$x_1, x_2, \ldots\ldots, n_n$ ஆகியவற்றை மைய மதிப்புக்களாகவும் $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ ஆகியவற்றை அவற்றிற்குரிய நிகழ்வெண்களாகவும், $N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$ ஐ மொத்த நிகழ்வெண்ணாகவும் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி (Variance—σ^2)யும், திட்ட விலக்கமும் (Standard deviation — σ) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களின் மூலம் பெறப்படுகின்றன.

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \frac{\Sigma f (x-\bar{x})^2}{N}$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f (x-\bar{x})^2}{N}}$

விலக்க வர்க்கச் சராசரியை இயற்கணித முறைகளைப் பயன் படுத்திப் பின்வருமாறு சுருக்கலாம்.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f (x-\bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - 2\bar{x}\frac{\Sigma f x}{N} + \bar{x}^2 \frac{\Sigma f}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - 2\bar{x}(\bar{x}) + \bar{x}^2\left(\frac{N}{N}\right)$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2$$

ஆகவே $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2}$ என்பது திட்ட விலக்கச் சூத்திரத்தின் மற்றொரு அமைப்பாகும்.

திட்ட விலக்கக் கெழுவும் மாறு விகிதக் கெழுவும் (Coefficient of S. D. and coefficient of Variation)

திட்ட விலக்கத்தை, அதன் கணக்கீட்டில் பயன்படுத்தப் படுகின்ற கூட்டுச் சராசரியால் வகுத்து திட்ட விலக்கக் கெழு (coefficient of Standard deviation) வைப் பெறலாம், ஆகவே,

$$\text{திட்ட விலக்கக் கெழு} = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ஆனால் நடைமுறையில் திட்ட விலக்கக் கெழுவை 100 ஆல் பெருக்கிச் சதவீதமாகக் கூறுவது வழக்கம். இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற சதவீதக் கெழுவிற்கு "மாறு விகிதக் கெழு" (Coefficient of Variation — C. V.) என்று பெயர்.

அதாவது,

$$\text{மாறு விகிதக் கெழு} = \text{திட்ட விகிதக் கெழு} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \times 100\%$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

மாதிரி 55 :

பின்வரும் தொடரின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வரிசை எண்...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண் ...	37	49	52	75	36	44	63	81	28	55

தீர்வு :

வரிசை எண்	மதிப்பெண் x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1	37	−15	225
2	49	− 3	9
3	52	0	0
4	75	23	529
5	36	−16	256
6	44	− 8	64
7	63	11	121
8	81	29	841
9	28	−24	576
10	55	3	9
மொத்தம்	520		2630

$$N = 10, \; \bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{520}{10} = 52$$

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி } \sigma^2 = \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{N} = \frac{2630}{10} = 263$$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{263} = 16.2.$$

மாதிரி 56:

பின்வரும் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
0 — 2	1
2 — 4	1
4 — 6	2
6 — 8	3
8 — 10	4
10 — 12	8
12 — 14	2
14 — 16	5
16 — 18	3
18 — 20	1

தீர்வு :

மைய மதிப்பு x	நிகழ் வெண் f	fx	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
1	1	1	—10	100	100
3	1	3	— 8	64	64
5	2	10	— 6	36	72
7	3	21	— 4	16	48
9	4	36	— 2	4	16
11	8	88	0	0	0
13	2	26	2	4	8
15	5	75	4	16	80
17	3	51	6	36	108
19	1	19	8	64	64
மொத்தம்	30	330			560

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{330}{30} = 11$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{N} = \frac{560}{30} = 18.67.$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{18.67} = 4.32.$

மாதிரி 57 :

பின்வரும் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

உறுப்பின் அளவு ...	4	6	8	10	12	14	16
நிகழ்வெண் ...	2	4	5	3	2	1	4

தீர்வு :

அளவு x	நிகழ்வெண் f	fx	fx^2
4	2	8	32
6	4	24	144
8	5	40	320
10	3	30	300
12	2	24	288
14	1	14	196
16	4	64	1024
மொத்தம்	21	204	2304

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{204}{21} = 9.71$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{2304}{21} - (9.71)^2 = 109.71 - 94.28$$

$$= 15.43$$

$$\sigma = \sqrt{15.43} = 3.92.$$

வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம் (Root mean square deviation) :

மேற் கூறப்பட்ட முறைகளில் மாறி x-இன் மதிப்புக்கள் மிகப் பெரியதாகவோ, அல்லது பல தசம இடங்களைக்

கொண்ட எண்களாகவோ யிருந்தாலும், மிகப்பெரிய எண்களை நிகழ்வெண்களாகக் கொண்டிருந்தாலும் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுவது மிகவும் கடினமாகயிருக்கும். இத்தகைய சத்தர்ப்பங்களில் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறப்படுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களிலிருந்து திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, கணக்கீட்டுக்கு மிக எளிதாக யிருக்கக் கூடிய யாதானுமொரு ஆதியிலிருந்து (arbitrary origin) பெறப்படுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களிலிருந்து சில கணக்கீட்டுச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு, யாதானுமொரு ஆதி (A)-யிலிருந்து பெறப்படுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியின் வர்க்க மூலம் ‘வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம்’ (Root Mean Square Deviation) என்றழைக்கப்படுகிறது. இது S என்ற ஆங்கில எழுத்திஞல் குறிக்கப்படுகின்றது. அதாவது,

நிகழ்வெண் பரவலிலமைக்கப்படாத ஒரு தொடருக்கு

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma (x-A)^2}{N}}$$

என்றும், ஓர் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma f (x-A)^2}{N}}$$

என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$\therefore\ S^2 = \frac{\Sigma f (x-A)^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f (x^2 - 2Ax + A^2)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - 2A\frac{\Sigma f x}{N} + A^2\frac{\Sigma f}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - 2A\bar{x} + A^2\frac{N}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2 + \bar{x}^2 - 2A\bar{x} + A^2$$

$$= \left(\frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2\right) + (\bar{x}^2 - 2A\bar{x} + A^2$$

$$= \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2$$

இங்கு $(\bar{x}-A)$ என்பது பரவலின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் தெரிவு செய்யப்பட்ட யாதானுமொரு ஆதிக்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசமாகும். இவ்வித்தியாசத்தை d என்று குறிப்பிட்டால் அதாவது $\bar{d} = (\bar{x}-A)$ என்று எழுதினால்,

$$S^2 = \sigma^2 + d^2$$

என்ற சூத்திரம் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$\sigma^2 = S^2 - d^2$$

என்பது திட்ட விலக்கம் σ-க்கும், வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம் S-க்கு முள்ள தொடர்பாகும். இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் அல்லது பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 58 :

x, y என்ற இரு மாணவர்கள் பி.எஸ்ஸி. பட்டத் தேர்வில் 10 தாள்களில் பின்வரும் மதிப்பெண்களைப் பெற்றனர். இருவருடைய மதிப்பெண்களின் மாறுவிகிதக் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு, இருவருள் யாருடைய தேர்ச்சி அதிக சீராக அமைந்துள்ளதென்று காண்க.

தாள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	89	86	74	65	65	63	66	67	72	79
y	82	91	84	75	73	72	70	75	78	84

தீர்வு :

ஒவ்வொரு மாணவனின் மதிப்பெண்களுக்கும் தனித்தனியே மாறு விகிதக் கெழுவைக் கணக்கிடவும்.

மாணவன் x

யாதானுமொரு எண் 75-ஐ ஆதியாகக் கொண்டு வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம் காண்க. அதாவது,

$$A = 75 \quad \therefore \quad S^2 = \frac{\Sigma (x-A)^2}{N} = \frac{\Sigma (x-75)^2}{10}$$

தாள்	மதிப்பெண் x	$(x-75)$	$(x-75)^2$
1	89	14	196
2	86	11	121
3	74	−1	1
4	65	−10	100
5	65	−10	100
6	63	−12	144
7	66	−9	81
8	67	−8	64
9	72	−3	9
10	79	4	16
மொத்தம்	726		832

$$S^2 = \frac{\Sigma(x-A)^2}{N} = \frac{\Sigma(x-75)^2}{10} = \frac{832}{10} = 83.2$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{726}{10} = 72.6\ ; \quad A = 75$$

$$\therefore \ d = (\bar{x} - A) = (72.6 - 75) = -2.4$$

$$\therefore \ d^2 = (-2.4)^2 = 5.76$$

$$\sigma^2 = S^2 - d^2 = 83.2 - 5.76 = 77.44$$

$$\therefore \ \sigma = \sqrt{77.44} = 8.8$$

மாணவன் x-க்குரிய திட்ட விலக்கத்தை σ_x என்று குறிக்கலாம்.

$$\therefore \ \sigma_x = 8.8$$

மாணவன் x-இன் மாறு விகிதக் கெழு $\frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{8.8}{72.6} \times 100 = 10.74\%$$

மாணவன் y :

யாதானுமொரு எண்ணாகிய 80-ஐ ஆதியாகக் கொண்டு வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம் காண்க. அதாவது,

$$A = 80 \quad \therefore\ S^2 = \frac{\Sigma (y-A)^2}{N} = \frac{\Sigma (y-80)^2}{N}$$

தாள்	மதிப்பெண் y	$(y-80)$	$(y-80)^2$
1	82	2	4
2	91	11	121
3	84	4	16
4	75	− 5	25
5	73	− 7	49
6	72	− 8	64
7	70	−10	100
8	75	− 5	25
9	78	− 2	4
10	84	4	16
மொத்தம்	784		424

$$S^2 = \frac{\Sigma (y-A)^2}{N} = \frac{\Sigma (y-80)^2}{10} = \frac{424}{10}\ 42.4$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{784}{10} = 78.4$$

$$d = \bar{y} - A = 78.4 - 80 = -1.6 \quad \therefore\ d^2 = 2.56$$

$$\sigma_y^2 = S^2 - d^2 = 42.4 - 2.56 = 39.84$$

$$\sigma_y = \sqrt{39.84} = 6.31$$

மாணவன் y-இன் மாறுவிகிதக் கெழு $= \dfrac{\sigma y}{\bar{y}} \times 100$

$$= \frac{6.31}{78.4} \times 100 = 8.04$$

மாணவன் y-இன் மாறுவிகிதக் கெழு, மாணவன் x-இன் மாறு விகிதக் கெழுவை விட குறைவாகயிருப்பதால், மாணவன் y மாணவன் A-யை விட சீரான தேர்ச்சி பெற்றிருக்கிறன் என அறிகிறோம்.

மாதிரி 59 :

பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

மாறி x	... 4	6	8	10	12	14	16
நிகழ்வெண் f	... 2	4	5	3	2	1	4

தீர்வு :

மாறியின் மைய மதிப்புக்களுள் யாதானுமொரு மதிப்பாகிய 10ஐ ஆதியாகக் கொண்டு S^2ஐக் கணக்கிடுக.

x	f	fx	$(x-10)$	$(x-10)^2$	$f(x-10)^2$
4	2	.8	−6	36	72
6	4	24	−4	16	64
8	5	40	−2	4	20
10	3	30	0	0	0
12	2	24	2	4	8
14	1	14	4	16	16
16	4	64	6	36	144
மொத்தம்	21	204			324

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{204}{21} = 9.7$$

$$A = 10 \quad \therefore d = \bar{x} - A = 9.7 - 10 = -0.3 \quad \therefore d^2 = 0.09.$$

$$S^2 = \frac{\Sigma f(x-A)^2}{N} = \frac{\Sigma f(x-10)^2}{21} = \frac{324}{21} = 15.43.$$

$$\sigma^2 = S^2 - d^2 = 15.43 - 0.09 = 15.34$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{15.34} = 3.917 = 3.92.$$

பரவலின் மைய மதிப்புக்களும் நிகழ்வெண்களும் பெரிய எண்களாயிருந்தால் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தி திட்ட விலக்கம் காண்பது மிகக் கடினமாக யிருக்கும். ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி காண்பதற்குப் பயன்படுகின்ற சுருக்கு வழியைப் போன்ற பின்வரும் சுருக்கு வழியைப் பின்பற்றி எத்தகைய பரவலுக்கும் திட்ட விலக்கத்தை மிகவும் எளிதாகக் கணக்கிடலாம்.

திட்ட விலக்கம் காண சுருக்கு வழி

திட்ட விலக்கம் காணப் பயன்படும் சுருக்கு வழி கீழ்க் காணும் இரு பண்புகளின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது.

(1) ஒரு மாறியின் மதிப்புக்களிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியைக் கழிப்பதால் அல்லது கூட்டுவதால் அம்மாறியின் திட்டவிலக்கத்தில் எவ்வித மாறுதலுமேற்படாது. அதாவது, σ_x என்பது மாறி x-இன் திட்ட விலக்கமென்றால், $y = x + A$, $z = x - A$ என்ற மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் σ_x க்குச் சமமாக யிருக்கும். அதாவது,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$$

(2) ஒரு மாறியின் மதிப்புக்களை ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியால் வகுத்துக் கிடைக்கப்படும் மதிப்புக்களின் திட்டவிலக்கம் அம்மாறியின் திட்ட விலக்கத்தை அந்த மாறிலியால் வகுத்துக் கிடைக்கப்படும் மதிப்புக்குச் சமமாகும். அதாவது, σ_x என்பது x-என்ற மாறியின் திட்ட விலக்க மென்றால், $y = \frac{x}{c}$ என்ற மாறியின் திட்ட விலக்கமாகிய σ_y என்பது $\frac{\sigma_x}{c}$ க்குச் சமமாகும்.

ஆகவே. $\frac{\sigma_x}{c} = \sigma_y$

அல்லது, $\sigma_x = c\,\sigma_y$

மேற்கூறப்பட்ட இரு பண்புகளையும் சேர்த்துப் பின்வரும் பண்பாக மாற்றிக் கூறலாம்.

σ_x என்பது மாறி x-இன் திட்ட விலக்கமெனில், $d = \frac{(x-A)}{c}$ என்ற மாறியின் திட்ட விலக்கமாகிய σ_d என்பது $\frac{\sigma_x}{c}$ க்குச் சமமாகயிருக்கும். அதாவது,

$$\frac{\sigma_x}{c} = \sigma_d$$

அல்லது, $\sigma_x = c\,\sigma_d$

ஆகவே, ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் திட்ட விலக்கம் காண, அப்பரவலின் மாறி x ஐ $d = \left(\frac{x - A}{c}\right)$ என்ற தொடர்பின் மூலம் கூட்டுச் சராசரியின் சுருக்கு வழியில் செய்தது போன்று d என்ற மாறியாக மாற்றி,

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2}$$

என்ற சூத்திரத்தின் உதவியால் σ_d யின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுப் பின்னர்

$$\sigma_x = c\,\sigma_d$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் σ_x ஐக் காணலாம்.

மாதிரி 60 :

பின்வரும் பட்டியலில் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் வார சம்பளப் பரவல். அப்பரவலின் மாறு விகிதக் கெழு காண்க.

வார சம்பளம் ரூபாயில் மைய மதிப்பு	38	44	50	56	62	68	74	80	86
நிகழ்வெண்	27	72	135	170	285	175	96	28	12

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

தீர்வு :

. மைய மதிப்பு 62ஐ யாதானுமொரு ஆதி (A)-யாகக் கொண்டு விலக்கங்கள் (d) கணக்கிட்டு,

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் σ_d ஐக் கணக்கிடுக. பின்னர்,

$$\sigma_x = c\,\sigma_d, \text{ (இங்கு } c = \text{பிரிவு எல்லை)}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிட்டு,

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

வார சம்பளம் x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-62}{6}\right)$	fd	fd^2
38	27	−4	−108	432
44	72	−3	−216	648
50	135	−2	−270	540
56	170	−1	−170	170
62	285	0	0	0
68	175	1	175	175
74	96	2	172	384
80	28	3	84	252
86	12	4	48	192
மொத்தம்	1000		265	2793

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = \frac{-265}{1000} = -0.265\,; \quad \therefore\ \bar{d}^2 = (-.265)^2$$
$$= 0.0702$$

$$\bar{x} = A + c\,\bar{d} = 62 + 6\,(-.265) = 62 - 1.59$$
$$= 60.41 \text{ ரூபாய்கள்.}$$

$$\sigma^2_d = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{2793}{1000} - 0.0702 = 2.793 - 0.0702$$
$$= 2.7228$$

$$\sigma_d = \sqrt{2.7228} = 1.65$$
$$\sigma_x = c\,\sigma_d = 6 \times 1.65 = 9.90.$$

மாறுவிகிதக் கெழு $= \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{9.90}{60.41} \times 100 = 16.39\%$

மாதிரி 61 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு ...	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
நிகழ்வெண் ...	3	60	120	50	10

(மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 செப்.)

தீர்வு :

மைய மதிப்பு x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x - 32.5}{5}\right)$	fd	fd^2
22.5	3	−2	−6	12
27.5	60	−1	−60	60
32.5	120	0	0	0
37.5	50	1	50	50
42.5	10	2	20	40
மொத்தம்	243		4	162

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = \frac{4}{243} = 0.016 \quad \therefore \quad \bar{d}^2 = (.016)^2$$
$$= 0.0003.$$

$$\sigma^2_d = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{162}{243} - 0.0003$$
$$= 0.6667 - 0.0003$$
$$= 0.6664$$

$$\therefore \quad \sigma_d = \sqrt{0.6664} = 0.816$$
$$\sigma_x = c\,\sigma_d = 5 \times 0.816 = 4.08.$$

திட்ட விலக்கம் $= 4.08.$

மாதிரி 62 :

தனியார் நிறுவனங்களில் வேலையிலிருக்கும் தொழில் நுணுக்கப் பட்டதாரிகள் பற்றிய பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வயது எல்லை	நிகழ்வெண்
30 வரை	6
31 — 35	13
36 — 40	20
41 — 45	12
46 — 50	5
51 — 55	3
56 — 60	0
61 — 75	1

(சென்னை பி.காம்., 1967 செப்.)

தீர்வு :

முதற் பிரிவு திறப்பு முனையுடனும், இறுதிப் பிரிவு இயல்புக்குப் புறம்பான இடைவெளியுடனும் உள்ளன. ஆகவே, இவ்விரு முனைப் பிரிவுகளையும் ஏனைய பிரிவுகளைப் போன்று சம இடைவெளியுடன் கூடிய 26—30, 61—65 என்ற பிரிவுகளாகக் கருதி மைய மதிப்பு நிகழ்வெண் பரவலமைத்து திட்ட விலக்கம் கணக்கிடவும்.

வயது (மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-38}{5}\right)$	fd	fd^2
28	6	−2	−12	24
33	13	−1	−13	13
38	20	0	0	0
43	12	1	12	12
48	5	2	10	20
53	3	3	9	27
58	0	4	0	0
63	1	5	5	25
மொத்தம்	60		11	121

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{11}{60} = 0.183 ; \quad \therefore \bar{d}^2 = 0.0335$$

$$\sigma^2_d = \frac{\Sigma fd^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{121}{60} - 0.0335$$

$$= 2.0167 - 0.0335$$

$$= 1.9832$$

$$\sigma_d = \sqrt{1.9832} = 1.408$$

$$\sigma_x = c\,\sigma_d = 5 \times 1.408 = 7.04.$$

மாதிரி 63 :

அடியில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மாறுவிகிதக் கெழு காண்க.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
30 — 40	5
40 — 50	38
50 — 60	60
60 — 70	45
70 — 80	30
80 — 90	22

(மதுரை பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

(மைய மதிப்பு) x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-55}{10}\right)$	fd	fd^2
35	5	−2	−10	20
45	38	−1	−38	38
55	60	0	0	0
65	45	1	45	45
75	30	2	60	120
85	22	3	66	198
மொத்தம்	200		123	421

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{123}{200} = 0.615\ ; \quad \bar{d}^2 = (.615)^2 = 0.3782$$

$$\sigma^2 d = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{421}{200} - 0.3782 = 2.105 - 0.3782 = 1.7268$$

$$\sigma d = \sqrt{1.7268} = 1.314$$

$$\therefore \sigma x = c\,\sigma d = 10 \times 1.314 = 13.14$$

$$\bar{x} = A + c\,\bar{d} = 55 + 10(0.615) = 55 + 6.15 = 61.15$$

மாறுவிகிதக் கெழு $= \frac{\sigma x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{13.14}{61.15} \times 100 = 21.49\%$

மாதிரி 64 :

100 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்
0 — 10	12
10 — 20	21
20 — 30	23
30 — 40	34
40 — 50	10

(மதுரை பி.காம். 1972 ஏப்.)

தீர்வு :

x	f	$d = \left(\frac{x-25}{10}\right)$	fd	fd^2
5	12	−2	−24	48
15	21	−1	−21	21
25	23	0	0	0
35	34	1	34	34
45	10	2	20	40
மொத்தம்	100		9	143

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{9}{100} = .09 ; \quad \bar{d}^2 = .0081$$

$$\bar{x} = A + c\bar{d} = 25 + 10\,(.09) = 25 + .9 = 25.9.$$

$$\sigma d^2 = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{143}{100} - .0081 = 1.43 - .0081$$

$$= 1.4219$$

$$\sigma d = \sqrt{1.4219} = 1.19$$

$$\sigma x = c\,\sigma d = 10 \times 1.19 = 11.9$$

பிரிவு எல்லைகள் கொண்ட வளர் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து இடைநிலையளவு காண்க.

மதிப்பெண்கள்	நி.	வ. நி.
0 — 10	12	12
10 — 20	21	33
20 — 30	23	56
30 — 40	34	90
40 — 50	10	100

$N = 100$; $N/2 = 50$ $\therefore$ 20—30 என்பது இடைநிலைப் பிரிவு
$l = 20$, $c = 10$; $f = 23$; $m = 33$

$$\text{இடைநிலையளவு} = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 20 + \frac{10}{23}\,(50 - 33)$$

$$= 20 + \frac{10}{23}\,(17)$$

$$= 20 + \frac{170}{23}$$

$$= 20 + 7.39$$

$$= 27.39$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி = 25.9

இடைநிலையளவு = 27.39

திட்ட விலக்கம் = 11.9

மாதிரி 65 :

பின்வரும் பட்டியல் நூறு நிறுவனங்களின் இலாப, நட்டம் பற்றியது, சராசரி இலாபத்தையும், இலாபங்களின் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

இலாபம் (ரூபாய்களில்)	நிறுவனங்கள்
5000 முதல் 6000 வரை	8
4000 முதல் 5000 வரை	12
3000 முதல் 4000 வரை	30
2000 முதல் 3000 வரை	10
1000 முதல் 2000 வரை	5
0 முதல் 1000 வரை	5
—1000 முதல் 0 வரை	6
—2000 முதல் —1000 வரை	8
—3000 முதல் —2000 வரை	9
—4000 முதல் —3000 வரை	7

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவல் இறங்கு வரிசையிலுள்ளது. எனவே, மைய மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஏறு வரிசைப் பரவலாக மாற்றி யெழுதிக் கொள்க.

இலாபம் மைய மதிப்பு x	நிகழ் வெண் f	$d=\left(\frac{x-1500}{1000}\right)$	fd	fd^2
—3500	7	—5	—35	175
—2500	9	—4	—36	144
—1500	8	—3	—24	72
—500	6	—2	—12	24
500	5	—1	—5	5
1500	5	—0	0	0
2500	10	1	10	10
3500	30	2	60	120
4500	12	3	36	108
5500	8	4	32	128
மொத்தம்	100		26	786

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = \frac{26}{100} = 0.26;$$

$$\bar{x} = A + c\bar{d} = 1500 + 1000(0.26) = 1500 + 260 = 1760$$

சராசரி இலாபம் = ரூ. 1760

$$\sigma d^2 = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{786}{100} - (0.26)^2 = 7.86 - 0.0676$$
$$= 7.7924$$

$$\sigma = \bar{d}^2 \sqrt{7.7924} = 2.792$$

$$\sigma x = c\,\sigma d = 1000 \times 2.792 = 2792$$

இலாபங்களின் திட்ட விலக்கம் = ரூ. 2792

மாதிரி 66 :

கால்பந்தாட்டப் போட்டி விளையாட்டுகளில் A, B என்ற இரு விளையாட்டுக் குழுவினர் பெற்ற வெற்றிப் புள்ளிகள் பின் வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

வெற்றிப் புள்ளிகள்	போட்டி விளையாட்டுகளின் எண்ணிக்கை A—குழு	B—குழு
0	27	17
1	9	9
2	8	6
3	5	5
4	4	3

கால் பந்தாட்டத்தில் சீரான தேர்ச்சி பெற்ற விளையாட்டுக் குழு எது ? (சென்னை பி.காம். 1960 ஏப்.)

தீர்வு :

குழு—A இரு குழுக்களின் சீரான தன்மைகளை அவை பெற்றுள்ள வெற்றிப் புள்ளிகளின் மாறு விகிதக் கெழுக்களின் மூலம் ஒப்பிடலாம்.

வெற்றிப் புள்ளிகள் x	விளையாட்டுகள் (f)	fx	fx^2
0	27	0	0
1	9	9	9
2	8	16	32
3	5	15	45
4	4	16	64
மொத்தம்	53	56	150

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{N} = \frac{56}{53} = 1.057$$

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - x^2 = \frac{150}{53} - (1.057)^2 = 2.8302 - 1.1172$$

$$= 1.7130$$

$$\sigma x = \sqrt{1.7130} = 1.309$$

A-யின் மாறுவிகிதக் கெழு $= \frac{\sigma x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.309}{1.057} \times 100$

$$= 123.8\%$$

குழு—B

வெற்றி புள்ளிகள் x	விளையாட்டுகள் f	fx	fx^2
0	17	0	0
1	9	9	9
2	6	12	24
3	5	15	45
4	3	12	48
மொத்தம்	40	48	126

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{N} = \frac{48}{40} = 1.2$$

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{126}{40} - (1.2)^2 = 3.15 - 1.44$$

$$= 1.71$$

$$\sigma x = \sqrt{1.71} = 1.308$$

B-யின் மாறுவிகிதக் கெழு $= \frac{\sigma x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.308}{1.2} \times 100$

$$= 109\%$$

B-யின் மாறுவிகிதக் கெழு, A-யின் மாறு விகிதக் கெழுவை விட குறைவாகயிருப்பதால், B-குழுவினர் கால்பந்தாட்ட விளையாட்டுக்களில் சீராக வெற்றிப் புள்ளிகளைப் பெறுவதாகக் கருதலாம்.

மாதிரி 67 :

ஒரு ஆய்வாளர் 25 உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியளவு 56″ என்றும், திட்ட விலக்கம் 2″ என்றும் கணக்கிட்டார் ஆனால் பின்னர் சரிபார்த்ததில் ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு 60″ என்று தவருக எழுதப்பட்டிருப்பதைக் கண்டார். இத்தவருன மதிப்பை நீக்கிவிட்டு ஏனைய உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

25 உறுப்புக்களின் மொத்தம் $= N\bar{x} = 25 \times 56 = 1400$

தவருன மதிப்பு $x_1 = 60$

மீதி 24 உறுப்புக்களின் சரியான மொத்தம் $= 1340$

$\therefore$ மீதி 24 உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{1340}{24} = 55.8''$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - x^2$$

25 உறுப்புக்களுக்கு $\frac{\Sigma x^2}{N} - x^2 = (2)^2$

,, $\frac{\Sigma x^2}{25} - 56^2 = 4$

,, $\frac{\Sigma x^2}{25} = 4 + 56^2 = 4 + 3136$

$= 3140$

,, $\Sigma x^2 = 3140 \times 25 = 78500$

ஒரு தவருன உறுப்புக்கு $x_1^2 = 60^2 = 3600$

மீதி 24 உறுப்புகளுக்கு $\Sigma x^2 = 74900$

,, $\frac{\Sigma x^2}{N} = \frac{\Sigma x^2}{24} = \frac{74900}{24}$

$= 3120.8$

,, $\bar{x}^2 = (55.8)^2 = 3113.64$

,, $\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2 = 7.16$

,, $\sigma^2 = 7.16$

,, $\sigma = \sqrt{7.16} = 2.67$

மீதி 24 உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி $= 55.8''$

,, ,, திட்ட விலக்கம் $= 2.67''$

தாதிரி 68 :

12 உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் முறையே 30", 4" என்று கணக்கிடப்பட்டன. பின்னர் சரி பார்த்ததில், ஒரு உறுப்பின் அளவு 24" என்பதற்குப் பதிலாக 42" என்று தவருக எழுதப்பட்டிருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. 12 உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் கணிக்கிடுக.

தீர்வு :

12 உறுப்புக்களின் தவருன கூட்டுச் சராசரி = 30

12 ,, ,, மொத்தம் $= 12 \times 30 = 360$

ஒரு தவருன மதிப்பு $= 42$

மீதி 11 உறுப்புக்களின் சரியான மொத்தம் $= 318$

ஒரு சரியான உறுப்பு $= 24$

12 உறுப்புக்களின் மொத்தம் $= 342$

$\therefore$ 12 உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{342}{12}$

$= 28.5$

12 உறுப்புக்களின் தவறுன $= \sigma^2 = \dfrac{\Sigma x^2}{12} - 30^2 = 4^2$

,, $= \dfrac{\Sigma x^2}{12} - 900 = 16$

,, $= \dfrac{\Sigma x^2}{12} = 16 + 900 = 916$

,, $\Sigma x^2 = 916 \times 12 = 10992$

ஒரு தவறுன உறுப்பின் வர்க்கம் $= 42^2 \qquad = 1764$

மீத 11 உறுப்புக்களின் சரியான $\Sigma x^2 \qquad = 9228$

ஒரு சரியான உறுப்பின் வர்க்கம் $= 24^2 \qquad = 576$

12 உறுப்புக்களின் சரியான $\Sigma x^2 \qquad = 9804$

12 உறுப்புக்களின் சரியான $\dfrac{\Sigma x^2}{N} = \dfrac{9804}{12} = 817$

,, ,, $\bar{x}^2 = (28.5)^2 \qquad = 812.25$

,, ,, $= \dfrac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2 \qquad = 4.75$

,, ,, $\sigma^2 = 4.75$

,, ,, $\sigma = \sqrt{4.75} = 2.17$

$\therefore$ 12 உறுப்புக்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி = 28.5"

,, ,, திட்ட விலக்கம் = 2.17"

மாதிரி 69 :

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து 100 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை 50 கி.கி. என்றும், திட்ட விலக்கம் 6 கி.கி. என்றும் கணகிடப்பட்டன. பின்னர், 30 கி. கி. — 40 கி. கி. என்ற பிரிவின் நிகழ்வெண் 16க்குப் பதிலாக 20

என்றும், 40 கி. கி.—50 கி. கி. என்பதன் நிகழ்வெண் 22க்குப் பதிலாக 18 என்றும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. சரியான கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

(சென்னை பி.காம். 1967 செப்.)

தீர்வு :

$N = 100$; தவறுன $\bar{x} = 50$: தவறுன $\sigma = 6$

$\therefore$ தவறுன மொத்தம் $= N\bar{x} = 100 \times 50 = 5000$

ஆனல், $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f x}{N}$ $\quad\therefore\quad \Sigma f x = N\bar{x} = 5000$

100 மாணவர்கட்குத் தவறுன $\Sigma f x = 5000$

30—40 பிரிவின் மைய மதிப்பு $x_1 = 35$

30—40 பிரிவின் தவறுன நிகழ்வெண் $f_1 = 20$

,, ,, $f_1 x_1 = 20 \times 35 = 700$

40—50 பிரிவின் மைய மதிப்பு $x_2 = 45$

40—50 பிரிவின் தவறுன நிகழ்வெண் $f_2 = 18$

,, ,, $f_2 x_2 = 18 \times 45 = 810$

இரு பிரிவுகளின் தவறுன மொத்தம் $= f_1 x_1 + f_2 x_2$

$= 700 + 810 = 1510$

மீதிப் பிரிவுகளின் சரியான மொத்தம் $= 5000 - 1510$

$= 3490$

30—40 பிரிவின் சரியான நிகழ்வெண் $F_1 = 16$

,, ,, மொத்தம் $= F_1 x_1 = 16 \times 35$

$= 560$

40—50 பிரிவின் சரியான நிகழ்வெண் $= F_2 = 22$

,, ,, மொத்தம் $F_2 x_2 = 22 \times 45$

$= 990$

இரு பிரிவுகளின் சரியான மொத்தம் $= F_1 x_1 + F_2 x_2$

$= 560 + 990 = 1550$

எல்லாப் பிரிவுகளின் சரியான மொத்தம் $= \Sigma f x$

$= 3490 + 1550 = 5040$

100 மாணவர்கட்குச் சரியான $\Sigma f x = 5040$

,, ,, $\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{N} = \frac{5040}{100}$

50.4

100 மாணவர்களின் தவறான $\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2 = 6^2$

,, ,, $\frac{\Sigma f x^2}{100} - 50^2 = 36$

,, ,, $\frac{\Sigma f x^2}{100} = 36 + 2500 = 2536$

,, ,, $\Sigma f x^2 = 2536 \times 100$

$= 253600$

30—40 பிரிவின் $x_1 = 35$; தவறான $f_1 = 20$

,, தவறான $f_1 x_1^2 = 20 \times 35^2 = 20 \times 1225 = 24500$

40—50 பிரிவின் $x_2 = 45$; தவறான $f_2 = 18$

,, தவறான $f_2 x_2^2 = 18 \times 45^2 = 18 \times 2025 = 36450$

இரு பிரிவுகளின் தவறான $f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 = 24500 + 36450$

$= 60950$

மீதிப் பிரிவுகளின் சரியான $\Sigma f x^2 = 253600 - 60950$

$= 192650$

30—40 பிரிவின் சரியான $F_1 = 16$

,, ,, $F_1 x_1^2 = 16 \times 35^2 = 16 \times 1225$

$= 19600$

40—50 பிரிவின் சரியான $F_2 = 22$

,, ,, $F_2 x_2^2 = 22 \times 45^2 = 22 \times 2025$

$= 44550$

இரு பிரிவுகளின் சரியான $F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 = 19600 + 44550$
$= 64150$

எல்லாப் பிரிவுகளின் சரியான $\Sigma f x^2 = 192650 + 64150$
$= 256800$

100 மாணவர்களின் சரியான $\Sigma f x^2 = 256800$

,, ,, $\frac{\Sigma f x^2}{N} = \frac{256800}{100} = 2568$

,, ,, $\bar{x} = 50.4$

,, ,, $\bar{x}^2 = (50.4)^2 = 2540.16$

,, ,, $\frac{\Sigma f x^2}{N} - \bar{x}^2 = 27.84$

,, ,, $\sigma^2 = 27.84$

,, ,, $\sigma = \sqrt{27.84} = 5.27$

100 மாணவர்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி = 50.4 கி.கி.
,, ,, திட்ட விலக்கம் = 5.27 கி.கி.

கூட்டுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் காணல் :

பல பரவல்களின் மொத்த நிகழ்வெண்கள் $N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots$

எனவும், கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \ldots\ldots$

எனவும், திட்ட விலக்கங்கள் $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots\ldots$

எனவும் கொள்க. ஆகவே, இம்மூன்று பரவல்களும் இணைந்த கூட்டுப் பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண் $N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots$ ஆகும்.

கூட்டுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, திட்ட விலக்கம் σ ஆகியவை பின்வரும் சூத்திரங்களினால் பெறப்படுகின்றன.

$$\text{(i)} \quad \bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}$$

(ii) $d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}),\ d_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x})\ d_3 (\bar{x}_3 - \bar{x}), \ldots$
எனக் கொண்டால்,

$$N\sigma^2 = N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2) + N_3(\sigma_3^2 + d_3^2) + \ldots$$

மாதிரி 70 :

25 எண்ணிக்கை, 35 எண்ணிக்கையுள்ள இருகூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 75-உம், 90-உம் ; அவற்றின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகள் முறையே 16-உம், 25-உம் அவ்விரு கூறுகளையும் சேர்த்தால் கிடைக்கும் கூறுக்குரிய சராசரியையும், விலக்க வர்க்கச் சராசரியையும் காண்க.

(மதுரை, பி.எஸ்ஸி. 1971, ஏப்.)

தீர்வு :

இங்கு, $N_1 = 25$, $N_2 = 35$ $\therefore$ $N = N_1 + N_2 = 60$

$\bar{x}_1 = 75$, $\bar{x}_2 = 90$,

$\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$

இணைந்த கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்றும், விலக்க வர்க்கச் சராசரி σ^2 என்றும் கொள்க,

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{25\,(75) + 35\,(90)}{60}$$

$$= \frac{25\,(5) + 35\,(6)}{4}$$

$$= \frac{125 + 210}{4}$$

$$= \frac{335}{4}$$

$$= 83.75$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 75 - 83.75 = -8.75.$ $\therefore d_1^2 = 76.56$

$\sigma_2 = 16$

$\sigma_1^2 + d_1^2 = 92.56$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 90 - 83.75 = 6.25$ $\therefore$ $d_2^2 = 39.06$

$\sigma_2^2 = 25$

$\sigma_2^2 + d_2^2 = 64.06$

$$N\ \sigma^2 = N_1\ (\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)$$

$$60\ \sigma_2 = 25\ (92.56) + 35\ (64.06)$$

$$12\ \sigma^2 = 5\ (92.56) + 7\ (64.06)$$

$$= 462.80 + 448.42$$

$$= 911.22$$

$$\sigma^2 = \frac{911.22}{12} = 75.935$$

இணைந்த கூறின் கூட்டுச் சராசரி = 83.75

,, விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 75.94

மாதிரி 71 :

ஓர் கல்லூரியைச் சேர்ந்த 180 புகுமுக வகுப்பு மாணவர்கள் ஆங்கில பாடத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி 54 ; திட்ட விலக்கம் 18. அவர்களுள் 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 42 ; திட்ட விலக்கம் 8. மீதி 80 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் பிரிவு :	$N_1 = 100,$	$\bar{x}_1 = 42,$	$\sigma_1 = 8$
இரண்டாம் பிரிவு :	$N_2 = 80,$	$\bar{x}_2 = ?\ ,$	$\sigma_2 = ?$
இணைந்த பிரிவு :	$N = 180,$	$\bar{x} = 54,$	$\sigma = 18$

$$\frac{N_1\ \bar{x}_1 + N_2\ \bar{x}_2}{N} = \bar{x}$$

$$N_1\ \bar{x}_1 + N_2\ \bar{x}_2 = N\ \bar{x}$$

$$100\ (42) + 80\ \bar{x}_2 = 180\ (54)$$

$$5\ (42) + 4\bar{x}_2 = 9\ (54)$$

$$210 + 4\bar{x}_2 = 486$$

$$4\ \bar{x}_2 = 486 - 210 = 276$$

$$\bar{x}_2 = \frac{276}{4} = 69.$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 42 - 54 = -12$ $\therefore \quad d_1^2 = 144$

$\sigma_1^2 = 64$

$\sigma_1^2 + d_1^2 = 208$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 69 - 54 = 15$ $\therefore \quad d_2^2 = 225$

$\sigma_2^2 = \sigma_2^2$

$\sigma_2^2 + d_2^2 = \sigma_2^2 + 225$

$$N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2) = N\sigma^2$$

$$100\,(208) + 80\,(\sigma_2^2 + 225) = 180\,(324)$$

$$5\,(208) + 4\,(\sigma_2^2 + 225) = 9\,(324)$$

$$1040 + 4\sigma_2^2 + 900 = 2916$$

$$4\sigma_2^2 + 1940 = 2916$$

$$4\sigma_2^2 = 2916 - 1940 = 976$$

$$\sigma_2^2 = \frac{976}{4} = 244$$

$$\sigma_2 = \sqrt{244} = 15.6$$

மீதி மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி = 69

,, திட்ட விலக்கம் = 15.6

திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் :

1. ஒரு பரவலின் திட்ட விலக்கம் அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைச் சுற்றிலும் அதனுடைய உறுப்புக்கள் பரவிக் கிடக்கும் தன்மையை நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு கணிதச் சூத்திரத்தின் மூலம் அளவிடுகிறது.

2. கால்ம விலக்கத்தைப் போலன்றி திட்ட விலக்கம் பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்திருப்பதால் பரவலின் சிதறல் தன்மையைச் சரியாக அளவிடுகிறது.

3. இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளுக்குட்படக் கூடிய கணிதச் சூத்திரத்தைப் பெற்றிருப்பதால் புள்ளிவிவர ஆய்வின்

ஏனைய கணக்கீடுகளிலும், கூறெடுத்தல் முறைகளிலும் பரந்த அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றிற்கு இப்பண்பு கிடையாது.

4. கூறெடுத்தல் முறைகளிலேற்படக் கூடிய சிறு மாறுபாடுகளினுல் திட்ட விலக்கம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

5. வரையறையின் படி திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுவது கடினமாகயிருந்த போதிலும், சுருக்கு வழியின் மூலம் மிக எளிதில் கணக்கிட முடியும்.

6. சராசரி விலக்கத்தின் கணக்கீடுகளில் விலக்கங்களின் எதிரடையாளங்கள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன. ஆனுல், திட்ட விலக்கக் கணக்கீட்டில் எதிரடையாளங்கள் இவ்வாறு புறக்கணிக்கப்படுவதில்லை. எல்லா விலக்கங்களும் வர்க்கப்படுத்தப்படுவதால் இயற்கணித அடிப்படையிலேயே எதிரடையாளங்கள் யாவும் நேரடையாளங்களாக மாற்றப்பட்டுவிடுகின்றன. முக்கியமாக இச்சிறப்பியல்பின் காரணமாகவும், திட்ட விலக்கம் எல்லா உறுப்புக்களேயும் சார்ந்து அமைந்திருப்பதன் காரணமாகவும், சராசரி விலக்கத்திற்குப் பதிலாக திட்ட விலக்கமே ஒரு பரவலின் சிதறல் தன்மையை அளவிடச் சிறந்ததென ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

7. பல பரவல்களின் திட்ட விலக்கங்கள், கூட்டுச் சராசரிகள், மொத்த நிகழ்வெண்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து அப்பரவல்கள் ஒன்ருக இணைக்கப்பட்ட கூட்டுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிட முடியும். கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றிற்கு இப்பண்பு கிடையாது. கூறெடுத்தல் கொள்கைகளில் மற்றப் பரவுகையளவைகளைவிட திட்ட விலக்கம் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுவதற்கு இதுவும் ஒரு காரணம்.

8. நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளிலும், இயல்நிலைப் பரவல்களிலும் மற்றப் பரவுகையளவைகள் பெற்றிராத சில அரிய பண்புகளைத் திட்ட விலக்கம் பெற்றிருப்பதன் காரணமாகத் தற்காலத்தில் புள்ளியியல் ஆய்வுகளிலும், புள்ளி விவரக் கணக்கீடுகளிலும் திட்ட விலக்கம் மிகவும் தாராளமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கத்தின் குறைபாடுகள் :

திட்ட விலக்கம் பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்திருப்பதால் திறந்த முனைப் பிரிவுகளைக் கொண்ட பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை அளவிட முடியாது. மேலும், இயல்புக்கு மாறான ஒரு சில மிகப் பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய உறுப்புக்களைக் கொண்ட பரவலின் சிதறல் தன்மையைத் திட்ட விலக்கத்தின் மூலம் சரியாக அளவிட முடியாது. சராசரி விலக்கமும் இது போன்று எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து இருப்பதால் அதுவும் இத்தகைய பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை அளவிடப் பயன்படாது. ஆகவே, இத்தகைய பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை அளவிட கால்ம விலக்கமே பொருத்தமானதாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கத்தின் பயன்கள் :

(1) ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைச் சுற்றி அப்பரவலின் உறுப்புக்கள் சிதறிக் கிடக்கும் தன்மையை அளவிட திட்ட விலக்கம் பயன்படுகிறது. இதன் மூலம் அப்பரவலிலுள்ள உறுப்புக்கள் சீராகப் பரவிக் கிடக்கின்றனவா அல்லது சீரற்ற தன்மையில் சிதறிக் கிடக்கின்றனவா என்பதைத் தெரிந்து கொள்ள முடிகிறது. பொருளாதாரத் துறையில், வருமானம், சொத்து, ஊதியம் போன்ற பொருளாதார மாறிகளைக் கொண்ட பொருளாதாரப் பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை அளவிட திட்ட விலக்கம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(2) திட்ட விலக்கத்திலிருந்து பெறப்படுகின்ற மாறு விகிதக் கெழு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களின் சிதறல் தன்மைகளை ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது.

(3) பரவல்களின் கோட்டங்களை அளவிடவும், பல பரவல்களின் கோட்டத் தன்மைகளை ஒப்பிடவும் திட்ட விலக்கம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(4) ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புள்ள இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் (coefficient of correlation) கணக்கிட திட்ட விலக்கம் பயன்படுகிறது.

(5) ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரு மாறிகளுக்கிடையே மாறுபாட்டு விகிதம் (Ratio of Variation), நெகிழ்ச்சிக் கெழு (coefficient of elasticity) ஆகியவற்றைக் கணக்கிட திட்ட

விலக்கம் பயன்படுகிறது, உதாரணமாக, தேவை நெகிழ்ச்சி (elasticity of demand), அளிப்பு நெகிழ்ச்சி (elasticity of supply) ஆகியவற்றின் கணக்கீடுகளில் திட்ட விலக்கம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(6) கூறெடுத்தலிலேற்படுகின்ற சிறு மாறுபாடுகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை யென்பதாலும், இயல்நிலைப் பரவலின் பல சிறப்பியல்புகளும் திட்ட விலக்கத்தைச் சார்ந்து அமைந் திருப்பதாலும், கூறு சோதனைகளில் திட்ட விலக்கம் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(7) பல பரவல்களின் திட்ட விலக்கங்களிலிருந்து கூட்டுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண முடியுமென்ற தனிச் சிறப்பைப் பெற்றிருப்பதாலும், இயற் கணிதக் கணக்கீடுகளுக் குட்படக் கூடிய ஒரே பரவுகையளவை யென்பதாலும் மற்ற பரவுகையளவைகளை விட இதுவே அதிகமாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(8) புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு முறைகளில் திட்ட விலக்கம் மிகப் பரந்த அளவில் பயன்படுகின்றது.

வினாத்தாள்—7.

1. பரவுகை என்பதன் மூலம் அறியப்படுவது என்ன வென்று விளக்குக. பரவுகை அளவைகளைக் கணக் கிடும் முறைகள் யாவை? இந்த அளவைகளின் நடை முறைப் பயன்பாடுகள் யாவை?

(சென்னை, பி. காம். 1965 செப்.)

2. வீச்சு, கால்ம விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகிய வற்றை வரையறுக்கவும், தொழிலதிபர்களுக்கு இந்த அளவைகளின் முக்கியத்துவத்தை விளக்கி ஓர் குறிப்பு வரைக. (மதுரை, எம்.ஏ. 1969 ப.மு.)

3. வீச்சு என்றாலென்ன? ஒரு பரவுகையளவை யென்ற முறையில் அதன் நன்மை, தீமைகள் யாவை?

4. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் பரவுகையை அளவிடுவதன் நோக்கங்களென்ன? ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் சரா

சரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடும் முறையைச் சுருக்கமாகக் கூறுக. (மதுரை பி.ஏ., 1971 ஏப்.)

5. ஒரு மாறியின் மதிப்புக்களுள் குறிப்பிடத்தக்க மதிப்பாக சராசரியைப் பயன்படுத்தும்பொழுது பரவுகையைப் பற்றிச் சிறிதளவு தெரிந்திருக்க வேண்டிய அவசியம் யாது? (மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

6. கால்ம விலக்கம் எவ்வாறு கணிக்கப்படுகிறது? கால்ம விலக்கம் முழுப் பரவலின் பரவுகையைக் காட்டுகிறதா?

7. சராசரி மூலம் பரவுகையை அளவிடுகின்ற முறையை விளக்குக.

8. கால்ம விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள், குறைபாடுகள் ஆகியவற்றை விளக்குக.

9. ''சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகளைவிட அதன் குறைபாடுகளே குறிப்பிடத் தக்கவாறு அமைந்துள்ளன'' என்ற கூற்றின் உண்மையினை ஆராய்க.

10. பரவுகையளவைகளுள் திட்ட விலக்கம் மிகவும் முக்கியமானதாகக் கருதப்படுவதேன் என்பதை விளக்குக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

11. ஒரு பரவலின் பரவுகையளவைகள் யாவை? புள்ளியியலில் திட்ட விலக்கம் மிகவும் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தப்படுவது ஏன்?

(சென்னை பி.காம். 1960 ஏப்.)

12. ''சராசரி விலக்கமும், திட்ட விலக்கமும் போட்டிப் பரவுகையளவைகள்'' என்ற கூற்றினை விரிவாக விவாதிக்கவும். (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

13. மாறு விகிதக்கெழு என்றாலென்ன? அதன் முக்கிய பயனை விளக்குக. (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

14. சில முக்கிய பரவுகையளவைகளைக் கூறுக. மாறுவிகிதக் கெழு என்றால் என்ன ? அதன் பயன்களை விளக்குக.

(மதுரை பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

15. மிகச் சிறந்த பரவுகையளவை எது ?

(மதுரை பி.காம். 1970 ஏப்.)

16. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் எந்தெந்தப் பண்புகளை விலக்க வர்க்கச் சராசரி அளவிடுகிறதென்பதைக் கூறுக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

17. பரவுகையளவைகள் என்ற முறையில் கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றின் பண்புகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை விவாதிக்கவும் (சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்)

18. புள்ளியியலில் முக்கியமான பரவுகையளவைகளையும், கெழுக்களையும் விளக்கி அவற்றின் பண்புகளின் ஒற்றுமைகளை ஆராய்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

19. பல்வேறு பரவுகையளவைகளின் நன்மை, தீமைகள் பற்றிய ஒற்றுமைகளை விவாதிக்கவும்.

(சென்னை பி.காம். 1967 செப். 68 ஏப்.)

20. பல்வேறு பரவுகையளவைகள் பற்றி குறிப்பு வரைக. எந்த அளவை பொதுவாக சிறந்ததாகக் கொள்ளப் படுகிறது ? ஏன் ? (சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்.)

21. பரவுகையை அளவிடுகின்ற பல்வேறு முறைகள் பற்றி, அவற்றின் சிறப்பியல்புகளைக் குறிப்பிட்டு ஒரு குறிப்புத் தருக. (மதுரை எம்.ஏ. 1971)

பயிற்சி 7.

(1) வரிசை எண் 1 முதல் 10 வரையுள்ள பி.காம். மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

வரிசை எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் ...	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

(அ) முகடு, (ஆ) இடைநிலையளவு, (இ) கூட்டுச் சராசரி, (ஈ) திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(2) x, y, என்ற இரு பங்குகளின் விலைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. எந்தப் பங்கின் மதிப்பு அதிக நிலைத்தன்மையுடையதென்று கூறுக.

x ...	55	54	52	53	56	58	52	50	51	49
y ...	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

(3) பின்வரும் இரு தொடர்களின் திட்ட விலக்கங்களைக் கணக்கிடுக. எந்தத் தொடர் அதிக மாறுபாடுகளைக் காட்டுகிறது?

தொடர் (1) ...	192	288	236	229	184	260	348	291	330	243
தொடர் (2) ...	83	87	93	109	124	126	126	101	102	108

(4) இரு மாணவர்கள் 12 தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

மாணவன் 1 :	48	25	37	58	72	61	15	81	34	55	38	40
மாணவன் 2 :	52	47	58	45	55	49	56	39	65	53	47	62

தேர்வுகளில் ஒரே சீராக மதிப்பெண்கள் பெற்றிருப்பவர் யார்?

(5) பின்வரும் பரவலின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	7	8	9
சொற்களின் எண்ணிக்கை	9	5	5	9	4	2	4	—	1

(6) பின்வரும் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

மாறி ...	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
நிகழ்வெண் ...	1	0	1	5	6	8	14	5	6	4

(7) பின்வரும் பரவலுக்கு மாறுவிகிதக் கெழு காண்க.

எழுத்துக்கள் ...	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
சொற்கள் ...	9	6	2	2	2	4	3	3	2	3

(8) பின்வரும் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு ...	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
நிகழ்வெண் ...	3	5	15	10	4	2

(9) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு ...	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
நிகழ்வெண் ...	3	60	120	50	10

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

(10) பின்வரும் நிகழ் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வாரக் கூலி (ரூபாய்)	9	12	15	18	21	24	27	30
கூலி பெறுபவர் எண்ணிக்கை	20	60	150	250	200	120	50	40

(மதுரை பி.காம். 1971 செப்.)

(11) மின் நுகர்வு பற்றிய பின்வரும் தொடரின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

கி. வாட்டில் நுகர்வு ...	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	0-50
நுகர்வோர் எண்ணிக்கை ...	10	25	30	20	15	100

(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

(12) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

பிரிவு ...	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நிகழ்வெண் ...	8	12	17	14	9	7	4

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(13) ஒரு பாராளுமன்றத்திலுள்ள 542 உறுப்பினர்களின் வயதுப் பரவலைத் தருகின்ற பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வருடங்களில் வயது	உறுப்பினர்கள்
20 — 30	3
30 — 40	61
40 — 50	132
50 — 60	153
60 — 70	140
70 — 80	51
80 — 90	2

(மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

(14) A, B என்ற ஆலைகளைச் சேர்ந்த தொழிலாளர்களின் கூலிப் பரவல்களைப் பின்வரும் பட்டியல் தருகிறது. எந்த ஆலையில் கூலிகள் அதிக மாறுபாடுகளுடனிருக்கின்றன என்று காண்க.

கூலி (ரூபாய்) ...	20	60	100	140	180	220	260	300
ஆலை A ...	30	25	30	45	25	13	24	8
ஆலை B ...	45	35	25	40	25	20	5	5

(15) A, B என்ற இருவகை நோய்களால் பீடிக்கப்பட்டவர்கள் குணமடைந்த நாட்களின் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

நோய் நீடித்த நாட்கள்	நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை A	B
0 — 13	5	3
14 — 27	17	21
28 — 41	14	7
32 — 55	7	3
56 — 69	5	1

ஒவ்வொரு பரவலுக்கும் கூட்டுச் சராசரியும், மாறுவிகிதக் கெழுவும் காண்க. எது கடுமையான நோய் என்று ஆராய்க.

(16) 16 உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை முறையே 12, 4 என்று கணக்கிடப்பட்டன. பின்னர், ஒரு உறுப்பின் அளவு 7 என்று தவருக அளவிடப்பட்டிருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இத்தவருன உறுப்பை நீக்கிவிட்டு மீதி உறுப்புக்களின் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

(17) 25 அளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை முறையே 22 காலன், 6 காலன் என்று கணக்கிடப் பட்டன. பின்னர், 34 காலன் கொண்ட ஒரு அளவு தவறு என்று கண்டுபடிக்கப்பட்டது. இந்த அளவை நீக்கிவிட்டு மீதி அளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(18) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி 34; திட்ட விலக்கம் 8 என்று கணக்கிடப்பட்டன. 70, 46 மதிப்பெண்கள் பெற்ற இரு மாணவர்கள் அவ் வகுப்பை விட்டுச் சென்று விட்டால், மீதியுள்ள மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(19) 40 பொட்டலங்களின் சராசரி எடை 21 ராத்தல்; திட்ட விலக்கம் 8 ராத்தல். அப்பொட்டலங்களை மீண்டும் நிறுத்துப் பார்த்ததில் ஒரு பொட்டலத்தின் எடை 24 ராத்தலுக்குப் பதிலாக 28 ராத்தல் என்று தவருக நிறுக்கப்பட்டிருப்பது தெரிந்தது. 40 பொட்டலங்களின் சரியான கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(20) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 62; திட்ட விலக்கம் 15. பின்னர் சரிபார்த்ததில் 70 என்ற மதிப்பெண் 17 என்று தவருக எழுதப்பட்டிருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. சரியான சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(21) 0-5, 5-10, என்ற பிரிவுகளைக் கொண்ட 200 மாணவர்கள் புள்ளியியல் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பற்றிய பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 40; திட்ட விலக்கம் 15 என்று கணக்கிடப்பட்டன. ஆனல் பின்னர் சரிபார்த்தபோது, 43 என்ற மதிப்பெண் 53 என்று தவருக எழுதப்பட்டிருந்தது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. அப்பரவலின் சரியான கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

(22) புகுமுக வகுப்பைச் சேர்ந்த இரு பிரிவு மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி; திட்ட விலக்கம் ஆகியவை பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. புகுமுக வகுப்பைச் சேர்ந்த எல்லா மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

	N	x	σ
பிரிவு 1 ...	25	80	15
பிரிவு 2 ...	75	70	25

(23) 35 உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை முறையே 72, 8; 45 உறுப்புக்களைக் கொண்ட மற்ருெரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 48; திட்ட விலக்கம் 5. இவ்விரு கூறுகளும் ஒரு கூருக இணைக்கப்பட்டால், 80 உறுப்புக்களைக் கொண்ட இணைப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(24) 40 உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி 20; திட்ட விலக்கம் 3 ஆகும். 60 உறுப்புக்களைக் கொண்ட மற்ருெரு பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி 25; திட்ட விலக்கம் 5. இவ்விரு பிரிவுகளையும் ஒன்ருகச் சேர்த்தால் கூட்டுப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி என்ன? திட்ட விலக்கம் என்ன?

(25) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 120 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி 42, திட்ட விலக்கம் 12. மற்ருெரு வகுப்பிலுள்ள 80 மாணவர்களின் இந்த மதிப்புக்கள் முறையே 62, 18 ஆகும். இரு வகுப்புகளும் ஒன்ருக இணைக்கப்பட்டால் கூட்டு வகுப்பின் சராசரி என்ன? திட்ட விலக்கம் என்ன?

(26) சம வயதுடைய இரு பிரிவு மனிதர்களின் இரத்த அழுத்தங்கள் இரு மருத்துவர்களால் அளவிடப்பட்டு முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

	மனிதர்கள் எண்ணிக்கை	சராசரி இரத்த அழுத்தம்	திட்ட விலக்கம்
மருத்துவர் x ...	113	159 மி.மீ.	22.4 மி.மீ.
மருத்துவர் y ...	121	149 மி.மீ.	20.0 மி.மீ.

ஒன்ருகச் சேர்க்கப்பட்ட இவ்விரு பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரி திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(சென்னை பி. காம். 1967 ஏப்.)

(27) மூன்று மருத்துவப் பரிசோதகர்கள் மூன்று பிரிவுகளில் நடத்திய சோதனைகள் பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அம்மூன்று பிரிவுகளும் சேர்ந்த கூட்டுத் தொகுதியின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு	சோதிக்கப்பட்டவர் எண்ணிக்கை	சராசரி எடை (ராத்தல்)	திட்ட விலக்கம் (ராத்தல்)
1	50	113	6
2	60	120	7
3	90	115	8

(28) 100 உறுப்புக்களடங்கிய ஒரு தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 60, விலக்க வர்க்கச் சராசரி 25. அவற்றுள் 50 உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி 61, திட்ட விலக்கம் 4.5. மீதி உறுப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி, விலக்க வர்க்கச் சராசரி, ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(29) பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்ட உறுப்புக்களைக் காண்க.

	எண்ணிக்கை	சராசரி	திட்ட விலக்கம்
பிரிவு 1 ...	160	—	10
பிரிவு 2 ...	—	138	—
கூட்டுத் தொகுதி ...	360	130	16

(30) பின் வரும் முடிவுகள் இரண்டு நிறுவனங்களின் வேலையாட்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மாதக் கூலிகளின் பகுப்பாய்வு பற்றியது.

	நிறுவனம் 1.	நிறுவனம் 2.
கூலியாட்களின் எண்ணிக்கை ...	586	648
சராசரி மாதக் கூலி ...	ரூ. 52.5	ரூ. 47.50
கூலிப் பரவலின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி ...	ரூ. 100	ரூ. 121

(அ) எந்த நிறுவனம் மாதக் கூலியாக அதிகத் தொகையைக் கொடுக்கிறது ?

(ஆ) வேலையாட்களின் கூலிகளில் அதிக மாறுபாடு எந்த நிறுவனத்திலுள்ளது ?

(இ) இரு நிறுவனங்களையும் ஒன்றாக இணைத்தால், கூட்டு நிறுவனத்தின் சராசரி மாதக் கூலி, விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(31) பின்வரும் முடிவுகள் இரண்டு நிறுவனங்களின் வேலையாட்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மாதக் கூலிகளின் பகுப்பாய்வு பற்றியது.

	நிறுவனம் 1	நிறுவனம் 2
கூலி பெற்றவர் எண்ணிக்கை ...	596	654
சராசரி மாதக் கூலி ...	ரூ. 54.65	ரூ. 48.54
கூலிப் பரவலின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி ...	ரூ. 81.64	ரூ. 100.42

இரு நிறுவனங்களும் ஒன்றாக இணைக்கப்பட்டால் கூட்டு நிறுவனத்தின் வேலையாட்களின் (i) மாதச் சராசரி கூலி, (ii) திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கவும்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. (புள்ளி) 1968 ஏப்.)

7. கோட்ட அளவுகளும், தட்டை அளவுகளும்

(MEASURES OF SKEWNESS AND KURTOSIS)

கோட்ட அளவுகள் **(Measures of Skewness) :**

நிகழ்வெண் பரவல்களின் இரு முக்கியமான பண்புகள் பற்றி சராசரிகள், பரவுகையளவைகள் என்ற இரு அத்தியாயங்களில் விளக்கப்பட்டன. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் மையப் போக்கைச் சராசரிகளும், அம்மையப் போக்கைச் சுற்றி அப்பரவலின் உறுப்புக்கள் குவிந்து கிடக்கின்றவா அல்லது அம்மையப் போக்கிலிருந்து வெகுதூரங்களில் சிதறிக் கிடக்கின்றனவா என்பது பற்றிப் பரவுகையளவைகளும் அளவிடுகின்றன என்று கண்டோம். ஒரு பரவலின் மையப் போக்கைச் சுற்றி அப்பரவலின் உறுப்புக்கள் குவிந்து கிடந்தாலும் அல்லது சிதறிக் கிடந்தாலும், அம்மையப் போக்கின் இருபுறமுள்ள உறுப்புக்கள் சம எண்ணிக்கையிலிருக்கின்றனவா அல்லது அம்மையப் போக்கின் எந்தப் பக்கத்தில் அதிகமான உறுப்புக்கள் பரவிக் கிடக்கின்றன என்பது போன்ற விவரங்களைப் பரவுகையளவைகளின் மூலம் அறிந்து கொள்ள முடியாது. ஆனால், ஒரு பரவலைப் பற்றிய தன்மைகளை முழுமையாகத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டுமானால் இது போன்றே விவரங்களையும் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியது அவசியமாகும். உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 87.5 என்றும், சராசரி விலக்கம் 10 மதிப்பெண்கள் என்றும் கொள்வோம். இவ் விவரத்தைக் கொண்டு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் தரத்தைச் சரியாக மதிப்பிட முடியாது. ஆனால் சராசரி மதிப்பெண்ணாகிய 87.5-ஐ விட உயர்ந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை குறைந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமா

அல்லது குறைவா என்ற விவரம் தெரிந்தால் மாணவர்களின் தரத்தை இன்னும் நன்றாக மதிப்பிட முடியும். ஆகவே, ஒரு பரவலின் தன்மைகளைச் சராசரிகள், பரவுகையளவைகள் ஆகியவற்றை மட்டும் கொண்டு முழுமையாக அளவிட முடியாதென்றும், சராசரிக்கு எந்தப் பக்கத்தில் அதிக எண்ணிக்கையில் உறுப்புக்கள் பரவிக் கிடக்கின்றன என்ற விவரத்தையும் தெரிந்து கொள்வதன் மூலமே நன்றாக அளவிட முடியுமென்றும் தெரிகிறது. இத்தகைய விவரத்தைக் 'கோட்ட அளவைகள்' (measures of skewness) மூலம் பெறலாம். இந்த விவரம் முகட்டளவு சராசரியை ஆதாரமாகக் கொண்டு அளவிடப்படுகிறது. அதாவது, ஒரு பரவலின் முகட்டளவை விட உயர்ந்த மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை, குறைந்த மதிப்புக்களைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமா அல்லது குறைவா என்று அளவிடுதலே கோட்ட அளவையின் நோக்கமாகும்.

முகட்டளவையின் இரு பக்கங்களிலும் சம எண்ணிக்கைகளில் சீராக உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு பரவலுக்குச் 'சீரான பரவல்' (Symmetrical distribution) என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் பரவலைக் கருதுக.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	வளர் நிகழ்வெண்
20 — 25	8	8
25 — 30	12	20
30 — 35	18	38
35 — 40	24	62
40 — 45	18	80
45 — 50	12	92
50 — 55	8	100

இதன் முகட்டளவு $= 35 + \frac{18 \times 5}{18+18} = 35 + \frac{90}{36} = 35 + 2.5$

$= 37.5$

இடைநிலையளவு $= 35 + \frac{5}{24}(50-38) = 35 + \frac{60}{24}$

$= 35 + 2.5 = 37.5$

கூட்டுச் சராசரி வருமாறு :—

மதிப்பெண் x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-37.5}{5}\right)$	fd
22.5	8	−3	**−24**
27.5	**12**	−2	**−24**
32.5	**18**	−1	**−18**
37.5	**24**	0	**0**
42.5	**18**	1	**18**
47.5	**12**	2	**24**
52.5	**8**	3	**24**
மொத்தம்	100		0

$$\bar{d} = 0 \qquad \therefore \quad \bar{x} = A + c\bar{d} = 37.5 + 5\,(0) = 37.5$$

ஆகவே, மேற்கண்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகிய மூன்றும் சமமாகயிருப்பதைக் காண்கிறோம். மேலும், முகட்டுப் பிரிவாகிய 35-40க்கு இருபுறமுள்ள பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள் ஒரே சீராக அமைந்திருப்பதையும் காணலாம். இப்பரவலில் இடைநிலையளவும் முகட்டளவும் சமமாகயிருப்பதால் முகட்டளவாகிய 37.5க்குக் குறைந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் 50 மாணவர்களென்றும், அதிகமான மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் 50 மாணவர்களென்றும், அறிகிறோம். இத்தகைய ஒரு பரவலுக்குச் 'சீரான பரவல்' (Symmetrical distribution) என்று பெயர். இதன் வளைவை ஒரு வரைபடத்தில் வரைந்தால் மணி (bell) போன்ற அமைப்புடைய ஒரு வளைவு கிடைக்கும்.

இப்பரவலின் கால்மங்கள் வருமாறு.

$$\text{கா}_1 = 30 + \frac{5}{18}\,(25-20) = 30 + \frac{25}{18} = 30 + 1.4$$
$$= 31.4$$

$$\text{கா}_3 = 40 + \frac{5}{18}\,(75-62) = 40 + \frac{65}{18} = 40 + 3.6$$
$$= 43.6$$

மேலும் இடைநிலையளவு (இ. அ.) = 37.5 என்று கண்டோம்.

இப்பொழுது, கா$_3$ — இ. அ. = 43.6 − 37.5 = 6.1

இ. அ. — கா$_1$ = 37.5 − 31.4 = 6.1

ஆகவே, கா$_3$ — இ. அ. = இ. அ. — கா$_1$

அதாவது, கா$_3$ + கா$_1$ — 2 (இ. அ.) = 0

மேலும் கூட்டுச் சராசரி = இடைநிலையளவு = முகட்டளவு என்று கண்டோம்.

∴ கூட்டுச் சராசரி = முகட்டளவு = 0

ஆகவே, ஒரு சீரான பரவலில், சராசரிகளும், கால்மங்களும் பின்வரும் தொடர்புகளின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன என்று காண்கிறோம்.

(1) கூட்டுச் சராசரி—முகட்டளவு = 0

(2) கா$_3$ + கா$_1$ — 2 (இ. அ.) = 0

இப்பொழுது கீழ்க்கண்டவாறு மதிப்பெண்கள் பெற்ற 20 மாணவர்கள் அவ்வகுப்பில் சேர்க்கப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்
45—50	1
55—60	6
60—65	5
65—70	4
70—75	3
75—80	1
மொத்தம்	20

ஆகவே, மொத்தமுள்ள 120 மாணவர்களின் மதிப்பெண் பரவல் வருமாறு :

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	வளர் நிகழ்வெண்
20 — 25	8	8
25 — 30	12	20
30 — 35	18	38
35 — 40	24	62
40 — 45	18	80
45 — 50	13	93
50 — 55	8	101
55 — 60	6	107
60 — 65	5	112
65 — 70	4	116
70 — 75	3	119
75 — 80	1	120

இப்பரவலின் முகட்டளவு $= 35 + \dfrac{18 \times 5}{18+18} = 35 + \dfrac{90}{36}$

$= 35 + 2.5 = 37.5$

இடைநிலையளவு $= 35 + \dfrac{5}{24}\ (60-38) = 35 + \dfrac{110}{24}$

$35 + 4.6 = 39.6$

இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி வருமாறு :

மதிப்பெண் x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-42.5}{5}\right)$	fd
22.5	8	−4	−32
27.5	12	−3	−36
32.5	18	−2	−36
37.5	24	−1	−24
42.5	18	0	0
47.5	13	1	13
52.5	8	2	16
57.5	6	3	18
62.5	5	4	20
67.5	4	5	20
72.5	3	6	18
77.5	1	7	7
மொத்தம்	120		−16

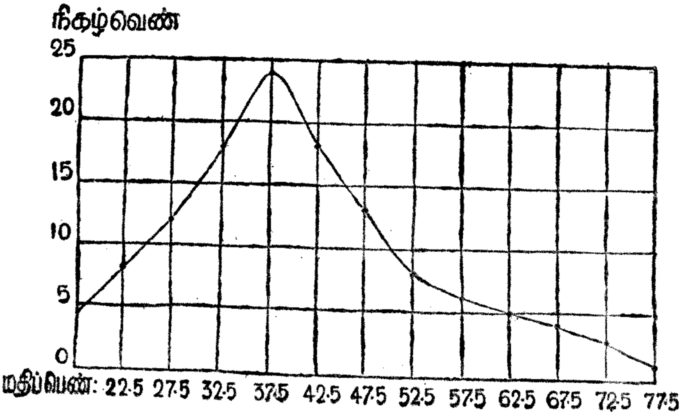
$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = -\frac{16}{120} = -0.13$$

$$\bar{x} = A + c\,\bar{d} = 42.5 + 5(-0.13) = 42.5 - 0.65$$
$$= 41.85$$

ஆகவே, முகட்டளவைவிட உயர்ந்த மதிப்பெண்கள் பெற்ற 20 மாணவர்கள் அதிகமாகச் சேர்க்கப்பட்ட பின் முகட்டளவு, இடைநிலையளவு, கூட்டுச் சராசரி ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் முறையே 37.5, 39.6, 41.85 என்று மாறியிருப்பதைக் காண்கிறோம். அதாவது, இப்பரவலில் மூன்று சராசரிகளும் **முகட்டளவு, இடைநிலையளவு, கூட்டுச் சராசரி என்ற ஏறு வரிசையிலமைந்திருக்கின்றன.** ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியின்

மதிப்பு முகட்டளவின் மதிப்பை விட அதிகமாகயிருக்கும். அதாவது,

கூட்டுச் சராசரி—முகட்டளவு < 0. (0-ஐ விட அதிகம்) என்று காண்கிறோம். இப்பரவலில் முகட்டளவாகிய 37.5-ஐ விட குறைந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் 50 மாணவர் களென்றும், உயர்ந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் மீதியுள்ள 70 மாணவர்களென்றும் காண்கிறோம். இத்தகைய பரவலின் வளைவு முகட்டுக்கு வலது பக்கத்தில் சீரற்ற தன்மையுடன் ஒரு நீண்ட வாலுடன் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். (படம் பார்க்க)



படம் 26.

இப்பரவலின் கால்மங்கள் வருமாறு :

$$கா_1 = 30 + \frac{5}{18}(30-20) = 30 + \frac{50}{18} = 30 + 2.8 = 32.8$$

$$கா_3 = 45 + \frac{5}{13}(90-80) = 45 + \frac{50}{13} = 45 + 3.8 = 48.8$$

$$\therefore கா_3 + கா_1 = 48.8 + 32.8 = 81.6$$

ஆனால் இடைநிலையளவின் இரு மடங்கு = 2 (இ.அ.) = 2 (39.6) = 79.2

$$\therefore கா_3 + கா_1 - 2\,(இ.அ.) = 81.6 - 79.2 = 2.4 = ஒரே நேரெண்$$

அதாவது, $கா_3 + கா_1 - 2\,(இ.அ.) < 0$.

ஆகவே, ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில், முகட்டளவைவிட உயர்ந்த மதிப்புக்கள் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை குறைந்த மதிப்புக்கள் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமானால், அப்பரவல் கீழ்க்கண்ட தன்மைகளைப் பெற்றிருக்கும்.

(1) கூட்டுச் சராசரி — முகட்டளவு >0

(2) கா$_3$ + கா$_1$ — 2 (இ.அ.) >0

(3) நிகழ்வெண் வரை வலப்பக்கம் நீண்ட வாலுடன் அமைந்திருக்கும்.

இப்பரவலில் முகட்டளவுக்கு வலப்பக்கமுள்ள உறுப்புக்கள் சீரற்ற தன்மையிலமைந்திருக்கின்றன. இவ்வாறு ஒரு பரவலின் முகட்டளவுக்கு வலப்பக்கம் காணப்படுகின்ற சீரற்ற தன்மைக்கு 'வலப்பக்கக் கோட்டம்' (skewness to the right) அல்லது 'நேர் கோட்டம்' (positive skewness) என்று பெயர். இவ்வாறு வலப்பக்கக் கோட்டத்துடன் அமையப் பெற்ற ஒரு பரவலுக்கு 'நேர்கோட்டப் பரவல்' (positively skewed distribution) என்று பெயர். மாறாக, முகட்டளவுக்கு இடப்பக்கமுள்ள உறுப்புக்கள் வலப்பக்கமுள்ள உறுப்புக்களைவிட எண்ணிக்கையில் அதிகமாகயிருந்தால் பரவலின் வளைவு இடப்பக்கம் நீண்ட வாலுடன் அமைந்திருப்பதோடு, அதன் மூன்று சராசரிகளும் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு என்ற ஏறு வரிசையில் அமைந்திருக்கும். இவ்வாறு இடப்பக்க வாலுடன் அமையப் பெற்ற ஒரு பரவலின் சராசரிகளும், கால்மங்களும் பின்வரும் தொடர்புகளின் மூலம் இணைக்கப்பட்டிருக்கும்.

(1) கூட்டுச் சராசரி —முகட்டளவு < 0 (0-ஐ விட குறைவு

(2) கா$_3$ + கா$_1$ — 2 (இ.அ.) < 0

இவ்வாறு, முகட்டளவின் இடப்பக்கம் காணப்படுகின்ற சீரற்ற தன்மைக்கு 'இடப்பக்க கோட்டம்' (skewness to the left) அல்லது 'எதிர் கோட்டம்' (negative skewness) என்று பெயர். இடப்பக்க கோட்டத்துடன் அமைந்துள்ள ஒரு பரவலுக்கு 'எதிர் கோட்டப் பரவல்' (negatively skewed distribution) என்று பெயர். ஆகவே, ஒரு பரவலின் சராசரிகள், கால்மங்கள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு பெறப்படுகின்றன

(1) கூட்டுச் சராசரி—முகட்டளவு,

(2) $கா_3 + கா_1 - 2$ (இ.அ.) என்ற சார்புகளின் மதிப்புக்கள்

அதன் கோட்டத் தன்மையை அளவிடப் பயன்படுகின்றன. ஒரு பரவலுக்குரிய இச்சார்புகளின் மதிப்புக்கள் நேரெண் மதிப்புக்களுடனிருந்தால் (பூச்சியத்தைவிட அதிகமாகயிருந்தால்) அது நேர் கோட்டப் பரவல் என்றும், எதிரெண் மதிப்புக்களுடனிருப்தால் (பூச்சியத்தைவிட குறைவாகயிருந்தால்) அது எதிர் கோட்டப் பரவல் என்றும், பூச்சியமாகயிருந்தால் அது ஒரு சீரான பரவல் என்றும் அறிந்து கொள்ளலாம். இவ்வாறு ஒரு பரவலின் கோட்டத் தன்மையை அளவிடப் பயன்படுகின்ற

(1) கூட்டுச் சராசரி—முகடு

(2) $கா_4 + கா_1 - 2$ (இ.அ.)

ஆகிய இரண்டும் கோட்ட அளவைகள் என்றழைக்கப்படுகின்றன. இவை முறையே 'பியர்சனின் கோட்ட அளவை' Pearson's measure of skewness) என்றும், 'பௌலியின் கால்ம கோட்ட அளவை' (Bowley's quartile measure of skewness) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இக்கோட்ட அளவைகள் பரவலின் மாறியின் அலகிலேயே அமைந்திருக்கின்ற தனி அளவைகளாகும், ஆகவே இரு பரவல்களின் கோட்டத் தன்மைகளை ஒப்பிட இவற்றின் அலகுகள் நீக்கப்பட வேண்டும் மேற்கண்ட இரு கோட்ட அளவைகளையும் தகுந்த பரவுகை அளவையைக் கொண்டு வகுப்பதன் மூலம் இவற்றிலுள்ள அலகுகளை நீக்கிவிடலாம் இவ்வாறு அலகு நீக்கப் பெற்ற கோட்ட அளவைக்குக் 'கோட்டக்கெழு' (coefficient of skewness) என்று பெயர். பியர்சனின் கோட்ட அளவையைத் திட்ட விலக்கத்தினால் வகுத்து 'பியர்சனின் கோட்டக் கெழு'வையும் (Pearson's coefficient of skewness), பௌலியின் கால்ம கோட்ட அளவையைக் கால்ம இடைவெளியால் வகுத்து 'பௌலியின் கால்ம கோட்டக் கெழு'வையும் (Bowley's quartile coefficient of skewness) பெறலாம். இவ்வாறு,

(1) பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகட்டளவு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$= \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\text{S.D.}}$$

(2) பௌலியின் கால்மக் கோட்டக் கெழு $= \frac{கா_3 + கா_1 - 2\,(இ.அ.)}{கா_3 + கா_1}$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M}{Q_3 + Q_1}$$

என்ற கோட்டக் கெழு சூத்திரங்கள் பெறப்படுகின்றன.

ஒரு மிதச் சீர் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி—முகட்டளவு என்பது 3 (கூட்டுச் சராசரி—இடை நிலையளவு)க்குச் சமமாக யிருக்குமாகையால்,

பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{3\,(கூட்டுச்\ சராசரி - முகட்டளவு)}{திட்ட\ விலக்கம்}$

என்ற சூத்திரத்தையும் பயன் படுத்தலாம்.

பொருளாதாரப் பரவல்களில் கோட்டங்கள் :

பொருளாதார விவரங்களிலிருந்து பெறப்படுகின்ற பல நிகழ்வெண் பரவல்கள் அதிகக் கோட்டம் வாய்ந்தவையாகக் காணப்படுகின்றன. அமெரிக்காவில் மிக உயர்ந்த பதவிகளை ஆண்களே வகித்து வருவதால் அமெரிக்கர்களின் வருமானம் பற்றிய பரவல் மிக அதிக நேர் கோட்டத்துடன் காணப்படுகிறது. தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கேற்ப அமைக்கப்பட்ட ஒரே தொழிலைச் சேர்ந்த நிறுவனங்களின் பரவல் அதிகக் கோட்டமுடையதாகயிருக்கும். இத்தகைய ஒரு பரவல் இடது பக்க ஓரத்தில் மிக உயர்ந்த முகட்டுடன் தொடங்கி வலப்பக்கம் தாழ்ந்து சென்று ஒரு நீண்ட வாலுடன் முடிகிற அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும். வருமானம், சொத்து, கூலி ஆகியவை பற்றிய பரவல்களின் சீரற்ற தன்மைகளை ஆராய மேற்கண்ட கோட்ட அளவைகள் பயன்படுகின்றன.

மாதிரி 72 :

பின்வரும் பரவலின் கால்ம கோட்டக்கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மாறி (x)	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
நிகழ்வெண் (f)	3	21	68	30	10	6	2

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

தீர்வு :

மாறி	நி.	வ. நி.
0.5 — 5.5	3	3
5.5 — 10.5	21	24
10.5 — 15.5	68	92
15.5 — 20.5	30	122
20.5 — 25.5	10	132
25.5 — 30.5	6	138
30.5 — 35.5	2	140

$$N = 140 \therefore \frac{N}{4} = 35, \frac{N}{2} = 70, \frac{3N}{4} = 105.$$

10.5 — 15.5 என்பது கா$_1$—பிரிவு

$l = 10.5, \quad c = 5, \quad f = 68, \quad m = 24$

$$கா_1 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{4} - m\right)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(35 - 24)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(11)$$

$$= 10.5 + \frac{55}{68}$$

$$= 10.5 + 0.8 = 11.3$$

10.5 — 15.5 என்பது இடைநிலைப்பிரிவு.

$l = 10.5, c = 5, f = 68, m = 24.$

$$இ\cdot அ. = l + \frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(70 - 24)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{68}(46)$$

$$= 10.5 + \frac{230}{68}$$

$$= 10.5 + 3.4 = 13.9.$$

15.5—20.5 என்பது $கா_3$—பிரிவு.

$$l = 15.5,\ c = 5,\ f = 30,\ m = 92.$$

$$கா_3 = l + \frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{30}(105 - 92)$$

$$= 15.5 + \frac{13}{6}$$

$$= 15.5 + 2.2 = 17.7.$$

$$\therefore \text{கால்மக் கோட்டக் கெழு} = \frac{கா_3 + கா_1 - 2\,(\text{இ. அ.})}{கா_3 - கா_1}$$

$$= \frac{17.7 + 11.3 - 2\,(13.9)}{17.7 - 11.3}$$

$$= \frac{29.0 - 27.8}{6.4}$$

$$= \frac{1.2}{6.4}$$

$$= 0.19.$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் கோட்டமுடையது.

மாதிரி 73 :

பின்வரும் பட்டியல் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் வார சம்பளப் பரவல். அப்பரவலுக்குப் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு காண்க.

வார சம்பளம் (ரூபாய்) ...	38	44	50	56	62	68	74	80	86
நிகழ்வெண் ...	27	72	185	170	285	175	96	28	12

தீர்வு ;

வார சம்பளம் x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-62}{6}\right)$	fd	fd^2
38	27	−4	−108	432
44	72	−3	−216	648
50	135	−2	−270	540
56	170	−1	−170	170
62	285	0	0	0
68	175	1	175	175
74	96	2	192	384
80	28	3	84	252
86	12	4	48	192
மொத்தம்	1000		−265	2793

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{-265}{1000} = -0.265.$$

$$\bar{x} = A + c\bar{d} = 62 + 6(-.265) = 62 - 1.59 = 60.41.$$

$$\sigma_d^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} - \bar{d}^2 = \frac{2793}{1000} - (-.265)^2 = 2.793 - 0.0702$$
$$= 2.7228.$$

$$\therefore \sigma_d = \sqrt{2.7228} = 1.65$$

$$\sigma_x = c\,\sigma_d = 6 \times 1.65 = 9.90.$$

இப்பொழுது முகட்டளவு காண்க ;

வார சம்பளம்	நிகழ்வெண்
35 — 41	27
41 — 47	72
47 — 53	135
53 — 59	170
59 — 65	285
65 — 71	175
71 — 77	96
77 — 83	28
83 — 89	12

59—65 என்பது முகட்டுப் பிரிவு.

$$\therefore \quad l=59,\ c=6,\ f_1=170,\ f_2=175$$

$$\text{முகட்டளவு} = l + \frac{f_2 c}{f_1+f_2}$$

$$= 59 + \frac{175 \times 6}{170+175}$$

$$= 59 + \frac{1050}{345}$$

$$= 59+3.04 = 62.04.$$

$$\text{பியர்சனின் கோட்டக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகட்டளவு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{60.41 - 62.04}{9.90}$$

$$= \frac{-1.63}{9.90}$$

$$= -0.164.$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் சிறிதளவு எதிர்க் கோட்டத்துடன் அமைந்துள்ளது.

விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் (Moments) :

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவற்றை மைய மதிப்புக்களாகவும், $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ என்பவற்றை அவற்றிற்குரிய நிகழ்வெண்களாகவும் $N = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n$ ஐ மொத்த நிகழ்வெண்ணாகவும் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில்

$$\frac{1}{N}\,\Sigma f\,(x-A)^r$$

என்பது A என்ற யாதானுமொரு ஆதியிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட r-ஆம்படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி (rth moment about the arbitrary origin A) என்றும்,

$$\frac{1}{N}\,\Sigma f\,(x-\bar{x})^r$$

என்பது அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-ஐ ஆதியாகக் கொண்டு கணிக்கப்பட்ட r-ஆம்படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி (rth moment about the A mean) என்றும் வரையறுக்கப் படுகின்றன. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் μ (மியூ என்று வாசிக்கவும்) என்றும், யாதானுமொரு ஆதியிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் μ^1 அல்லது γ (காமா என்று வாசிக்கவும்) என்றும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, மேலே கூறப்பட்ட r-ஆம்படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளை முறையே

$$\gamma_r = \mu^1 r = \frac{1}{N} \Sigma f (x-A)^r,$$

$$\mu r = \frac{1}{N} \Sigma f (x-\bar{x})^r$$

என்றும் எழுதலாம். கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக்கொண்டு கணிக்கப்படுகின்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளை மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் (Central moments) என்றும் அழைக்கலாம். முதல், இரண்டாம் படி மைய விலக்கப் பெருக் கல் சராசரிகள் முறையே

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \Sigma f (x-\bar{x}),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \Sigma f (x-\bar{x})^2$$

ஆகும். ஆனால் $\Sigma f (x-\bar{x}) = 0$ என்றும், $\frac{1}{N} \Sigma f (x-\bar{x})^2 = \sigma^2$ என்றும் முன்னர் கண்டோம். ஆகவே,

$$\mu_1 = 0,$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = \text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி}$$

என்று காண்கிறோம்.

μ_r, $\mu^1{}_r$-ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள தொடர்பு.

குறிப்பிட்ட ஒரு ஆதியிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளிலிருந்து மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளைக் கீழ்கண்டவாறு பெறலாம்.

குறிப்பிட்ட ஆதியை A எனக்கொண்டு $(\bar{x}-A)=d$ என்று எழுதுக.

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \Sigma f(x-\bar{x})$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f\{(x-A)-(\bar{x}-A)\}$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f\{(x-A)-d\}$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f(x-A) - d\frac{1}{N} \Sigma f$$

ஆனால், $\mu_1 = 0, \frac{1}{N} \Sigma f(x-A) = \mu_1{}^1, \frac{1}{N} \Sigma f = \frac{1}{N} N = 1.$

$$\therefore \quad 0 = \mu_1{}^1 - d$$

$$\therefore \quad \mu_1{}^1 = d = (\bar{x}-A)$$

இப்பொழுது, $\mu_2 = \frac{1}{N} \Sigma f(x-\bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N} \Sigma \{(x-A)-d\}^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f\{(x-A)^2 - 2d(x-A)+d^2\}$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f(x-A)^2 - 2d. \frac{1}{N} \Sigma f(x-A)+d^2$$

$$= \mu_2{}^1 - 2d\,\mu_1{}^1 + d^2$$

$$= \mu_2{}^1 - 2d.\,d + d^2$$

$$= \mu_2{}^1 - d^2.$$

இதுபோல், $\mu_3 = \frac{1}{N} \Sigma f(x-\bar{x})^3$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f\{(x-A)-d\}^3$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f\{(x-A)^3 - 3d(x-A)^2 + 3d^2(x-A) - d^3\}$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f(x-A)^3 - 3d.\frac{1}{N}\Sigma f(x-A)^2 + 3d^2$$

$$\frac{1}{N}\Sigma f(x-A) - d^3\frac{1}{N}\Sigma f$$

$$= \mu_3{}^1 - 3d.\ \mu_2{}^1 + 3d^2\ \mu_1{}^1 - d^3$$

$$= \mu_3{}^1 - 3d\ \mu_2{}^1 + 3d.\ d - d^3$$

$$= \mu_3{}^1 - 3d\ \mu_2{}^1 + 3d^3 - d^3$$

$$= \mu_3{}^1 - 3d\ \mu_2{}^1 + 2d^3.$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^4$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f\{(x-A) - d\}^4$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f\{(x-A)^4 - 4d(x-A)^3 + 6d^2(x-A)^2 - 4d^3 (x-A) + d^4\}$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f(x+A)^4 - 4d\frac{1}{N}\Sigma f(x-A)^3 + 6d^2$$

$$\frac{1}{N}\Sigma f(x-A)^2 - 4d^3\frac{1}{N}\Sigma f(x-A) + d^4.\ \frac{1}{N}\Sigma f$$

$$= \mu_4{}^1 - 4d\ \mu_3{}^1 + 6d^2\ \mu_2{}^1 - 4d^3.\ \mu_1{}^1 - d^4$$

$$= \mu_4{}^1 - 4d\ \mu_3{}^1 + 6d^2\ \mu_2{}^1 - 4d^3.\ d + d^4.$$

$$= \mu_4{}^1 - 4d\ \mu_3{}^1 + 6d^2\ \mu_2{}^1 - 3d^4.$$

மேற்கண்ட நான்கு வாய்பாடுகளையும், μ க்குப் பதிலாக γ-ஐப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

(i) $\gamma_1 = d = (\bar{x}-A),$

(ii) $\mu_2 = \gamma_2 - d^2, \quad = \gamma_2 - \gamma_1{}^2$

(iii) $\mu_3 = \gamma_3 - 3d\ \gamma_2 + 2d^3.$

$\quad\quad = \gamma_3 - 3\gamma_1\ \gamma_2 + 2\gamma_1{}^3$

(iv) $\mu_4 = \gamma_4 - 4d\ \gamma_3 + 6d^2\ \gamma_2 - 3d^4$

$\quad\quad = \gamma_4 - 4\gamma_1\ \gamma_3 + 6\gamma_1{}^2\ \gamma_2 - 3\gamma_1{}^4.$

இதுபோல், μ இன் உயர் படிகளையும் μ^1 இன் வாயிலாகச் சூத்திரங்களாகப் பெறமுடியும். மற்றும் μ^1 இன் பல்வேறு படிகளையும் μ இன் பல்வேறு படிகளிலிருந்து பெற முடியும்.

மாதிரி 74 :

x ஐ மாறியாகக் கொண்ட ஒரு பரவலில் $x=3$ ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் முறையே 2, 10, -30 ஆகும். $x=0$ ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் முறையே 5, 31, 141 என்று காட்டுக. மேலும், அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 5, விலக்க வர்க்கச் சராசரி 6, $\mu_3=-74$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு :

இங்கு $x=3$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட

$$\mu_1{}^1=2,\ \mu_2{}^1=10,\ \mu_3{}^1=-30.$$

என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ $A=3,\ d=\mu_1{}^1=2.$ அதாவது, $\bar{x}-3=2$ $\therefore$ $\bar{x}=5$

$$\mu_2=\mu_2{}^1-d^2=10-4=6.$$

$\therefore$ விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2=6$.

$$\mu_3=\mu_3{}^1-3d\ \mu_2{}^1+2d^3.$$
$$=-30-3\,(2)\,(10)+2\,(2^3)$$
$$=-30-60+16=-74$$

இப்பொழுது $x=0$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

இங்கு $A=0,\ \bar{x}=5,\ \therefore\ d=\bar{x}-A=5-0=5.$

$\therefore$ $\gamma_1=d=5.$

இப்பொழுது,

$$\mu_2=\gamma_2-d^2.$$
$$\therefore\quad 6=\gamma_2-25 \qquad \therefore\ \gamma_2=31$$
$$\mu_3=\gamma_3-3d\ \gamma_2+2d^3.$$
$$-74=\gamma_3-3\,(5)\,(31)+2\,(5^3)$$
$$=\gamma_3-465+250.$$
$$\therefore\quad \gamma_3=-74+465-250=141.$$

விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளின் மூலம் கோட்டக் கெழு காணல் :

ஒரு பரவலின் கோட்ட அளவை யென்பது அப்பரவலின் சராசரியின் வலப்பக்க முள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை இடப்பக்க முள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைவிட அதிக மாக யிருக்கிறதா அல்லது குறைவாக யிருக்கிறதா என்பதை அளவிடுவதே யாகும். ஒரு பரவலில், கூட்டுச் சராசரிக்கு வலப்பக்க முள்ள உறுப்புக்களின் மைய விலக்கங்கள் (கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கங்கள்) யாவும் நேரெண் மதிப்புக்களுடனும், இடப்பக்க முள்ள உறுப்புக் களின் மைய விலக்கங்கள் யாவும் எதிரெண் மதிப்புக்களுடனு மிருக்கும். ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியின் வலப்பக்க முள்ள உறுப்புக்களின் மைய விலக்கப் பெருக்கல்களின் மொத்தம் இடப்பக்க உறுப்புக்களின் மைய விலக்கப் பெருக்கல்களின் மொத்தத்தைவிட அதிகமானுல் கூட்டுச் சராசரியின் வலப் பக்கம் அதிக எண்ணிக்கையில் உறுப்புக்களிருக்கின்றன என் றும், அப்பரவல் நேர் கோட்டத்துடன் அமைந்துள்ள தென்றும் கொள்ளலாம். ஆனுல், கூட்டுச் சராசரிக்கு வலப்பக்க முள்ள உறுப்புக்களின் மைய விலக்கப் பெருக்கல்களின் மொத்தத்துக் கும், இடப்பக்கமுள்ள உறுப்புக்களின் மைய விலக்கப் பெருக் கல் மொத்தத்துக்கு முள்ள வித்தியாசம் நேரடையாள முள்ளதா அல்லது எதிரடையாளமுள்ளதா என்பதை μ_1, μ_3, μ_5, ...ஆகியவற்றிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம். ஆனுல் $\mu_1 = 0$ என்பதால் μ_3 என்பது ஒரு பரவலின் கோட்டத்தை அள விடப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ என்பதை α_3 என்று குறிப் பிட்டால் $(\alpha_3)^{1/3}$ என்பது மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியின் அடிப்படையில் அமையப் பெற்ற கோட்டக் கெழு ஆகும். அதாவது,

$$\alpha_3{}^{1/3} = \frac{\mu_3{}^{1/3}}{\sigma}$$

என்பது மூன்றும் படி மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியின் அடிப்படையிலமையப் பெற்ற கோட்டக் கெழு ஆகும்.

மாதிரி 75 :

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் பின்வருமாறு.

$$\mu_1{}^1 = 0.36,\ \mu_2{}^1 = 24.3,\ \mu_3{}^1 = 37.26.$$

இவை 11 என்ற ஏதாமொரு ஆதியிலிருந்து கணக்கிடப் பட்டன. இப்பரவலின் (1) கூட்டுச் சராசரி, (2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும் இரண்டாம் படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியும் மூன்றும் படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியும் காண்க. இந்த விவரங்கள் கொண்டு ஒரு கோட்டக் கெழு காண்க. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

தீர்வு :

இங்கு $\mu_1{}^1 = d = 0.36,\ A = 11.$

$\bar{x} - A = d$

$\therefore\ \bar{x} - 11 = 0.36$

(1) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 11.36.$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_2{}^1 - d^2\\ &= 24.3 - (0.36)^2\\ &= 24.3 - 0.1296\\ &= 24.1704.\end{aligned}$$

(2) கூட்டுச் சராசரி ஆதிகொண்ட இரண்டாம் படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி $= 24.1704.$

$$\therefore\ \sigma = \sqrt{24.1704} = 4.91$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \mu^1{}_3 - 3d\,\mu_2{}^1 + 2d^3\\ &= 37.26 - 3\,(0.36)\,(24.3) + 2\,(0.36)^3\\ &= 37.26 - 26.244 + 0.0467\\ &= 11.0627.\end{aligned}$$

கூட்டுச் சராசரி ஆதிகொண்ட மூன்றும்படி விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி $= 11.0627.$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_3} = \frac{11.0627}{(4.91)^3} = \frac{11.0627}{118.37} = 0.093.$$

$$\therefore\ \alpha_3{}^{1/3} = (0.093)^{1/3}$$

$$\log \alpha_3{}^{1/3} = \frac{1}{3}\log(0.093)$$

$$= \frac{1}{3} (\bar{2}.96848)$$

$$= \frac{1}{3}(\bar{3} + 1.96848)$$

$$= \bar{1}.65616$$

$$\therefore \quad \alpha_3{}^{1/3} = \text{antilog } \bar{1}.6516 = 0.4531.$$

மூன்றும்படி மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியின் அடிப்படையிலமைந்த கோட்டக் கெழு $\alpha_3{}^{1/3} = 0.4531$ (நேரடையாளம்) ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் நேர் கோட்டப் பரவல்.

பியர்சனின் β, γ-கெழுக்கல் **(Pearson's β and γ coefficients)**

மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளின் அடிப்படையில் அமையப் பெற்ற கீழ்க்காணும் புள்ளியியல் மாறிலிகள் புள்ளியியல் கணக்கீடுகளில் குறிப்பிடத்தக்க முக்கியத்துவம் பெற்ற கெழுக்களாகக் கருதப்படுகின்றன.

$$(1) \quad \beta_1 = \frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3} \quad , \qquad (2) \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} \quad ,$$

$$(3) \quad \gamma_1 = + \sqrt{\beta_1} \quad , \qquad (4) \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3.$$

இவையாவும் அலகுகள் நீக்கப் பெற்ற மாறிலிகளாகும். β_1, β_2 ஆகியவை பியர்சனின் β கெழுக்களென்றும், γ_1, γ_2 ஆகியவை பியர்சனின் γ கெழுக்களென்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஆனால்,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_3} \quad , \quad \mu_2 = \sigma^2$$

என்று அறிவோம். ஆகவே,

$$\beta_1 = \frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3} = \frac{\mu_3{}^2}{\sigma^6}$$

$$\therefore \quad \gamma_1 = + \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \alpha_3.$$

மாதிரி 76:

இந்திய கடற்படையில் சேருவதற்காக மனுச் செய்த 225 பேர்களின் எடைகள் பற்றிய பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியின் அடிப்படையில் அப் பரவலின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

எடை (ராத்தல்கள்)	நிகழ்வெண்
80 — 85	7
85 — 90	31
90 — 95	42
95 — 100	54
100 — 105	33
105 — 110	24
110 — 115	22
115 — 120	8
120 — 125	4

தீர்வு :

எடை x	நிகழ்வெண் f	$d = \left(\frac{x-102.5}{5}\right)$	fd	fd^2	fd^3
82.5	7	—4	—28	112	—448
87.5	31	—3	—93	279	—837
92.5	42	—2	—84	168	—336
97.5	54	—1	—54	54	— 54
102.5	33	0	0	0	0
107.5	24	1	24	24	24
112.5	22	2	44	88	176
117.5	8	3	24	72	216
122.5	4	4	16	64	256
மொத்தம்	225		—151	861	—1003

இங்கு விலக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் $c = 5$ ஆல் வகுக்கப் பட்டிருப்பதால் விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளைப் பின்வருமாறு கணக்கிட வேண்டும்.

$$\mu_1^1 = c.\ \frac{1}{N}\ \Sigma\ fd = 5\left(\frac{-151}{225}\right) = 5\ (-0.67) = d.$$

$$\mu_2^1 = c^2.\ \frac{1}{N}\ \Sigma\ fd^2 = 25\ \left(\frac{861}{225}\right) = 25\ (3.82)$$

$$\mu_3^1 = c^3.\ \frac{1}{N}\ \Sigma\ fd^3 = 125\ \left(\frac{-1003}{225}\right) = 125\ (-4.45)$$

$$\mu_2 = \mu_2^1 - d^2 = 25\ (3.82) - 25\ (-0.67)^2$$
$$= 25\ [3.82 - 0.45]$$
$$= 25\ (3.37) = \sigma^2.$$

$$\mu_3 = \mu_3^1 - 3d\ \mu_2^1 + 2d^3.$$
$$= 125\ (-4.45) - 3 \times 5\ (-0.67) \times 25\ (3.82)$$
$$+ 2 \times 125\ (-0.67)^3$$
$$= 125\ [-4.45 + 7.68 + 2\ (-0.300)\ ]$$
$$= 125\ [3.23 - 0.6]$$
$$= 125\ (2.63)$$

$$\therefore\ \ \mu_3^{1/3} = 5\ (2.63)^{1/3} = 5 \times 1.3804$$
$$\sigma^2 = 25\ (3{,}37)$$
$$\therefore\ \ \sigma = 5\ \sqrt{3.37} = 5 \times 1.836.$$

$$\therefore\ \ \text{கோட்டக் கெழு} = \frac{\mu_3^{1/3}}{\sigma} = \frac{5 \times 1.3804}{5 \times 1.836} = 0.75.$$

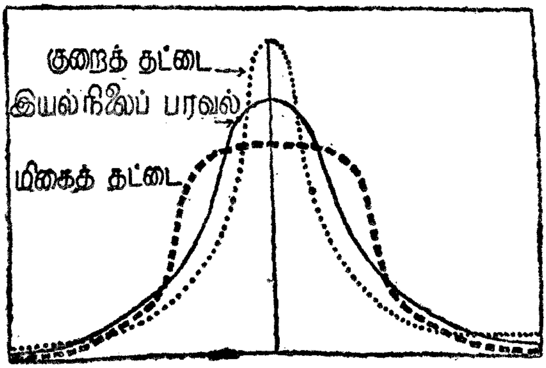
தட்டையளவுகள் (Measures of kurtosis) :

ஒரு பரவலின் முகட்டளவைச் சுற்றிலும் பரவிக்கிடக்கின்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைக் கேற்ப அப்பரவலின் வளைவு தட்டையான உச்சியுடன் அல்லது முனையுள்ள உச்சியுடன் அமைந்திருக்கும். முகட்டளவைச் சுற்றி ஏராளமான உறுப்புக் கள் குவிந்து கிடந்தால் வளைவின் உச்சி தட்டையாகவும், ஒரு சில உறுப்புக்களே முகட்டளவைச் சுற்றி அமைந்திருந்தால் வளைவின் உச்சி கூர்மையான முனையுடனும் இருக்கும். இவ் வாறு ஒரு பரவலுக்குரிய வளைவின் உச்சியைப் பற்றிய தட்டைத் தன்மையை அளவிடுகின்ற அளவுகளுக்குத் 'தட்டை யளவுகள்' என்று பெயர். ஆனால், கிடையச்சின் அளவு

கோலைச் சுருக்கி அல்லது நீட்டி ஒரு பரவலின் வளைவை தட்டையுச்சியுடையதாகவோ அல்லது முனையுச்சியுடைய தாகவோ மாற்ற முடியும். ஆகவே, ஒரு நிகழ்வெண் வரையின் உச்சி தட்டையாகயிருக்கிறதா அல்லது முனையுள்ளதாகயிருக் கிறதா என்பது ஓர் இயல்நிலைப் பிழைவளை கோட்டின் (normal curve of error) — இவ்வளைவு பற்றிப் பின்னால் ஒரு அத்தியாயத் தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது) உச்சியுடன் ஒப்பிட்டு அளவிடப் படுகிறது. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலுக்கு $\beta_2 = 3$ என்று நிறுவப் பட்டிருக்கிறது. ஆகவே, ஒரு பரவலுக்கு β_2 இன் மதிப்பு 3-ஐ விட அதிகமாகயிருந்தால் அப்பரவலின் வளைவு இயல்நிலைப் பிழை வளை கோட்டை விட அதிகக் கூர்மையான முனையுடன் காணப்படும். இத்தகைய பரவல் இயல்நிலைப் பரவலைவிட குறைந்த அளவில் தட்டையாகயிருப்பதால் 'குறைத் தட்டைப் பரவல்' (lepto kurtic) என்றழைக்கப்படுகிறது. மாறாக, $\beta_2 < 3$ ஆகயிருந்தால் அப்பரவலின் வளைவு இயல்நிலைவரையை விட அதிக அளவில் தட்டையாக அமைந்திருக்குமாகையால் அப் பரவல் 'மிகைத் தட்டைப் பரவல்' (platy kurtic) என்றழைக்கப் படுகிறது $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ என்பது தட்டையளவுக் கெழு என்றழைக்கப் படுகிறது. β_2 என்பது α_4 என்றும் குறிக்கப்படுவதுண்டு. ஆகவே,

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \alpha_4$$

என்பது ஒரு பரவலின் தட்டையளவை அளவிடப் பயன்படும் தட்டையளவுக் கெழுவாகும்.



படம் 27.

பியர்சனின் β_2 கெழு பரவலின் எல்லா உறுப்புக்களையும் சார்ந்து அமைந்திருக்கிறது. ஆனால், ஒரு பரவலின் தட்டைத் தன்மை அதன் முகட்டளவைச் சுற்றியுள்ள உறுப்புக்களை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும். ஆகையால், β_2 தட்டைக் கெழுவை ஒரு திருப்திகரமான தட்டையளவாகக் கொள்ள முடியாது. எனவே, ஒரு பரவலின் தட்டைத் தன்மையை அளவிட நூற்றுமங்களையும், கால்மங்களையும் கொண்டு அமையப் பெற்ற பின் வரும் 'நூற்றுமத் தட்டையளவு' பயன்படுகிறது.

***நூற்றுமத் தட்டையளவு* (Percentile measure of kurtosis) :**

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் 90 ஆவது நூற்றுமத்திற்கும் 10 ஆவது நூற்றுமத்திற்குமுள்ள வித்தியாசம் 'நூற்றும இடைவெளி' (percentile range) என்றழைக்கப்படுகிறது. இந்நூற்றும இடைவெளியைக் கால்ம விலக்கத்தால் வகுத்து நூற்றுமத் தட்டையளவைப் பெறலாம்.

$$\text{நூற்றுமத் தட்டையளவு} = \frac{\text{நூற்றும இடைவெளி}}{\text{கால்ம விலக்கம்}}$$

$$= \frac{\text{நூ}_{90} - \text{நூ}_{10}}{\left(\frac{\text{கா}_3 - \text{கா}_1}{2}\right)}$$

$$= \frac{P_{90} - P_{10}}{\left(\frac{Q_1 - Q_3}{2}\right)}$$

ஒரு இயல் நிலைப் பரவலுக்கு நூற்றுமத் தட்டையளவின் மதிப்பு 3.8 என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, ஒரு பரவலுக்கு, நூற்றுமத் தட்டையளவின் மதிப்பு 3.8–ஐ விட அதிகமாகயிருந்தால் அது குறைத் தட்டைப் பரவலென்றும், 3.8 ஐ விட குறைவாகயிருந்தால் அது மிகைத் தட்டைப் பரவலென்றும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

நூற்றுமத் தட்டையளவை எளிதாகக் கணக்கிட முடியும். அது முனையுறுப்புக்களைச் சார்ந்து அமையவில்லையாகையால் இயல்புக்குப் புறம்பான முனையுறுப்புக்களால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

மாதிரி 77 :

பின்வரும் பரவலுக்கு ஒரு தட்டையளவு காண்க.

மாதவாடகை (ரூபாயில்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
10 — 20	2
20 — 30	1
30 — 40	2
40 — 50	6
50 — 60	16
60 — 70	27
70 — 80	16
80 — 90	7
90 — 100	3
100 — 110	1
110 — 120	1

தீர்வு :

வாடகை x	நி. f	$d = \left(\frac{x-65}{10}\right)$	fd	fd^2	fd^3	fd^4
15	2	−5	−10	50	−250	1250
25	1	−4	−4	16	−64	256
35	2	−3	−6	18	−54	162
45	6	−2	−12	24	−48	96
55	16	−1	−16	16	−16	16
65	27	0	0	0	0	0
75	16	1	16	16	16	16
85	7	2	14	28	56	112
95	3	3	9	27	81	243
105	1	4	4	16	64	256
115	1	5	5	25	125	625
மொத்தம்	82		0	236	−90	3032

$$\mu_1^{1} = c\,\frac{1}{N}\,\Sigma f d = 0$$

$$\mu_2^{1} = c^2\,\frac{1}{N}\,\Sigma f d^2 = 10^2\left(\frac{236}{82}\right) = 10^2\,(2.878)$$

$$= 287.8$$

$$\mu_3^{1} = 10^3\,\frac{1}{N}\,\Sigma f d^3 = 1000\left(-\frac{90}{82}\right) = -1097$$

$$\mu_4^{1} = 10^4\,\frac{1}{N}\,\Sigma f d^4 = 10000\left(\frac{3032}{82}\right) = 369756$$

$$d = \mu_1^{1} = 0$$

$$\therefore\ \mu^2 = \mu_2^{1} - d^2 = 287.8 = \sigma^2$$

$$\mu^3 = \mu_3^{1} - 3\,d\,\mu_2^{1} + 2\,d^3 = \mu_3^{1} = -1097$$

$$\mu^4 = \mu_4^{1} - 4\,d\,\mu_3^{1} + 6\,d^2\,\mu_2^{1} - 3\,d^4 = \mu_4^{1} = 369756$$

பியர்சனின் β_2 தட்டைக் கெழு $= \beta_2 = \dfrac{\mu^4}{\mu_2^{\,2}} = \dfrac{369756}{(287.8)^2}$

$$= 4.46$$

$\beta_2 > 3$ ஆகயிருப்பதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் ஒரு குறைத் தட்டைப் பரவலென்று அறிகிறோம்.

நூற்றுமத் தட்டையளவு :

மேற்கண்ட பரவலின் நூற்றுமத் தட்டைக் கெழுவைக் காண $நூ_{90}$, $நூ_{10}$, $கா_3$, $கா_1$ ஆகியவற்றைக் காணவேண்டும்.

வாடகை (ரூபாய்)	நிகழ்வெண்	வ. நி
10 — 20	2	2
20 — 30	1	3
30 — 40	2	5
40 — 50	6	11
50 — 60	16	27
60 — 70	27	54

வாடகை ரூபாய்	நிகழ்வெண்	வ. நி.
70 — 80	16	70
80 — 90	7	77
90 — 100	3	80
100 — 110	1	81
110 — 120	1	82

$$N = 82 ;\ \frac{N}{4} = 20.5 ;\ \frac{3N}{4} = 61.5 ;\ 10\ \frac{N}{100} = 8.2 ;$$

$$90\frac{N}{100} = 73.8$$

$$கா_1 = l+\frac{c}{f}\left(\frac{N}{4} - m\right) = 50+\frac{10}{16}(20.5-11) = 50$$

$$+\frac{95}{16} = 50+5.94$$

$$= 55.94$$

$$கா_3 = l+\frac{c}{f}\left(\frac{3N}{4} - m\right) = 70+\frac{10}{16}(61.5-54) = 70$$

$$+\frac{75}{16}\ 70+4.69$$

$$= 74.69$$

$$ப_{10} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{10N}{100} - m\right) = 40+\frac{10}{6}(8.2-5) = 40$$

$$+\frac{32}{6} = 40+5.33$$

$$= 45.33$$

$$ப_{90} = l+\frac{c}{f}\left(\frac{90N}{100} - m\right) = 80+\frac{10}{7}(73.8-70) = 80$$

$$+\frac{38}{7} = 80+5.43$$

$$= 85.43$$

நூற்றும இடைவெளி $=$ நூ$_{90}$ $-$ நூ$_{10}$ $= 85.43 - 45.33$

$= 40.10$

கால்ம விலக்கம் $= \dfrac{\text{கா}_3 - \text{கா}_1}{2} = \dfrac{74.69 - 55.94}{2}$

$= \dfrac{18.75}{2}$

$= 9.375$

$\therefore$ நூற்றுமத் தட்டைக் கெழு $= \dfrac{\text{நூற்றும இடைவெளி}}{\text{கால்ம விலக்கம்}}$

$= \dfrac{40.10}{9.375}$ 4.27

நூற்றுமத் தட்டைக் கெழு 3.8ஐ விட அதிகமாயிருப்பதால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் ஒரு குறைந்த தட்டைப் பரவல் என்று அறியப்படுகிறது.

வினாத்தாள் 8.

(1) ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் கோட்டம் என்பதன் பொருளை விளக்குக.

(சென்னை, பி.காம். 1967 ஏப்.)

(2) கோட்டம் என்பதன் மூலம் அறியப்படுவது யாது? அது எவ்வாறு அளவிடப்படுகிறது?

(சென்னை பி.காம். 1966 செப்.)

(3) ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் கோட்டம் என்றால் என்ன பொருள்? அதை அளவிடக் கூடிய இரண்டு கெழுக்களைக் கூறுக. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(4) பல்வேறு கோட்ட அளவுகளைத் தெளிவாக விளக்குக.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்)

(5) ஒரு பரவலின் கோட்டம் என்பது குறித்து ஒரு குறிப்பு வரைக. அதை அளவிடுகின்ற சில அளவைகளை ஒப்பிடுக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965, ஏப்.)

(6) கோட்டம், பரவுகை ஆகியவற்றின் வேறுபாடுகளைக் கூறுக. இந்த அளவைகளின் நடைமுறைப் பயன்பாடுகள் யாவை? (சென்னை பி.காம். 1966 ஏப்.)

(7) (அ) ஓர் பரவலின் முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளை யாதானுமொரு குறிப்பிட்ட ஆதியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளின் வாயிலாக எழுதக் கூடிய கோவைகளை வருவிக்கவும்.

(ஆ) β_1, β_2 என்பன அலகு சார்பற்ற தனி எண்கள் எனக் காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(8) ஒரு பரவலின் β_1, β_2 ஆகிய மாறிகளை வரையறுக்கவும். அப்பரவலின் தொடர்பாக அவற்றின் முக்கியத்துவத்தை விளக்கவும். (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(9) (அ) குறிப்பிட்ட ஒரு ஆதியிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளைக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியைக் கணக்கிடக்கூடிய வாய்ப்பாட்டினைப் பெறுக.

(ஆ) கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் முதல் நான்கினைக் கொண்டு ஒரு பரவலின் பண்புகளை அளவிடக் கூடிய முறைகளைச் சுருக்கமாக விளக்கிக் கூறுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(10) μ என்பது கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிக்கும், γ என்பது பூச்சியத்தை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளுமானுல் பின்வரும் தொடர்புகளை நிறுவுக.

$$\mu_2 = \gamma_2 - x_{12}$$
$$\mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_1 \gamma_3 + 2\gamma_1^3$$
$$\mu_4 = \gamma_4 - 4\gamma_1 \gamma_3 + 6\gamma_1^2 \gamma_2 - 3\gamma_1^4$$

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

(11) சிறு குறிப்பு வரைக :

(அ) கோட்டம் (சென்னை பி. காம். 1960 ஏப்., 68 செப்.; பி. எஸ்ஸி. 67 ஏப். மதுரை பி.ஏ., பி. காம். 71 செப்.)

(ஆ) சீரான பரவல்கள்

(மதுரை பி. எஸ்ஸி 1971 செப்.)

(இ) காலம கோட்டக் கெழு

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(ஈ) தட்டையளவு (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1867 ஏப்.)

(உ) கோட்ட அளவுகளும் தட்டை அளவுகளும்

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

(ஊ) பரவல்களின் விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள்.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

பயிற்சி 8.

(1) பின்வரும் பரவலுக்கு ஏதாவது ஒரு கோட்ட அளவு காண்க.

ஒரு பெட்டியிலுள்ள முனையற்ற தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கை	...	0	1	2	3	4	5	6	7	மொத்தம்
பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	...	12	27	29	19	8	4	1	0	100

(சென்னை பி. காம். 1967 ஏப்.)

(2) பின்வரும் விவரங்களிலுருந்து பௌஸியின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பின் அளவு	...	8	12	16	20	24	28	32
நுகழ்வெண்	...	4	8	10	6	4	2	8

(3) பின்வரும் பரவலின் கால்மக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

கூலி ரூபாயில் ...	.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
வேலையாட்கள் ...	5	7	10	15	8	4

(4) பின்வரும் பரவலின் கால்மக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
10 — 20	3
20 — 30	7
30 — 40	20
40 — 50	30
50 — 60	15
60 — 70	10
70 — 80	7
80 — 90	5
90 — 100	3

(5) பின்வரும் பரவலுக்கு பியர்சனின் கோட்டக் கெழு காண்க.

எடை (ராத்தலில்)	நிகழ்வெண்
70 — 80	12
80 — 90	18
90 — 100	30
100 — 110	42
110 — 120	50
120 — 130	45
130 — 140	20
140 — 150	8

(6) பின்வரும் நிகழ்வெண்பரவலுக்கு ஏதாவது ஒரு கோட்டக் கெழு காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
35 — 40	2
40 — 45	14
45 — 50	24
50 — 55	30
55 — 60	15
மொத்தம்	85

(சென்னை பி. காம். 1968 ஏப்.)

(7) பின்வரும் பரவலுக்குப் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு காண்க.

வருமானம் (ரூபாய்)	நிகழ்வெண்
0 — 50	50
50 — 100	75
100 — 150	80
150 — 200	100
200 — 250	125
250 — 300	300
300 — 350	100
350 — 400	80
400 — 450	70
450 — 500	50

(8) பின்வரும் பரவலுக்குப் பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்	...	5	15	25	35	45	55	65	75
நிகழ்வெண்	...	10	40	20	0	10	40	16	14

(9) $x = 3$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் முறையே 2, 10, —30. $x = 0$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளையும், μ_2, β_1 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களையும் பெறுக.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(10) $x = 4$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் 1, 4, 10, 45. கூட்டுச் சராசரி 5, விலக்க வர்க்கச் சராசரி 3, μ_3, μ_4 முறையே 0, 26 என்று காட்டுக. (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

(11) 25 கல்லூரி மாணவர்களின் எடைகள் பற்றிய விவரங்களிலிருந்து 51 கி. கிராமை ஆதியாகக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் வருமாறு :

$\mu_1{}^1 = -0.4$ கி.கி. ; $\sqrt{\mu_2{}^1} - 1.2$ கி.கி.; $(\mu_3{}^1)^{1/3} = -2.5$ கி.கி. கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், ஒரு கோட்ட அளவை ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கவும். (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(12) மாறியின் மதிப்பு 2ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் 1, 16, — 40. அதன் கூட்டுச் சராசரி 3, விலக்க வர்க்கச் சராசரி 15, $\mu_3 = -86$, என்றும், $x = 0$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் 3, 24, 76 என்று காட்டுக.

(13) ஒரு பரவலின் மாறியின் மதிப்பு 5ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் 2, 20, 40, 50. கூட்டுச் சராசரி 7, விலக்க வர்க்கச் சராசரி 16, $\mu_3 = -64$, $\mu_4 = 162$ என்று காட்டுக.

(14) பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட மிதல் நான்கு விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளையும், β_1, β_2, ஆகியவற்றையும் கணக்கிடுக.

x ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f ...	1	6	13	25	30	22	9	5	2

(15) ஒரு பரவலில் $x = 4$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகள் —1.5, 17, —30, 108;

β_1, β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு அந்தப் பரவல் குறைத் தட்டையானதா மிகைத் தட்டையானதா என்று கூறுக.

(16) பின்வரும் பரவலுக்கு நூற்றுமத் தட்டையளவைக் கணக்கிடுக.

மாறி ...	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
நிகழ்வெண் ...	2	5	7	13	21	16	8	3

(17) பின்வரும் பரவலுக்கு மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரிகளின் அடிப்படையில் தட்டையளவைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி ...	0-10	10-20	20-30	30-40
நிகழ்வெண் ...	1	3	4	2

8. ஒட்டுறவு

(CORRELATION)

நாம் இதுவரை ஒற்றை அளவின மாறிப் புள்ளி விவரத் தொடர்களின் தன்மைகளைப் பற்றி விரிவாக ஆராய்ந்தோம். ஆனால் ஒற்றை மாறிப் புள்ளி விவரத் தொடர்களின் தன்மைகளை ஆராய்தல் மட்டுமே புள்ளிவிவர ஆய்வாளரின் நோக்கமாகாது. அந்த மாறியின் தன்மைகளுக்கும், அசைவுகளுக்குமுரிய காரணங்களை ஆராய்ந்தறிவது தலையாய நோக்கங்களுள் ஒன்றாகும். ஒரு மாறியின் தன்மைகளும் அசைவுகளும் அதனுடன் தொடர்புடைய வேறு சில மாறிகளின் தன்மைகளையும், அசைவுகளையும் சார்ந்து இருக்கலாம். ஆகவே, இத்தகைய மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளின் தன்மைகளைப் பற்றி அறிந்துகொண்டாலன்றி அந்த மாறியின் தன்மைகளைப் பற்றியும், அசைவுகளைப் பற்றியும் முழுமையாகத் தெரிந்து கொள்ள முடியாது. இரு அளவின மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பின் தன்மைகளைப் பற்றி ஈண்டு ஆராய்வோம்.

நம் அன்றாட வாழ்வில் பலதிறப்பட்ட மாறிகள் ஒன்றோடொன்று ஏதாவதொரு வகையில் தொடர்பு கொண்டிருப்பதைக் காண்கிறோம். உதாரணமாக, உணவுப் பொருட்களின் உற்பத்தியும், விலைவாசியும் தொடர்பு கொண்டிருப்பதை நாமறிவோம். இதுபோல், பொருளாதாரத் துறையில் அளிப்பு, தேவை என்ற இரு மாறிகளும், தொழில்துறையில் விளம்பரம், விற்பனை என்ற இரு மாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு கொண்டிருப்பதைக் காணலாம். மழைக் காலங்களில் ஏராளமான குடைகள் விற்பனையாவதும், கோடைக் காலங்களில் குளிர் பானங்களின் விற்பனை அதிகமாயிருப்பதும், விடுமுறைக் காலங்களிலும், உற்சவ காலங்களிலும், திருமண மாதங்களிலும் போக்குவரத்து அதிகமாயிருப்பதும் நாமறிந்ததே. இதிலிருந்து நாம் தெரிந்து கொள்ளுவதென்ன? ஒரு மாறியின்

மதிப்புக்களிலேற்படுகின்ற ஏற்ற இரக்கங்கள் இன்னொரு மாறியின் மதிப்புக்களிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களைச் சார்ந்திருக்கின்றன. ஒரு ஆண்டில் மழை நாட்களின் எண்ணிக்கை அதிகமானல் குடைகளின் விற்பனையும் அதிகமாகும் என்பது ஒரு குடைக் கடைக்காரருக்கு நன்ருகத் தெரியும். ஆகவே, மழை நாட்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாவதன் காரணமாக ஏற்படுகின்ற விளைவுதான் குடை விற்பனையின் அதிகரிப்பு. இங்கு, குடைகளின் விற்பனை மழை நாட்களின் எண்ணிக்கையைச் சார்ந்திருக்கிறது. ஆகவே, குடைகளின் விற்பனையைச் "சார்ந்த மாறி" அல்லது "சார்புடை மாறி" (dependent variable) என்றும், மழை நாட்களின் எண்ணிக்கையைச் சாரா மாறி (independent variable) என்றும் கூறலாம். இவ்விரு மாறிகளும் காரணம்—விளைவி என்ற தொடர்பின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அதாவது, "குடை விற்பனை" என்ற சார்ந்த மாறியில் ஏற்படுகின்ற "மாறுதல்கள்" என்ற "விளைவு"களுக்கு "மழை நாட்களின் எண்ணிக்கை" என்ற சாரா மாறியிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் காரணமாகின்றன. இதுபோல், உணவுப் பண்டங்களின் "உற்பத்தி" அதிகமானல், அப்பண்டங்களின் "விலைவாசி" குறையும். இங்கு உற்பத்திப் பெருக்கம் "காரண"மாகவும், விலைவாசி யிறக்கம் "விளைவாகவும்" இருக்கின்றன. இவ்வாறு இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற "காரண—விளைவுத் தொடர்பு" (cause and effect relationship) "ஒட்டுறவு" அல்லது "இடையுறவு" (correlation) என்றழைக்கப்படுகிறது.

ஒட்டுறவு கொண்டுள்ள இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே நிலவுகின்ற காரண—விளைவுத் தொடர்பை மூன்று வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) நேரடி (direct) காரண—விளைவுத் தொடர்பு.

(2) மறைமுகக் (indirect) காரண—விளைவுத் தொடர்பு.

(3) இருமுகக் (mutual) காரண—விளைவுத் தொடர்பு.

ஒரு ஆண்டில் பெய்கின்ற மழையின் அளவு அதிகமானல் உணவுப் பொருட்களின் உற்பத்தியும் அதிகமாகும். இங்கு மழையளவு அதிகரிப்பது காரணமாகவும், உற்பத்திப் பெருக்கம் விளைவாகவுமிருக்கின்றன. ஆகவே, "மழையளவு" என்ற மாறிக்கும், "உற்பத்தி" என்ற மாறிக்குமிடையே நேரடிக் காரண விளைவுத் தொடர்பு இருக்கிறதென்று கூறலாம். மேலும், உணவுப் பொருட்களின் "உற்பத்திப்" பெருக்கினல்

உணவுப் பொருட்களின் ''விலைவாசி'' குறையுமென்பது நாமறிந்ததே. ஆகவே, ''மழையளவு'' அதிகமானல் ''உற்பத்திப்'' பெருகி அதன் காரணமாக உணவுப் பண்டங்களின் ''விலைவாசி'' குறைவதைக் காண்கிறோம். அதாவது, ''மழையளவு'' என்ற மாறி, ''உற்பத்தி'' என்ற மாறியின் மூலமாக ''விலைவாசி'' என்ற மாறியிலேற்படுகின்ற விளைவுகளுக்குக் காரணமாகின்றது. ஆகவே, ''மழையளவு'' என்ற மாறியும் ''விலைவாசி'' என்ற மாறியும் மறைமுகக் காரண—விளைவுத் தொடர்பு கொண்டிருக்கின்றன என்று அறிகிறோம். ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் அதிகமானல் வட்டத்தின் பரப்பளவு அதிகமாவதும், வட்டத்தின் பரப்பளவு அதிகமானல் அதன் ஆரம் அதிகமாவதும் யாவரும் அறிந்ததே. இங்கு, ''ஆரம்'' என்ற மாறியிலேற்படுகின்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் ''பரப்பளவு'' என்ற மாறியிலேற்படுகின்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் என்ற விளைவுகளுக்குக் காரணமாகவும், ''பரப்பளவு'' என்ற மாறியிலேற்படுகின்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் ''ஆரம்'' என்ற மாறியிலேற்படுகின்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் என்ற விளைவுகளுக்குக் காரணமாகவு மிருக்கின்றன. அதாவது, ஆரம், பரப்பளவு என்ற இரு மாறிகளுள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதிலேற்படுகின்ற விளைவுகட்குக் காரணமாக யிருக்கின்றது. அதாவது, இவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற காரண—விளைவுத் தொடர்பு இரு முகமாகச் செயல்படுந்தன்மை பெற்றிருக்கிறது. இரு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகிற இத்தகைய காரண—விளைவுத் தொடர்பு ''இரு முகக் காரண விளைவுத் தொடர்பு'' என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இருக்கவேண்டுமானல் அவைகளுக்கிடையே ஏதாவதொரு வகையில் காரண—விளைவுத் தொடர்பு இருக்கவேண்டுமென்று அறிகிறோம்.

பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் மாறிகளுக்குடையேயுள்ள காரண—விளைவுத் தொடர்பு தெளிவாக யிருப்பதில்லை. ஒரு வேலைக்கு ஆட்களைத் தெரிவு செய்வதற்காக நடத்தப்படுகின்ற நேரடிப் போட்டித் தேர்வில் மனுதாரர்கள் பெறுகின்ற மதிப்பெண்களுக்கும், வேலைக்குத் தெரிவு செய்யப்பட்டவர்கள் வேலையில் காட்டுகின்ற திறமைக்கு மிடையே ஏதாவது காரண—விளைவுத் தொடர்பு இருக்கிறதா வென்பது தெளிவில்லாமலிருக்கிறது. ஏனெனில் நேரடிப் போட்டித் தேர்வில் குறைந்த மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் வேலையில் அதிகத் திறமையுள்ளவர்களாகவும், அதிக மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் திறமையற்றவர்களாகவு மிருப்பதுண்டு. சில சந்தர்ப்பங்

களில் ஒட்டுறவு இல்லாத இரு மாறிகள் அவைகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இருப்பது போன்று ஏற்ற விறக்கங்கள் கொண்டிருப்பது முண்டு. இந்தியாவில் பருத்திவிலை ஏறிக் கொண்டிருக்கிற அதே நேரத்தில் அமெரிக்காவில் இரும்பு விலை யேறிக் கொண்டிருக்கிறது. ஆகவே, இந்தியாவில் பருத்தி விலையின் ஏற்றம் தான் அமெரிக்காவில் இரும்பு விலை யேற்றத்திற்குக் காரணம் என்றோ அல்லது அமெரிக்காவில் இரும்பு விலையின் ஏற்றம் தான் இந்தியாவில் பருத்தி விலை யேற்றத்திற்குக் காரணம் என்றோ கூறமுடியுமா? இவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற தொடர்பு தற்செயலானது. இதுபோல், இந்தியாவில் கடந்த ஐந்தாண்டுகளில் வானொலிப் பெட்டி வைத்திருப்போரின் எண்ணிக்கை மிகவேகமாக ஏறியிருக்கிறது. அதே ஐந்தாண்டுகளில் இந்தியாவில் காது கேளாதோரின் எண்ணிக்கையும் ஏறியிருக்கிறது. ஆகவே, வானொலி கேட்கும் பழக்கம் தான் காது கேளாமைக்குக் காரணம் என்று நிர்ணயிக்க முடியுமா? வானொலி கேட்கும் பழக்கத்திற்கும், காது கேளாமைக்கு மிடையே காணப்படுகின்ற தொடர்பு மிகவும் தற்செயலானது. இவ்வாறு இரு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற தற்செயல் தொடர்பை (casual relationship) ஒட்டுறவு என்று கூறுவது பொருளற்றதாகும். எனவே, இத்தகைய தொடர்புகள் ''பொருளில்லா ஒட்டுறவுகள்'' (nonsense correlations) என்றழைக்கப்படுகின்றன.

போலி ஒட்டுறவு (Spurious correlations):

x, y என்ற இரு மாறிகளைக் கருதுக. இவ்விரு மாறிகளின் ஒத்த மதிப்புக்களை z என்ற இன்னொரு மாறியின் ஒத்த மதிப்புக்களால் வகுக்கவும். இப்பொழுது, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ என்ற இரு விகிதத் தொடர்கள் கிடைக்கின்றன. இவ்விரு விகிதத் தொடர்களுக்குமிடையே ஒட்டுறவு இருப்பதாகக் கொள்வோம். இதிலிருந்து x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இருப்பதாகக் கொள்ளக் கூடாது. ஏனெனில் x, y ஆகிய மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இருந்தாலும் அந்த ஒட்டுறவு $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவினின்றும் முற்றிலும் மாறுபட்டதாகயிருக்கும். ஆனால், $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒட்டுறவு இருந்தால் x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒட்டுறவு இருப்பது

போன்று தோன்றும். ஆகவே, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு 'போலி ஒட்டுறவு' (Spurious correlation) என்றழைக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரு மாறிகள் இன்னொரு மாறியாலேற்படுகின்ற விளைவுகளின் காரணமாக ஒட்டுறவுடனிருப்பது போன்று காணப்படலாம். இவ்வாறு தோன்றுகின்ற ஒட்டுறவுக்குப் 'போலி ஒட்டுறவு' என்று பெயர்.

தொடர் ஒட்டுறவு (Serial correlation)

பொருளாதாரக் காலம்சார் தொடர் வரிசைகளிலுள்ள மதிப்புக்கள் யாவும் அடுத்தடுத்த காலங்களில் கண்டறியப்படுகின்றன. இம்மதிப்புக்கள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சார்புடையவையாக யிருக்கும். உதாரணமாக ஒரு ஆண்டில் அரிசி விலையிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களை அளவிடும் பொருட்டு மாதந்தோறும் அரிசியின் விலை சேகரிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். இவ் விலைவாசித் தொடரிலுள்ள ஒவ்வொரு மாத அரிசி விலையும் அதற்கு முந்திய மாத அரிசி விலையைச் சார்ந்து இருப்பது இயல்பு. 1971 ஆம் ஆண்டில் சென்னை நகரில் ஒரு மூட்டை அரிசி விலை மாதவாரியாக

ரூ. 120, 115, 100, 102, 110, 118, 122, 115, 110, 123, 128, 130

என்று கொள்க. இம்மதிப்புக்களை அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புக்களைச் சோடி மதிப்புக்களாகக் கொண்ட பல பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(120, 115), (115, 100), (100, 102), (102, 110), (110, 118), (118, 122), (122, 115), (115, 110), (110, 123), (123, 128), (128, 130).

இவ்வடைப்புக்களுக்குள்ளிருக்கும் முதல் மதிப்புக்களாகிய 120, 115, 100, 102,......ஆகியவற்றை x என்ற மாறியின் மதிப்புக்களாகவும், இரண்டாவது மதிப்புக்களாகிய 115, 100, 102, 110......ஆகியவற்றை x என்ற மாறியின் மதிப்புக்களாகவும், இரண்டாவது மதிப்புக்களாகிய 115, 100, 102, 110,...... ஆகியவற்றை y என்ற மற்றொரு மாறியின் மதிப்புக்களாகவும் கருதுக. x, y என்ற இவ்விரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக்குத் 'தொடர் ஒட்டுறவு' (Serial correlation) என்று பெயர்.

தனி ஒட்டுறவு, பகுதி ஒட்டுறவு, பலதர ஒட்டுறவு (Simple correlation, Partial correlation, Multiple correlation) :

இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற ஒட்டுறவுக்குத் தனி ஒட்டுறவு (Simple correlation) என்று பெயர். இரண்டு மாறிகள் ஒரு பொதுவான மூன்றாவது மாறியின் மூலம் மறைமுகமான ஒட்டுறவு கொண்டிருந்தால் அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புக்குப் 'பகுதி ஒட்டுறவு' (Partial correlation) என்று பெயர். 'மழையளவு' என்ற மாறியும் உணவுப் பண்டங்களின் 'விலைவாசி' என்ற மாறியும் உணவுப் பண்டங்களின் 'உற்பத்தி' என்ற மூன்றாவது மாறியின் மூலம் ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன. ஆகவே, மழையளவுக்கும், விலைவாசிக்குமிடையே நேரடித் தொடர்பில்லாவிடினும், அவ்விரு மாறிகளுக்குமிடையே காணப்படுகின்ற ஒட்டுறவு 'பகுதி ஒட்டுறவு' (partial correlation) என்றழைக்கப்படுகிறது. இது போன்று, 'மழையளவு', 'உற்பத்தி', 'விலைவாசி' ஆகிய ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புள்ள மூன்று மாறிகளுள் ஏதாவது இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புக்குப் 'பகுதி ஒட்டுறவு' என்று பெயர், சில சமயங்களில், ஒரு மாறியில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் பல மாறிகளின் ஏற்ற விறக்கங்களைச் சார்ந்த விளைவுகளாகவும் இருப்பதுண்டு. உதாரணமாக, வீடுகள் அலுவலகங்கள் ஆகியவற்றிற்காகப் பயன்படுகின்ற மேசை, நாற்காலி, அலமாரி போன்ற தளவாடச் சாமான்களின் விற்பனை புதிதாகக் கட்டப்படுகின்ற வீடுகள், அலுவகங்கள் ஆகியவற்றையும், தளவாடச் சாமான்களின் விற்பனை புதிதாகக் கட்டப்படுகின்ற வீடுகள், அலுவகங்கள் ஆகியவற்றையும், தளவாடச் சாமான்களின் விலைகளையும், மக்களின் வருமானங்களையும் சார்ந்திருக்கும். அதாவது, தளவாடச் சாமான் விற்பனை யென்ற சார்புடை மாறி, புதுக் கட்டிடங்கள், தளவாடச் சாமான்களின் விலைவாசி, வருமானம் ஆகிய சாரா மாறிகளைச் சார்ந்திருக்கும். ஆகவே, விற்பனை யென்ற சார்புடை மாறியின் மாறுபாடுகளை அளவிடும்போது ஏனைய சாரா மாறிகளால் சார்புடை மாறியிலேற்படுகின்ற விளைவுகளையும் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு, தளவாடச் சாமான்களின் விற்பனை யென்ற சார்புடை மாறியின் அசைவுகளுக்கும், மற்ற சாரா மாறிகளில் காணப்படுகின்ற மொத்த அசைவுகளுக்கு மிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக்குப் "பலதரப்பட்ட ஒட்டுறவு" (multiple correlation) என்று பெயர்.

ஒட்டுறவின் தன்மைகள் :

ஒட்டுறவுடைய இரு மாறிகளுள் ஒரு மாறியின் மதிப்பு ஏறும்போது (இறங்கும் போது) இரண்டாவது மாறியின் மதிப்பும் ஏறினுல் (இறங்கினுல்) அவற்றிற்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக்கு "நேரிடை ஒட்டுறவு" (direct or positive correlation) என்று பெயர். மாருக, ஒரு மாறியின் மதிப்பு ஏறும்போது (இறங்கும்போது) இரண்டாவது மாறியின் மதிப்பு இறங்கினுல் (ஏறினுல்) அவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக்கு "எதிரிடை ஒட்டுறவு" (inverse or negative correlation) என்று பெயர். ஒரு மாறியிலேற்படுகின்ற மாறுபாட்டின் அளவுக்கும் இரண்டாவது மாறியிலேற்படுகின்ற மாறுபாட்டின் அளவுக்குமிடையே யுள்ள விகிதம் மாறிலியாக யிருப்பின் அவற்றிற்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக்கு "நேர்கோட்டு ஒட்டுறவு" (linear correlation) என்று பெயர்; அவ்விகிதம் மாறிலியாக யில்லாவிடில் அவற்றிற்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக்கு "வளை கோட்டு ஒட்டுறவு" (curvilinear correlation) என்று பெயர். நேர்கோட்டு ஒட்டுறவு, வளை கோட்டு ஒட்டுறவு ஆகிய இரண்டும் நேரிடையாகவு மிருக்கலாம்; எதிரிடையாகவு மிருக்கலாம்.

ஒட்டுறவை அளவிடல் :

இரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை "ஒட்டுறவுக் கெழு" (correlation coefficient) வின் மூலம் அளவிடலாம். இவ்வொட்டுறவு கெழு "r" என்று குறிக்கப் படுகின்றது. r-இன் மதிப்பு நேரெண்ணுக யிருந்தால் மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு இருப்பதாகவும், எதிரெண்ணுக யிருந்தால் எதிரிடை ஒட்டுறவு இருப்பதாகவும் கொள்ளவேண்டும். r-இன் மதிப்புப் பூச்சியமானுல் இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லையென்று பொருள் கொள்ளவேண்டும். அதாவது இரு மாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாகும்.

பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு
(Pearson's coefficient of correlation)

(அ) *தொகுக்கப்படா விவரங்கள்* (ungrouped data)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_N, y_N)$ என்பன ஒட்டுறவுள்ள x, y என்ற இரு மாறிகளின் N ஒத்த மதிப்புக்களெனவும், $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பன அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளெனவும் கொள்க. $(x-\bar{x})$ என்பது $\bar{x}$-இலிருந்து மாறி x இன் மாறுபாட்டையும், $(y-\bar{y})$ என்பது $\bar{y}$-இலிருந்து மாறி y இன் மாறுபாட்டையும் குறிக்கின்றன. ஆகவே, $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ என்பது x, y ஆகிய மாறிகளின்

உடன் மாறுபாட்டைக் (covariation) குறிக்கும். அதாவது, $(x_1-\bar{x})$ $(y_1-\bar{y})$, $(x_2-\bar{x})$ $(y_2-\bar{y})$,......, (x_N-x) $(y_N-\bar{y})$ என்பன x, y ஆகியவற்றின் உடன் மாறுபாட்டு மதிப்புக்களாகும். $(x-\bar{x})$ இன் பெரிய நேரெண் மதிப்புக்களுக்குக் கொத்த $(y-\bar{y})$ மதிப்புக்கள் பெரிய நேரெண் மதிப்புக்களாகவும், $(x-\bar{x})$ இன் பெரிய எதிரெண் மதிப்புக்களுக்குக் கொத்த $(y-\bar{y})$ இன் மதிப்புக்கள் பெரிய எதிரெண் மதிப்புக்களாகவு மிருந்தால் $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ என்ற பெருக்கற் பலன்கள் பெரிய நேரெண் மதிப்புக் களாகவேயிருக்கும். எனவே, $\frac{1}{N}$ Σ $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ என்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியும் (product moment) நேரெண் மதிப்புடனேயே யிருக்கும். ஆகவே, x, y ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு நேரிடையானதாக யிருக்கும். மாருக, $(x-\bar{x})$ இன் பெரிய நேரெண் மதிப்புக்களுக்குரிய $(y-\bar{y})$ இன் மதிப்புக்கள் பெரிய எதிரெண் மதிப்புக்களாகவும், $(x-\bar{x})$ இன் பெரிய எதிரெண் மதிப்புக்களுக்குரிய $(y-\bar{y})$ இன் மதிப்புக்கள் பெரிய நேரெண் மதிப்புக்களாகவு மிருந்தால் $\frac{1}{N}$ $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ இன் மதிப்பு எதிரெண்ணுகவே யிருக்கும். எனவே, x, y ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு எதிரிடையானதாக யிருக்கும். ஆகவே, $\frac{1}{N}$ Σ $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ என்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரியானது x, y ஆகிய மாறிகளுக் கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவை அளவிடப் பயன்படுகிறது. ஆனல், $(x-\bar{x})$, $(y-\bar{y})$ என்ற விலக்கங்கள் மாறிகளின் அலகு களிலேயே யிருக்குமாகையால், $(x-\bar{x})$, $(y-\bar{y})$ என்ற விலக்கங் களுக்குப் பதிலாக $\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)$, $\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)$ என்ற அலகுகள் நீக் கப் பெற்ற விலக்கங்களைக் கொண்டு அலகுகள் நீக்கப் பெற்ற ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடப் படுகிறது. அதாவது,

$$\text{ஒட்டுறவுக் கெழு} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right) \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

$\frac{1}{N}$ Σ $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ என்ற விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி பொது வாக P_{xy} என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. எனவே,

$$\text{ஒட்டுறவுக் கெழு } r = \frac{\frac{1}{N}\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{P_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

இச்சூத்திரம் "கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு" (Karl Pearson's correlation coeffi.ient) என்றழைக்கப்படுகின்றது.

பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மற்றொரு வடிவம் :

$$P_{xy} = \frac{1}{N}\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma (xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x}\bar{y})$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma xy - \bar{y}\frac{\Sigma x}{N} - \bar{x}\frac{\Sigma y}{N} + \frac{\Sigma \bar{x}\bar{y}}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma xy - \bar{y}.\bar{x} - \bar{x}\bar{y} + \frac{N\bar{x}\bar{y}}{N}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

மேலும், $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}$, $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - \bar{y}^2}{N}}$ என்றறிவோம்.

$$\therefore \quad r = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2\right]\left[\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2\right]}}$$

அலகு மாற்றம், ஆதி மாற்றம் ஆகியவற்றால் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு பாதிக்கப்படுவதில்லை.

r_{xy} என்பது x, y என்ற மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\frac{1}{N}\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

இப்பொழுது, x, y ஆகியவற்றின் ஆதிகளை x_0, y_0 ஆகியவற்றிற்கும், அலகுகளை $\frac{1}{c}$ மடங்குகளாகவும் மாற்றுக.

அதாவது, $u = \left(\frac{x-x_0}{c}\right)$, $\sim = \left(\frac{(y-y_0)}{c}\right)$ என்ற தொடர்புகளின் மூலம் x, y என்ற மாறிகளை u, v என்ற மாறிகளாக மாற்றுக.

இப்பொழுது, $x = cu + x_0$,

$$\therefore \quad \bar{x} = c\bar{u} + x_0.$$

ஆகவே, $(x-\bar{x}) = c\,(u-\bar{u})$

இதுபோல், $(y-\bar{y}) = c\,(\sim - \bar{v})$. ஆகும்.

மேலும், $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{c^2\,\Sigma\,(u-\bar{u}^2)}{N}}$

$$= c\sqrt{\frac{\Sigma\,(u-\bar{u})^2}{N}} = c\,\sigma_u.$$

இதுபோல், $\sigma_y = c\,\sigma\sim$. ஆகும்.

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\,\Sigma\,c\,(u-\bar{u})\,c\,(\sim - \approx)}{c\,\sigma_u . c\,\sigma\sim}$$

$$= \frac{c^2 . \frac{1}{N}\,\Sigma\,(u-\bar{u})\,(\sim - \approx)}{c^2\,\sigma_n\,\sigma\sim}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\,\Sigma\,(u-\bar{u})\,(\sim - \approx)}{\sigma_u\,\sigma\sim}$$

$$= r_u\sim.$$

எனவே, ஆதியையும் அலகையும் மாற்றுவதால் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு மாறாதென்றறிகிறோம். ஆகையால்,

$$r = \frac{\frac{\Sigma u \sim}{N} - \bar{u} \approx}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2\right]\left[\frac{\Sigma \sim^2}{N} - \approx^2\right]}}$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி ஒட்டுறவுக் கெழுவை மிகவும் எளிதாகக் கணக்கிடலாம்.

$r = +1$ என்றால் இரு மாறிகளுக்குமிடையே நேரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு (positive perfect correlation) $r = -1$ என்றால் இரு மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு (negative perfect correlation) இருப்பதாகவும், $r = 0$ என்றால் இரு மாறிகளும் சார்பற்றவை யென்றும் கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரி 78 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு x, y மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

x	8	6	5	10	9	8	7	6	8	5
y	7	8	4	9	9	6	8	5	5	7

தீர்வு :

x	y	xy	x^2	y^2
8	7	56	64	49
6	8	48	36	64
5	4	20	25	16
10	9	90	100	81
9	9	81	81	81
8	6	48	64	36
7	8	56	49	64
6	5	30	36	25
3	5	15	9	25
5	7	35	25	49
67	68	479	489	490

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{67}{10} = 6.7 ; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{68}{10} = 6.8.$$

$$\frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y} = \frac{479}{10} - (6.7)(7.8) = 47.9 - 45.56 = 2.34$$

$$\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{489}{10} - (6.7)^2 = 48.9 - 44.89 = 4.01$$

$$\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{490}{10} - (6.8)^2 = 49.0 - 46.24 = 2.76$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2\right]\left[\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2\right]}}$$

$$= \frac{2.34}{\sqrt{4.01 \times 2.76}} = 0.70$$

x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே சுமாரான நேரிடை ஒட்டுறவு இருக்கிறது.

மாதிரி 79:

பொருளாதாரத்திலும், புள்ளியியலிலும் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

புள்ளியியலில் மதிப்பெண்கள் ...	65	66	67	68	69	69	70	72
பொருளாதாரத்தில் மதிப்பெண்கள் ...	67	68	65	68	72	72	69	71

(மதுரை பி.காம். 1971 செப்.)

தீர்வு :

புள்ளியியல் மதிப்பெண்களை x எனவும், பொருளாதார மதிப்பெண்களை y எனவும் குறிப்பிடுக. இப்பொழுது,

$$u = (x-67), \quad \sim = (y-68)$$

என்ற தொடர்புகளின் மூலம் x, y-ஐ u, $\sim$ ஆக மாற்றி u, $\sim$ ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு அதையே x, y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவாகக் கொள்க.

x	y	$u=(x-67)$	$\sim=(y-68)$	$u\sim$	u^2	$\sim^2$
65	67	—2	—1	2	4	1
66	68	—1	0	0	1	0
67	65	0	—3	0	0	9
67	68	0	0	0	0	0
68	72	1	4	4	1	16
69	72	2	4	8	4	16
70	69	3	1	3	9	1
72	71	5	3	15	25	9
	மொத்தம்	8	8	32	44	52

$$\bar{u}=\frac{\Sigma u}{N}=\frac{8}{8}=1\,; \quad \bar{\sim}=\frac{\Sigma \sim}{N}=\frac{8}{8}=1$$

$$\frac{\Sigma u\sim}{N}-\bar{u}\,\bar{\sim}=\frac{32}{8}-(1)(1)=4-1=3$$

$$\frac{\Sigma \sim^2}{N}-\bar{u}^2=\frac{44}{8}-(1)^2=5.5-1=4.5$$

$$\frac{\Sigma \sim^2}{N}-\bar{\sim}^2=\frac{52}{8}-(1)^2=6.5-1=5.5$$

$$r=\frac{\dfrac{\Sigma u\sim}{N}-\bar{u}\,\bar{\sim}}{\sqrt{\left[\dfrac{\Sigma u^2}{N}-\bar{u}^2\right]\left[\dfrac{\Sigma \sim^2}{N}-\bar{\sim}^2\right]}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4.5\times 5.5}}=0.6$$

இரண்டு மாறிகளுக்குமிடையே சுமாரான நேரிடை ஒட்டுறவு இருக்கிறது.

மாதிரி 80 :

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கணித மதிப்பெண்(X)களுக்கும் புள்ளியியல் மதிப்பெண்(Y)களுக்குமிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

x	...	56	37	40	52	45	40	22	43	41	66
y	...	70	32	33	34	43	33	22	30	35	72

(மதுரை எம்.ஏ. 1971)

தீர்வு :

X	Y	$u=$ (X—40)	$\sim=$ (Y—35)	$u\sim$	u^2	$\sim^2$
56	70	16	35	560	256	1225
37	32	— 3	— 3	9	9	9
40	33	0	— 2	0	0	4
52	34	12	— 1	— 12	144	1
45	43	5	8	40	25	64
40	33	0	— 2	0	0	4
22	22	—18	—13	234	324	169
43	30	3	— 5	— 15	9	25
41	35	1	0	0	1	0
66	72	26	37	962	676	1369
மொத்தம்		42	54	1778	1444	2870

$$\bar{u} = \frac{\Sigma u}{N} = \frac{42}{10} = 4.2 \; ; \quad \bar{\sim} = \frac{\Sigma \sim}{N} = \frac{54}{10} = 5.4$$

$$\frac{\Sigma u \sim}{N} - \bar{u}\,\bar{\sim} = \frac{1778}{10} - (4.2)(5.4) = 177.8 - 22.68$$

$$= 155.12$$

$$\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{1444}{10} - (4.2)^2 = 144.4 - 17.64 = 126.76$$

$$\frac{\Sigma \sim^2}{N} - \bar{\approx}^2 = \frac{2870}{10} - (5.4)^2 = 287.0 - 29.16$$

$$= 257.84$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma u \sim}{N} - \bar{u}\,\bar{\approx}}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2\right]\left[\frac{\Sigma \sim^2}{N} - \bar{\approx}^2\right]}}$$

$$= \frac{155.12}{\sqrt{126.76 \times 257.84}}$$

$$= 0.84$$

X, Y மதிப்பெண்களுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க அளவில் நேரிடை ஒட்டுறவு காணப்படுகிறது.

மாதிரி 81:

ஒரு மாவட்டத்தில் சில ஆண்டுகளில் ஒரு பண்டத்தின் விலை (p) ஒரு கிலோ கிராமுக்கு ரூபாயிலும், இன்னொரு பண்டத்தின் விலை (q) ஒரு கிலோ கிராமுக்கு ரூபாயிலும் பின்வருமாறு:

ஆண்டு	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
p ...	13	23	12	10	23	29	31	33	39
q ...	18	25	22	14	24	26	29	27	32

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, இரு பண்டங்களின் விலைகளுக்குமிடையே ஏதாவது தொடர்பிருக்கின்றதா வென ஆராய்க.

(மதுரை எம்.ஏ., 1969)

தீர்வு :

ஆண்டு	p	q	$u=$ $(p-23)$	$v=$ $(q-26)$	uv	u^2	v^2
1957	13	18	−10	− 8	80	100	64
1958	23	25	0	− 1	0	0	1
1959	12	22	−11	− 4	44	121	16
1960	10	14	−13	−12	156	169	144
1961	23	24	0	− 2	0	0	4
1962	29	26	6	0	0	36	0
1963	31	29	8	3	24	64	9
1964	33	27	10	1	10	100	1
1965	39	32	16	6	96	256	36
மொத்தம்			6	−17	410	846	275

$$\bar{u} = \frac{\Sigma u}{N} = \frac{6}{9} = 0.67 \; ; \quad \approx = -\frac{17}{9} = -1.89$$

$$\frac{\Sigma u \sim}{N} - \bar{u} \approx = \frac{410}{9} - (0.67)(-1.89) = 45.5556 + 1.2663$$

$$= 46.8219$$

$$\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{846}{9}(0.67)^2 = 94 - 0.4489 = 93.5511$$

$$\frac{\Sigma \sim^2}{N} - \approx^2 = \frac{275}{9} - (-1.89)^2 = 30.5556 - 3.5721$$

$$= 26.9835$$

$$r = \frac{46.8219}{\sqrt{93.5511 \times 26.9835}} = 0.93$$

இரு பண்டங்களின் விலைகளுக்குமிடையே மிக அதிக அளவில் நேரிடை ஒட்டுறவு இருக்கிறது.

(ஆ) **தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்** (Grouped data) :

x, y ஆகிய மாறிகளின் சோடி மதிப்புக்கள் குறைந்த எண்ணிக்கையிலிருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட முறையில் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுவது எளிதாகயிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடி மதிப்புக்கள் அதிக எண்ணிக்கையிலிருந்தால் அவற்றை ஒரு இருமாறி நிகழ்வெண் பட்டியலில் அமைத்து, கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ள முறையைப் பின் பற்றி ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட வேண்டும். x-இன் மதிப்புக்களை ஒரு பொருத்தமான சம இடைவெளி கொண்ட சில பிரிவுகளாகவும், இதுபோல் y-இன் மதிப்புக்களையும் பொருத்தமான சம இடைவெளியுடன் கூடிய சில பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு சோடிப் பிரிவுக்குமுரிய நிகழ்வெண்ணை அதற்குரிய இடத்தில் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் படுகின்ற நிகழ்வெண் பட்டியலுக்கு ' இரு மாறி நிகழ்வெண் பட்டியல் ' (bivariate frequency table) அல்லது ' ஒட்டுறவுப் பட்டியல் ' (correlation table) என்று பெயர். இப்பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 82 :

30 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் (x), பொருளாதாரயியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் (y) கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களை ஒரு ஒட்டுறவுப் பட்டியலிலமைக்கவும்.

x ...	88	50	36	45	41	32	43	42	66	64
y ...	75	40	24	45	33	22	31	35	55	72
x ...	46	39	34	39	20	47	76	75	73	48
y ...	41	32	28	26	20	36	81	56	71	42
x ...	27	52	53	56	57	62	67	73	82	54
y ...	47	46	52	62	50	51	56	67	58	46

தீர்வு :

x / y	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	மொத்தம்
20-29	○ 1	○○○○ 4						5
30-39		○ 1	○○○○ 4					5
40-49	○ 1		○○○ 3	○○○ 3				7
50-59				○○ 2	○○○ 3	○ 1	○ 1	7
60-69				○ 1		○ 1		2
70-79					○ 1	○ 1	○ 1	3
80-89						○ 1		1
மொத்தம்	2	5	7	6	4	4	2	30

மாதிரி 83 :

பின்வரும் ஒட்டுறவுப் பட்டியலிலிருந்து வயதுக்கும், மதிப்பெண்ணுக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்	வயது (வருடங்களில்) 18	19	20	21	மொத்தம்
10 — 20	4	2	2		8
20 — 30	5	4	6	4	19
30 — 40	6	8	10	11	35
40 — 50	4	4	6	8	22
50 — 60		2	4	4	10
60 — 70		2	3	1	6
மொத்தம்	19	22	31	28	100

கணக்கீட்டு முறை :

வயது என்ற மாறியை x எனவும், மதிப்பெண் என்ற மாறியை y எனவும் கொண்டு அவைகளின் மைய மதிப்புக்களுடன் கூடிய ஒட்டுறவுப் பட்டியலை அமைத்துக் கொள்ளவும். இப்பட்டியலுடன் வலப்பக்கமாக மேலும் 5 நிரல்களும் (columns) கீழே மேலும் 3 நிரல்களும் (rows) சேர்த்துக்கொள்ளவும். ஒட்டுறவுப் பட்டியலை மாறி x இன் நிகழ்வெண் பட்டியலும், மாறி y இன் நிகழ்வெண் பட்டியலும் சேர்ந்த கூட்டு நிகழ்வெண் பட்டியலாகக் கருதலாம். ஆகவே, எட்டாவது நிரையில் காணப்படுகின்ற மொத்தங்கள் யாவும் வயது என்ற மாறி x இன் நிகழ்வெண்களாகும். இவற்றை f_x என்று குறிக்கவும். இதுபோல், ஆறாவது நிரலில் காணப்படுகின்ற மொத்தங்கள் யாவும் மதிப்பெண் என்ற மாறி y இன் நிகழ்வெண்களாகும். இவற்றை f_y என்று குறிக்கவும். மாறி x இன் ஏதாவது ஒரு மைய மதிப்பாகிய 19ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u = \left(\frac{x - 19}{1}\right)$ என்ற தொடர்பின் மூலம் மாறி xஐ u என்ற மாறியாக மாற்றி,

u-இன் மதிப்புக்களை ஒன்பதாவது நிரையில் எழுதி, 10-வது, 11-வது நிரைகளில் முறையே $f_x u$, $f_x u^2$ ஆகிய மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு எழுதவும். இதுபோல் y-இன் ஏதாவது ஒரு மைய மதிப்பாகிய 35ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $\sim = \left(\frac{y-35}{10}\right)$ என்ற தொடர்பின் மூலம் மாறி y ஐ $\sim$ என்ற மாறியாக மாற்றி, $\sim$ இன் மதிப்புக்களை ஏழாவது நிரலில் எழுதி, 8 வது, 9 வது நிரல்களில் முறையே $f_y \sim$, $f_y \sim^2$, ஆகிய மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு எழுதவும். இப்பொழுது ஒவ்வொரு சதுரக் கட்டத்திலுமுள்ள நிகழ்வெண்ணையும் அதே நிரலிலுள்ள u இன் மதிப்பால் பெருக்கி, பெருக்கற்பலனை அதே கட்டத்திற்குள் ஒரு சிறிய சதுரத்திற்குள் எழுதவும். உதாரணமாக, y இன் 15 என்ற மைய மதிப்புக்கு நேர் x இன் 18 என்ற மைய மதிப்புக்குக் கீழேயுள்ள 4 என்ற நிகழ்வெண்ணையும் அதே நிரலில் அதற்கு நேர் கீழேயுள்ள u இன் மதிப்பாகிய -1 ஆல் பெருக்கி, பெருக்கற் பலன் -4ஐ ஒரு சிறிய சதுரத்திற்குள் எழுத வேண்டும். இவ்வாறு எல்லாக் கட்டங்களிலும் எழுதிய பின்னர் ஒவ்வொரு நிரையிலுமுள்ள சிறிய சதுரங்களில் எழுதப்பட்டுள்ள பெருக்கற் பலன்களை கூட்டி, கூட்டுத் தொகையை அதே நிரையில் $f_{xy} u$ என்ற 10-வது நிரலில் எழுத வேண்டும். இவ்வாறு எல்லா நிரைகளிலுமுள்ள சிறிய சதுரங்களில் எழுதப்பட்டுள்ள பெருக்கற்பலன்களைக் கூட்டி அந்நிரைகளுக்கு நேர் 10-வது நிரலில் எழுதிய பின்னர் $f_{xy} u$-ஐயும் $\sim$-ஐயும் பெருக்கி, பெருக்கற் பலனை $f_{xy} u\sim$ என்ற இறுதி நிரலில் எழுதவும். இப்பொழுது $f_x u$, $f_x u^2$ ஆகிய நிரைகளின் மொத்தங்களாகிய $\Sigma f_x u$, $\Sigma f_x u^2$ ஐயும், $f_y \sim$, $f_y \sim^2$, $f_{xy} u\sim$ ஆகிய நிரல்களின் மொத்தங்களாகிய $\Sigma f_y\sim$, $\Sigma f_y\sim^2$, $\Sigma f_{xy} u\sim$ ஆகியவற்றையும் கணக்கிட வேண்டும். பின்னர்,

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_x u}{N}, \quad \bar{\sim} = \frac{\Sigma f_y \sim}{N}$$

என்ற சூத்திரங்களின் மூலம் $\bar{u}$, $\bar{\sim}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு,

$$r = \frac{\dfrac{\Sigma f_{xy} u\sim}{N} - \bar{u}\bar{\sim}}{\sqrt{\left[\dfrac{\Sigma f_x u^2}{N} - \bar{u}^2\right]\left[\dfrac{\Sigma f_y \sim^2}{N} - \bar{\sim}^2\right]}}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$y \backslash x$	18	19	20	21	f_y	$V=\left(\frac{y-35}{10}\right)$	f_yV	f_yV^2	$f_{xy}U$	$f_{xy}UV$
15	4 [-4]	2 [0]	2 [2]		8	-2	-16	32	-2	4
25	5 [-5]	4 [0]	6 [6]	4 [8]	19	-1	-19	19	9	-9
35	6 [-6]	8 [0]	10 [10]	11 [22]	35	0	0	0	26	0
45	4 [-4]	4 [0]	6 [6]	8 [16]	22	1	22	22	18	18
55		2 [0]	4 [4]	4 [8]	10	2	20	40	12	24
65		2 [0]	3 [3]	1 [2]	6	3	18	54	5	15
f_x	19	22	31	28	100		25	167		52
$U=\left(\frac{x-19}{1}\right)$	-1	0	1	2						
f_xU	-19	0	31	56	68					
f_xU^2	19	0	31	112	162					

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_x u}{N} = \frac{68}{100} = .68$$

$$\bar{\sim} = \frac{\Sigma f_y \sim}{N} = \frac{25}{100} = .25$$

$$\frac{\Sigma f_{xy}\, u \sim}{N} - \bar{u}\bar{\sim} = \frac{52}{100} - (.68)(.25) = 0.52 - 0.17 = 0.35$$

$$\frac{\Sigma f_x u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{162}{100} - (.68)^2 = 1.62 - 0.4624 = 1.1576$$

$$\frac{\Sigma f_y \sim^2}{N} - \bar{\sim}^2 = \frac{167}{100} - (.25)^2 = 1.67 - 0.0625 = 1.6075$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma f_{xy} u \sim}{N} - \bar{u} \approx}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma f_x u^2}{N} - \bar{u}^2\right]\left[\frac{\Sigma f_y \sim^2}{N} - \approx^2\right]}}$$

$$= \frac{0.35}{\sqrt{1.1576 \times 1.6075}}$$

$$= 0.26$$

வயதுக்கும், மதிப்பெண்ணுக்கு மிடையே ஒட்டுறவு இல்லை.

மாதிரி 84 :

கணவன்—மனைவியரின் வயது பற்றிய பின்வரும் ஒட்டுறவுப் பட்டியலிலிருந்து கணவன் வயதுக்கும் மனைவி வயதுக்குமிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

கணவன் வயது	மனைவி வயது 15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	மொத்தம்
15—25	1	1					2
25—35	2	12	1				15
35—45		4	10	1			15
45—55			3	6	1		10
55—65				2	4	2	8
65—75					1	2	3
மொத்தம்	3	17	14	9	6	4	53

தீர்வு :

மனைவி வயது x எனவும், கணவன் வயது y எனவும் கொள்க.

$$u = \left(\frac{x-37.5}{10}\right), \quad \sim = \left(\frac{y-37.5}{10}\right)$$ என்று மாற்றுக.

y \ x	17.5	27.5	37.5	47.5	57.5	67.5	f_y	$V=\frac{y-37.5}{10}$	f_yV	f_yV^2	$f_{xy}U$	$f_{xy}UV$
17.5	1 [-2]	1 [-1]					2	-2	-4	8	-3	6
27.5	2 [-4]	12 [-12]	1 [0]				15	-1	-15	15	-16	16
37.5		4 [-4]	10 [0]	1 [1]			15	0	0	0	-3	0
47.5			3 [0]	6 [6]	1 [2]		10	1	10	10	8	8
57.5				2 [2]	4 [8]	2 [6]	8	2	16	32	16	32
67.5					1 [2]	2 [6]	3	3	9	27	8	24
f_x	3	17	14	9	6	4	53		16	92		86
$U=\frac{x-37.5}{10}$	-2	-1	0	1	2	3						
f_xU	-6	-17	0	9	12	12	10					
f_xU^2	12	17	0	9	24	36	98					

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_x u}{N} = \frac{10}{53} = .14$$

$$\bar{\sim} = \frac{\Sigma f_y \sim}{N} = \frac{16}{53} = .3$$

$$\frac{\Sigma f_{xy} u \sim}{N} - \bar{u}\bar{\sim} = \frac{86}{53} - (.14)(.3) = 1.622 - 0.042 = 1.58$$

$$\frac{\Sigma f_x u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{98}{53} - (.14)^2 = 1.85 - 0.0196 = 1.8304$$

$$\frac{\Sigma f_y \sim^2}{N} - \bar{\sim}^2 = \frac{92}{53} - (.3)^2 = 1.736 - 0.09 = 1.646$$

$$\therefore \quad r = \frac{1.58}{\sqrt{1.8304 \times 1.646}} = 0.91$$

கணவன் வயதுக்கும், மனைவி வயதுக்குமிடையே அதிக அளவில் நேரிடை ஒட்டுறவு இருக்கிறது.

பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மற்றுமொரு அமைப்பு.

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\therefore \quad P = r \sigma_x \sigma_y.$$

இப்பொழு, $z = x-y$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \bar{z} = \bar{x}-\bar{y}$$

$$\therefore \quad z-\bar{z} = (x-\bar{x})-(y-\bar{y})$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\Sigma (z-\bar{z})^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma [(x-\bar{x})-(y-\bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma [(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2-2(x-\bar{x})(y-\bar{y})]$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x})^2 + \frac{1}{N} \Sigma (y-\bar{y})^2 - 2 \frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= \sigma_x^2+\sigma_y^2-2P$$

$$= \sigma_x^2+\sigma_y^2-2r \sigma_x \sigma_y$$

$$\therefore \quad 2r \sigma_x \sigma_y = \sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_z^2$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_z^2}{2 \sigma_x \sigma_y}$$

இச்சூத்திரம் $z = x+y$ க்கும் பொருந்தும்.

வரிசை ஒட்டுறவு (Rank correlation):

இரண்டு மாறிகளின் உண்மையான மதிப்புக்களுக்கிடையே ஒட்டுறவைக் காண்பதற்குப் பதிலாக இரண்டு சந்தர்ப்பங்களில் அம்மதிப்புக்களின் தரவரிசை (rank order) களுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவைக் காண நேரிடுவதுண்டு. முதலாவதாக, மாறிகளின் மதிப்புக்கள் எண்ணளவைகளில்

அளவிட முடியாதனவாயும் ஆனால் அவற்றின் தரங்களுக் கேற்ப வரிசைப் படுத்தக் கூடியனவாயும் இருந்தால் அவ்விரு மாறிகளின் மதிப்புக்களுடைய தரவரிசைகளின் இடையுற வையே அம்மாறிகளின் இடையுறவாகக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக, அழகுப் போட்டி ஒன்றில் பங்கு பெறுகின்ற பெண்களின் அழகுகளை எண்ணளவையில் அளவிட முடியா விடினும், யார் யாரைவிட அழகு என்று கூற முடியு மாகையால், அப்பெண்களின் அழகுகளின் தரங்களுக்கேற்ப அவர்களை வரிசைப் படுத்த முடியும். இரண்டாவதாக, மாறி களின் மதிப்புக்கள் எண்ணளவைகளில் அளவிடக் கூடியன வாக யிருந்த போதிலும், அவற்றின் உண்மையான மதிப்புக் களுக்குப் பதிலாக அவற்றின் தரவரிசைகளே கிடைக்கக் கூடிய தாக யிருந்தாலும் வரிசை ஒட்டுறவையே அம்மாறிகளின் ஒட் டுறவாகக் கொள்ள வேண்டியதிருக்கும். மாறிகளின் உண்மை யான மதிப்புக்களை அளவிடுவதைவிட அவற்றின் தரங்களுக் கேற்ப அவற்றை எளிதில் வரிசைப் படுத்தி விடலாம். உதா ரணமாக, மாணவர்களின் உயரங்களை அளவிடுவதைவிட அவர்களின் உயரங்களுக்கேற்ப அவர்களை எளிதில் வரிசைப் படுத்திவிட முடியும். எனவே, இரு மாறிகளின் வரிசை ஒட் டுறவை மிக எளிதாகக் கணக்கிட முடியும். மாறியின் மதிப்புக் களை ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ வரிசைப் படுத்தலாம். ஆனால் இரண்டு மாறிகளும் ஏறு வரிசைகளிலிருக்க வேண்டும் அல்லது இரண்டும் இறங்கு வரிசைகளிலிருக்க வேண்டும். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புக்கள் ஒரே மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால் அவ் வுறுப்புக்களுக்குரிய வரிசை எண்களின் கூட்டுச் சராசரியை அவை எல்லாவற்றின் வரிசை எண்களாகக் கொள்ள வேண்டும்.

ஸ்பியர்மனின் வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு :
(Spearman's Rank correlation coefficient)

x, y என்ற மாறிகளின் N மதிப்புக்களும் பின்வருமாறு வரிசைப் படுத்தப் பட்டிருப்பதாகக் கொள்க.

x-இன் வரிசை ...	1	2	3	4	...	...	...	N
y-இன் வரிசை ...	5	3	9	N	...	...	...	11

குறிப்பு: இவ்வரிசைகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண கீழ்க்காணும் சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1 முதல் N வரையுள்ள எண்களின் கூட்டல்

$$= 1+2+3+\ldots\ldots+N = \frac{N\ (N+1)}{2}$$

1 முதல் N வரையுள்ள எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டல்

$$= 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+N^2 = \frac{N\ (N+1)\ (2N+1)}{6}$$

இப்பொழுது,

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots\ldots+N}{N} = \frac{\frac{N\ (N+1)}{2}}{N} = \frac{N+1}{2}$$

$$y = \frac{5+3+9+N+\ \ldots\ldots+11}{2} = \frac{\frac{N\ (N+1)}{2}}{N} = \frac{N+1}{2}$$

$x=0$ஐ ஆதியாகக் கொண்ட வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கத்தை S_x எனக் கொண்டால்,

$$S_x^2 = \frac{\Sigma\ (x-0)^2}{N} = \frac{\Sigma\ x^2}{N} = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+N^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{N\ (N+1)\ (2N+1)}{6}$$

$$= \frac{(N+1)\ (2N+1)}{6}$$

d_x = $\bar{x}$ க்கும் ஆதி 0 க்கு முள்ள வித்தியாசமெனில்,

$$d_x = \frac{N+1}{2} - 0 = \frac{N+1}{2}$$

$$\therefore \quad \sigma_x^2 = S_x^2 - d_x^2$$

$$= \frac{(N+1)\ (2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2\ (N+1)\ (2N+1) - 3\ (N+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(N+1)}{12}[4N+2-3N-3]$$

$$= \frac{(N+1)}{12}[N-1]$$

$$= \frac{N^2-1}{12}$$

இதுபோல், $\sigma_y^2 = \dfrac{N^2-1}{12}$

இப்பொழுது, $z = (x-y)$ எனக் கொண்டால்,

$$\sigma_z^2 = \frac{\Sigma\,(z-\bar{z})^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\,\Sigma\,[\,(x-y)-(\bar{x}-\bar{y})\,]^2$$

$$= \frac{1}{N}\,\Sigma\,[\,(x-y)-0\,]^2$$

$$= \frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-y)^2$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{\dfrac{N^2-1}{12}+\dfrac{N^2-1}{12}-\dfrac{\Sigma\,(x-y)^2}{N}}{2\sqrt{\dfrac{N^2-1}{12}}\,.\,\sqrt{\dfrac{N^2-1}{12}}}$$

$$= \frac{\dfrac{N^2-1}{6}-\dfrac{\Sigma(x-y)^2}{N}}{2\,\dfrac{N^2-1}{12}}$$

$$= \frac{\dfrac{N^2-1}{6}-\dfrac{\Sigma\,(x-y)^2}{N}}{\dfrac{N^2-1}{6}}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma (x-y)^2}{N} \frac{6}{N^2-1}$$

$$= 1 - \frac{6 \Sigma (x-y)^2}{N (N^2-1)}$$

இப்பொழுது $(x-y) = d$ என்று எழுதினுல்,

ஸ்பியர்மனின் வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு $r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N (N^2-1)}$ என்ற அமைப்பைப் பெறுகிறது.

மாதிரி 85 :

10 மாணவர்கள் பூகோள பாடத்திலும் சரித்திரப் பாடத்திலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவைகளுக்குரிய ஸ்பியர்மன் வரிசைக் கெழுவைக் காண்க.

மாணவரின் எண்	... 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
பூகோளம்	... 12	26	21	23	25	15	18	22	18	19
சரித்திரம்	... 16	25	15	21	22	21	27	30	28	21

தீர்வு :

பூகோளம்	சரித்திரம்	பூகோளத்தில் தர வரிசை (x)	சரித்திரத்தில் தர வரிசை (y)	$d = (x-y)$	d^2
12	16	10	9	1	1
26	25	1	4	− 3	9
21	15	5	10	− 5	25
23	21	3	7	− 4	16
25	22	2	5	− 3	9
15	21	9	7	2	4
18	27	7.5	3	4.5	20.25
22	30	4	1	3	9
18	28	7.5	2	5.5	30.25
19	21	6	7	− 1	1
				மொத்தம்	124.50

ஸ்பியர்மன் வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு

$$= 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times (124.50)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{747.0}{990}$$

$$= 1 - 0.75$$

$$= 0.25$$

ஒரு முக விலக்க முறை (Method of concurrent deviations) :

இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புக்கள் ஒரு முகமாக ஏறிக் கொண்டோ அல்லது இறங்கிக் கொண்டோயிருந்தால் அம் மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு இருக்குமென்பது வெளிப்படை. மாருக, ஒன்றின் மதிப்பு ஏறும்போது மற்றது இறங்கிக் கொண்டும், ஒன்று இறங்கும்போது மற்றது ஏறிக் கொண்டுமிருந்தால் அவற்றிற்கிடையே எதிரிடை ஒட்டுறவு இருக்குமென்பதும் வெளிப்படை. மாறியின் உண்மையான மதிப்புக்களின் அடிப்படையிலல்லாமல் மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவைக் கணக்கிடவேண்டுமாஞல் பின்வரும் ஒரு முக விலக்கங்கள் முறையைப் பின்பற்றலாம்.

இம்முறையில் ஒவ்வொரு மாறியின் மதிப்புக்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் எதிரே அதற்கு முந்திய மதிப்பிலிருந்து பெறப்படுகின்ற விலக்கத்தின் அடையாளம் மட்டும் குறித்துக் கொள்ளப் படுகிறது. உதாரணமாக, மாறி x இன் இரண்டாவது மதிப்பு முதல் மதிப்பை விட அதிகமாகயிருந்தால் இரண்டாவது மதிப்புக்கு நேராக $+$ அடையாளமும், மூன்ருவது மதிப்பு இரண்டாவது மதிப்பைவிட குறைவாகயிருந்தால் மூன்ருவது மதிப்புக்கு நேராக $-$ அடையாளமும் குறிக்கப்பட வேண்டும். இதுபோல், இரண்டு மாறிகளின் எல்லா மதிப்புக்களும் நேராக, தனித்தனி நிரல்களில் அவற்றிற்குரிய அடையாளங்களைக் குறிக்க வேண்டும். மாறிகளின் முதல் மதிப்புக்களுக்கு நேராக எந்த அடையாளமும் கிடையாதென்பதைக் கவனிக்கவும். ஏதாவது ஒரு மதிப்பு அதற்கு முந்திய மதிப்புக்குச் சமமாகயிருந்தால் $=$ என்ற சமன்பாட்டு அடையாளத்தைக் குறிக்க வேண்டும். $(+, +,)$

(—, —), (=, =) போன்ற ஒரே மாதிரியான அடையாளங்கள் மாறிகளின் ஒரு முக ஏற்ற விறக்கங்களையும் (+, —), (—, +), (=, +), (+, =), (=, —), (—, =) என்பன மாறிகளின் எதிர் முக ஏற்ற விறக்கங்களையும், முரண்பட்ட அசைவுகளையும் காட்டுகின்றன. இப்பொழுது, இரண்டு மாறிகளின் அடையாளச் சோடிகளைப் பெருக்கி எழுதவும். (+, +), (—, —), (=, =) ஆகியவற்றைப் பெருக்கி + என்றும், (+, —), (—, +) ஆகியவற்றைப் பெருக்கி — என்றும் குறிக்கவேண்டும். முரண்பட்ட அசைவுகளைக் காட்டுகின்ற (=, +), (+, =), (=, —), (—, =) ஆகிய அடையாளங்களுக்கு எதிராக எந்த அடையாளமும் குறிக்கவேண்டாம். இவ்வாறு பெருக்கி எழுதப்பட்ட அடையாளங்களுள் + அடையாளங்களை மட்டும் எண்ணி, அந்த எண்ணிக்கையை c என்று குறிக்கவும். மொத்த அடையாளச் சோடிகளின் எண்ணிக்கையை N என்று குறிப்பிட்டால், மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பின்வரும் சூத்திரத்தின் மூலம் பெறலாம்.

$$r = \pm\sqrt{\frac{\pm(2c-N)}{N}}$$

இங்கு, (2 c—N) இன் அடையாளம் + ஆகயிருந்தால் வர்க்க மூல அடையாளத்திற்கு உள்ளும் புறமும் + அடையாளத்தையும், (2c — N) இன் அடையாளம் — ஆகயிருந்தால், வர்க்க மூல அடையாளத்திற்கு உள்ளும் புறமும் — அடையாளத்தையும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இச்சூத்திரத்தில் இரு மாறிகளின் ஒரு முக அசைவுகளைக் குறிக்கின்ற ஒரு முக விலக்கங்களின் எண்ணிக்கை பயன்படுத்தப்படுவதால் இதற்கு ஒரு முக விலக்கக் கெழு என்று பெயர்.

குறிப்பு :

N இன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடி மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கையைவிட 1 குறைவாகயிருக்கு மென்பதைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 86 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு முக விலக்கங்களின் முறையில் சென்னை, பம்பாய் ஆகிய நகரங்களின் குறியீட்டெண்களின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

மாதம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சென்னை	169	182	182	192	195	211	227	218	238	238
பம்பாய்	204	225	222	228	221	249	249	256	255	255

தீர்வு :

மாதம்	சென்னை x	பம்பாய் y	x-ன் விலக்கம் d_1	y-ன் விலக்கம் d_2	$d_1 d_2$
1	169	204			
2	182	225	+	+	+
3	182	222	=	−	
4	192	228	+	+	+
5	195	221	+	−	−
6	211	249	+	+	+
7	227	249	+	=	
8	218	256	−	+	−
9	238	255	+	−	−
10	238	255	=	=	+
					$c = 4$

$$N = 9$$

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{(2c-N)}{N}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{(8-9)}{9}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\left(-\frac{1}{9}\right)}$$

$$= -\sqrt{-(-.1111)}$$

$$= -\sqrt{.1111}$$

$$= -.33.$$

ஒட்டுறவு விகிதம் (Correlation ratio)

x, y என்ற மாறிகளின் மதிப்புக்களுக்குரிய ஒரு ஒட்டுறவுப் பட்டியல் (x, f_x), (y, f_y) என்ற இரு நிகழ்வெண் பரவல்களைக் கொண்டது என்று கண்டோம். x_1, x_2, x_3, x_4..........என்பன x இன் மைய மதிப்புக்களென்றும், y_1, y_2, y_3, y_4 என்பன y இன் மைய மதிப்புக்களென்றும் கொள்க. $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}, f_{x_4}$........ என்பன முறையே x_1, x_2, x_3, x_4.........ஆகிய மைய மதிப்புக் களுக்குரிய நிகழ்வெண்களென்றும், $f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}, f_{y_4}$.......... என் பன முறையே y_1, y_2, y_3, y_4..........ஆகிய மைய மதிப்புக்களுக் குரிய நிகழ்வெண்களென்றும் காணலாம். (x_1, f_{x_1}), (x_2, f_{x_2}), (x_3, f_{x_3}), (x_4, f_{x_4}),..........என்பன தனித்தனி நிரல்களில் அமைந் திருக்கும். இந்நிரல்களுக்கு "நிலைக்குத்து வரிசைகள்" (vertical arrays) அல்லது "y-வரிசைகள்" என்று பெயர். x_1 இருக்கின்ற நிலைக்குத்து வரிசையை x_1 க்குரிய நிலைக்குத்து வரிசையென்று கூறலாம். இதுபோல், (y_1, f_{y_1}), (y_2, f_{y_2}), (y_3, f_{y_3}), (y_4, f_{y_4}),.........என்பன தனித்தனி நிரைகளில் அமைந் திருக்கும். இந்நிரைகளுக்குக் "கிடை விரிசைகள்" (horizontal arrays) அல்லது "x-வரிசைகள்" (x-arrays) என்று பெயர். y_1 இருக்கின்ற கிடை வரிசையை y_1 க்குரிய கிடை வரிசை யென்று கூறலாம். y_1, y_2, y_3, y_4.........ஆகிய மைய மதிப்புக் களும், x_1 க்குரிய நிலைக்குத்து வரிசையிலுள்ள நிகழ்வெண்களும் சேர்ந்து ஒரு நிகழ்வெண் பரவலாக அமைகின்றது. இந்நிகழ் வெண் பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண் f_{x_1} ஆகும். இவ்வாறு, ஒவ்வொரு நிலைக்குத்து வரிசையும் y-இன் மைய மதிப்புக்களும் சேர்ந்து ஒரு நிகழ்வெண் பரவலாக அமையும்.

இப்பொழுது, m_1, m_2, m_3, m_4,.........என்பன முறையே x_1, x_2, x_3, x_4..........ஆகியவற்றிற்குரிய நிலைக்குத்து வரிசைகளி லுள்ள எண்களின் கூட்டுச் சராசரிகளெனக் கொள்க. இப் பொழுது $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}, f_{x_4}$,.........ஆகியவற்றை முறையே m_1, m_2, m_3, m_4,.........ஆகியவற்றின் நிறைகளாகக் கொண்டு அவற்றின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடவும். இத்திட்ட விலக்கத்தை η_{my} (ஈற்ரு my என்று வாசிக்கவும்) என்று குறிப்பிடுக. y_1, y_2, y_3, y_4,........ஆகியவற்றை மைய மதிப்புக்களாகவும், $f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}$, f_{y_4},.........ஆகியவற்றை நிகழ்வெண்களாகவும் கொண்ட நிகழ் வெண் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை σ_y என்று குறிப்பிடுக. η_{my} க்கும் σ_y க்கு முள்ள விகிதத்திற்கு "x சார்ந்த y இன் ஒட் டுறவு விகிதம்" (correlation ratio of y on x) என்று பெயர். அதாவது,

x சார்ந்த y இன் ஒட்டுறவு விகிதம் $= \eta_{yx} = \dfrac{\eta_{my}}{\sigma_y}$

இதுபோல், y சார்ந்த x இன் ஒட்டுறவு விகிதம் $= \eta_{xy} = \dfrac{\eta_{mx}}{\sigma_x}$

x, y மாறிகளின் மதிப்புக்கள் நேர்கோட்டு ஒட்டுறவாக (linear correlation) யில்லாவிடில் x, y க்குக் கணிக்கப்படுகின்ற ஒட்டுறவுக் கெழு r, x, y இன் ஒட்டுறவைத் திருப்தியான முறையில் அளவிடாது. இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் ஒட்டுறவுக் கெழுவைவிட, ஒட்டுறவு விகிதத்தின் மூலம் மாறிகளின் ஒட்டுறவைத் திருப்தியான முறையில் அளவிட முடியும். வளை கோட்டு ஒட்டுறவுடைய மாறிகளின் ஒட்டுறவு விகிதம் அவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைவிட சிறிது அதிகமாக யிருக்கும். ஆனால் மாறிகளின் ஒட்டுறவு சரியாக நேர்கோட்டு ஒட்டுறவாக யிருந்தால், x சார்ந்த y, y சார்ந்த x ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவு விகிதங்கள் இரண்டும் ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்குச் சமமாக யிருக்கும்.

நிர்ணயக் கெழு (Coefficient of determination)

இரு மாறிகளின் நிர்ணயக் கெழு என்பது அவைகளுக்குள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் வர்க்கமாகும். ஆகவே, இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு r என்றால், நிர்ணயக் கெழு r^2 ஆகும். இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பை ஒட்டுறவுக் கெழுவைவிட நிர்ணயக் கெழுவின் மூலம் நன்கு அளவிட முடியும். ஏனெனில், ஒரு சார்புடைய மாறியின் மதிப்புக்களில் காணப்படுகின்ற மாறுபாடுகளுள் $100\,r^2$ சதவீத மாறுபாடுகள் சாரா மாறியிலுள்ள மாறுபாடுகளின் விளைவுகளாகும் என்ற விவரத்தை நிர்ணயக் கெழுவின் மூலம் தெரிந்துகொள்ள முடிகிறது. உதாரணமாக, $r = 0.9$ என்றால், நிர்ணயக் கெழு $= (.9)^2 = .81$ ஆகும். ஆகவே, சார்புடை மாறியின் மாறுபாடுகளுள் 81% மாறுபாடுகள் சாரா மாறியின் மாறுபாடுகளினலேற்பட்ட விளைவுகளென்றும், மீதி 19% மாறுபாடுகள் வேறு காரணங்களாலேற்பட்டவை யென்றும் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வின் பயன்கள் :

(1) தொழில் துறைகளில் விளம்பரத்துக்கும், விற்பனைக்குமுள்ள ஒட்டுறவைப் பற்றிய பகுப்பாய்வு விற்பனையைப் பெருக்க உதவியாகயிருக்கின்றது.

(2) தேவைக்கும், விலைக்குமுள்ள ஒட்டுறவு, அளிப்புக்கும் விலைக்குமுள்ள ஒட்டுறவு ஆகியவை பற்றிய பகுப்பாய்வு பண்டங்களின் விலைகள் பற்றி முன் கணிப்புச் செய்யப் பயன் படுகிறது.

(3) வருமானத்துக்கும், விற்பனைக்குமுள்ள தொடர்பு பற்றிய பகுப்பாய்வு சந்தைப் பகுப்பாய்விற்குப் பயன் படுகிறது.

(4) ஒரு காலம் சார் தொடரின் ஏற்ற விறக்க அசைவு களின் தன்மையை நிர்ணயிக்க அத்தொடரின் "தொடர் ஒட் டுறவு" பயன்படுகிறது.

(5) உளவியல் சோதனைகளுக்கும், அலுவலக வேலைகளுக் குத் திறமையானவர்களைத் தெரிவு செய்வதற்கும் ஒட்டுறவு முறைகள் பயன்படுகின்றன.

(6) குடும்பத்தின் வருமானத்துக்கும், உணவுக்காகச் செல விடப்படுகின்ற தொகைக்கு முள்ள ஒட்டுறவும், உணவுக்காகச் செலவிடப்படுகின்ற மொத்தத் தொகைக்கும், பல்வேறு வகை யான உணவுப் பண்டங்களுக்காகச் செலவிடப்படுகின்ற தொகைகளுக்கு மிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுகளும் மக்களுக்குக் கிடைக்கக் கூடிய உணவுச் சத்துக்கள் பற்றி ஆராய்வதற்குப் பயன்படுகின்றன.

வினாத்தாள்—9.

(1) ஒட்டுறவு என்றால் என்னவென்று எளிய முறையில் விளக்குக. (சென்னை பி.காம். 1968 ஏப்.)

(2) ஒட்டுறவு என்றால் என்ன? இரண்டு மாறிகளுக் கிடையே காரண விளைவுத் தொடர்பை அது எப் பொழுதும் குறிப்பிடுகின்றதா?

(சென்னை பி.காம். 1960 செப்.)

(3) ஒட்டுறவு என்பதன் உட்கருத்து பற்றி விவாதிக்கவும். (மதுரை பி. பி. ஏ. 1972 ஏப்.)

(4) இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை வரையறுக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(5) x, y இரண்டும் தொடர்புடை மாறிகள். x, y இரண்டையும் தொடர்பு படுத்தும் இடையுறவுக் கெழு வென்றால் என்னவென விளக்குக. பொருளாதாரத்துறையில் தோன்றக் கூடிய இரு எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு இவ்வுறவுக் கெழுவின் உட்கருத்தை விளக்குக. (மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

(6) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மூலம் நீவிர் அறிந்துகொள்வது யாது? (சென்னை பி.காம். 1963 செப்.)

(7) x, y என்ற இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறுக்கவும். (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

(8) தொழில் பிரச்சினைகளில் ஒட்டுறவு முறைகளின் முக்கியத்துவம் பற்றி விளக்கவும்.

(மதுரை பி.பி.ஏ, 1971 செப்.)

(9) போலி ஒட்டுறவு என்பதை விளக்கவும்.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

(10) இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவை விளக்கவும். (மதுரை எம்.ஏ. 1969)

(11) ஒட்டுறவின் மூலம் நீங்கள் அறிந்து கொள்வதென்னவென்று விளக்குக. ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறுக்கவும். இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பின் தரத்தை அளவிடுவதில் அதன் பயன்பற்றி விவாதிக்கவும்.

(மதுரை எம்.ஏ. 1969 பு.மு.)

(12) இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவு என்பதன் மூலம் நீங்கள் தெரிந்து கொள்வதென்ன? இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இருப்பதை எவ்வாறு தெரிந்து கொள்வீர்கள்? வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவின் சூத்திரத்தைப் பெறுக. (மதுரை எம்.ஏ. 1970)

(13) ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரு திறமைகளுக்குட்பட்ட இடை உறவினைச் சோதிக்கும் வகையில் பியர்சன் பெருக்குப் படிக் கெழுவுக்கும், ஸ்பியர்மன் வரிசைக் கெழுவுக்குமுள்ள வேறுபாடு யாது?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(14) x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவின் சூத்திரத்தைப் பெறுக.

(மதுரை பி.பி.ஏ., 1972 ஏப்.)

(15) ஒட்டுறவு என்றால் என்ன ? ஒட்டுறவை நிர்ணயிப்பதில் பின்வரும் முறைகளை நீங்கள் எவ்வாறு பயன்படுத்துவீர்கள் என்பதை விளக்குக.

(i) ஒட்டுறவுப் பட்டியல், (ii) கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு.

(சென்னை பி.காம். 1966 ஏப்.)

(16) ஒருமுக விலக்கக் கெழுவினை வரையறுத்து அதன் பயன்களைக் குறிப்பிடவும்.

(சென்னை பி.காம். 1962 ஏப்.)

(17) வழக்கமான குறியீட்டின்படி வரிசைக் கெழு

$$= 1 - \frac{6 \Sigma (x-y)^2}{n (n^2-1)}$$ என்று நிறுவுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(18) சிறு குறிப்பு வரைக :

(i) வரிசை ஒட்டுறவு.

(சென்னை பி.காம். 1965 ஏப்.)

(ii) ஒருமுக விலக்கங்களின் கெழு.

(சென்னை பி.காம். 1960 செப்.)

(iii) ஒட்டுறவு விகிதம்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி., 1969 ஏப்., மதுரை எம்.ஏ. 1971)

பயிற்சி 9.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x ...	1	3	5	7	8	10
y ...	8	12	15	17	18	20.

(2) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x ...	2	4	3	8	6	5	6	7	5	4
y ...	15	10	16	6	14	12	12	9	11	15

(3) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு x, y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக,

x ...	1	3	4	2	5	8	9	10	13	15
y ...	8	6	10	8	12	16	16	10	32	32

(4) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கணவன்—மனைவி வயதுகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

கணவன் வயது ...	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
மனைவி வயது ...	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

(5) கணக்குப் பதிவியல், புள்ளியியல் ஆகிய பாடங்களில் நடைபெற்ற 10 தேர்வுகளில் ஒரு மாணவன் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

தேர்வு எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
கணக்குப் பதிவியல் ...	77	54	27	52	14	35	90	25	56	60
புள்ளியியல் ...	35	58	60	40	50	40	35	56	34	42

(6) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து பருத்தி ஏற்றுமதிக்கும் பருத்தியினால் செய்யப்பட்ட பொருட்களின் இறக்குமதிக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

பருத்தி ஏற்றுமதி ... (கோடி ரூபாய்கள்)	42	44	58	55	89	98	66
பருத்தி பொருட்கள் ... இறக்குமதி (கோடி ரூபாய்கள்)	56	49	53	58	65	76	58

(சென்னை பி.காம். 1965 செப்.)

(7) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து X, Y ஆகியவற்றின் இடையுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

X	...	34	27	31	38	38	36	39	39	40	44
Y	...	9	8	11	15	15	16	15	10	13	12

(சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்.)

(8) பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து ஏழு ஆண்டுகளில் சேமிப்பு பாங்கு வைப்புக்களுக்கும், வேலை நிறுத்தம், கதவடைப்பு ஆகியவற்றிற்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

சேமிப்பு பாங்கு வைப்புக்கள்... (இலட்சம் ரூபாய்களில்)	51	54	55	59	65	60	70
வேலை நிறுத்தங்களும், கதவடைப்புகளும் ...	38	44	53	36	33	23	10

(சென்னை பி.காம். 1966 செப்.)

(9) சில ஆண்டுகளில் ஒரு மாவட்டத்தில் ஒரு கிலோ பண்டத்தின் விலை (ரூ. p) யும், ஒரு கிலோ மற்றொரு பண்டத்தின் விலை (ரூ q) யும் பின்வருமாறு :

ஆண்டு ;	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
p :	13	23	12	10	28	29	31	33	39
q ;	18	25	22	14	24	26	29	27	32

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, இரண்டு பண்டங்களின் விலைகளுக்கு மிடையே ஏதாவது இருக்கிறதா வென ஆராய்க.

(மதுரை எம்.ஏ. 1969)

(10) பின்வரும் குடும்பங்களின் மாத வருமானத்துக்கும், மாதச் சேமிப்புக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

குடும்பம் ...	1	2	3	4	5	6	7	8
மாத வருமானம் ரூ....	230	350	280	400	325	300	350	300
மாதச் சேமிப்பு ரூ. ...	25	30	20	35	20	20	30	40

(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

(11) பத்தாண்டுகளில் வெளியிடப்பட்ட நூல்களின் எண்ணிக்கைகளும், மதிப்புகளும் பற்றிய பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
நூல்கள் எண்ணிக்கை ...	11	9	11	17	18	19	19	18	16	12
மதிப்பு (டாலர்) ...	21	17	20	38	38	40	42	46	40	38

(12) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து உரங்கள் பயன்படுத்துவதற்கும், விளைச்சலுக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

உரம் (டன்களில்) ..	15	18	20	24	30	35	40	50
விளைச்சல் (டன்களில்) ...	85	93	95	105	120	130	150	160

(மதுரை பி.காம். 1969 செப்.)

(13) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து, *X* *Y* க்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X ...	105	109	102	101	100	99	98	96	93	92
Y ...	101	103	100	98	95	96	104	92	97	94

(மதுரை பி.காம். 1963 செப்.)

(14) பத்து மாணவர்கள் புள்ளியியல், சட்டம் ஆகிய பாடத் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு. ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வரிசை எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
புள்ளியியல் ...	80	60	51	69	58	62	64	72	56	58
சட்டம் ...	45	71	60	57	62	68	48	50	62	60

(15) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து பணப்புழக்கமும், விலைவாசியும் எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளன வென்று காண்க.

ஆண்டு	பணப்புழக்கம் (கோடி ரூபாய்கள்)	விலைக்குறியீட்டெண் (அடிப்படை ஆண்டு 1873)
1914	248	147
1915	266	152
1916	297	184
1917	238	196
1918	407	225
1919	468	276
1920	411	281
1921	393	260

(சென்னை பி.காம்., 1960 செப்.)

(16) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து மாணவர்களின் வயதுக்கும், விளையாடும் பழக்கத்திற்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

வயது (வருடங்களில்) ...	15	16	17	18	19	20
மாணவர் எண்ணிக்கை ...	250	200	150	120	100	80
விளையாடும் மாணவர் ...	200	150	90	48	30	12

(17) பின்வரும் பட்டியல் மொத்த மக்கள் தொகையையும் அவர்களில் முழுமையாக அல்லது பகுதியாகக் குருடாகயிருப்பவர்களையும் பற்றிய பரவலைத் தருகிறது. வயதுக்கும், குருட்டுத் தன்மைக்கும் ஏதாவது தொடர்பு இருக்கிறதா என்று காண்க.

வயது	ஆட்களின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)	குருடர்களின் எண்ணிக்கை
0 — 10	100	55
10 — 20	60	40
20 — 30	40	40
30 — 40	36	40
40 — 50	24	36
50 — 60	11	12
60 — 70	6	18
70 — 80	3	15

(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்.)

(18) கணிதம், புள்ளியியல் தேர்வுகளில் 30 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒட்டுறவுப் பட்டியலமைத்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

கணிதம்...	29	32	53	47	45	32	70	45	70	53
புள்ளியியல்...	56	60	72	48	72	35	67	67	75	31
கணிதம்...	41	15	22	18	42	78	42	53	33	78
புள்ளியியல்...	68	30	44	37	64	98	48	65	72	50
கணிதம்...	33	77	45	59	23	42	43	50	32	67
புள்ளியியல்...	42	43	27	50	61	62	52	50	51	44

(19) பின் வரும் ஒட்டுறவுப் பட்டியலிலிருந்து r-ஐக் காண்க.

$\frac{x}{y}$	45-49	40-44	35-39	30-34	25-29	மொத்தம்
40—49	1					1
30—39		2	1			3
20—29		3	3	2		8
10—19			4	2		6
0— 9				1	1	2
மொத்தம்	1	5	8	5	1	20

(20) 25 மாணவர்கள் பொருளாதாரத்திலும், புள்ளியியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பின் கண்ட ஒட்டுறவுப் பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

பொருளாதாரம்	புள்ளியியல்				மொத்தம்
	30–40	40–50	50–60	60–70	
30—40	3	1	1		5
40—50	2	6	1	2	11
50—60	1	2	2	1	6
60—70		1	1	1	3
மொத்தம்	6	10	5	4	25

(21) ஒரு தேர்வில் 75 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பின் வரும் பரவலிலிருந்து வயதுக்கும், மதிப்பெண்ணுக்குமுள்ள ஒட்டுறவை ஆராய்க.

மதிப் பெண்	வயது 19	20	21	22	23	மொத்தம்
0—20	4	4	2	1	1	12
20—40	3	5	4	2	2	16
40—60	3	6	8	6	3	25
60—80		4	6	8	4	22
மொத்தம்	10	19	20	16	10	75

(22) ஒரு கல்லூரியைச் சேர்ந்த 81 பி ஏ வகுப்பு மாணவர்கள் முதல், இரண்டாம் பருவத் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இரண்டு தேர்வுகளுக்குமுள்ள ஒட்டுறவை ஆராய்க.

2-ம் பருவத் தேர்வு	முதல் பருவத் தேர்வு 120-160	160-200	200-240	240-280	மொத்தம்
80—120	3	5	2	2	12
120—160	5	6	3	—	14
160—200	—	15	3	14	32
200—240	8	12	—	—	20
240—280	—	—	2	7	3
மொத்தம்	16	38	10	17	81

(23) 104 தம்பதிகள் அவர்களுடைய திருமணத்தின் போதுள்ள வயது கட்கேற்ப பின்வருமாறு பாகுபாடு செய்யப் பட்டுள்ளனர். அவர்களுடைய வயதுகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பை ஆராய்க.

மனைவியரின் வயது	கணவர்களின் வயது 20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
15—20	20	10	2		
20—25	4	28	6	2	
25—30		5	11	4	2
30—35		5	7	2	1
35—40					1

(24) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் r-ஐக் காண்க.

y	x 18	19	20	21	22	மொத்தம்
0— 5				3	1	4
5—10				3	2	5
10—15			7	10		17
15—20		5	4			9
20—25	3	2				5
மொத்தம்	3	7	11	16	3	40

(25) கார்ல் பியர்சன் r-ஐக் கணக்கிடுக.

பொருளாதாரம்	புள்ளியியல் 0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	மொத்தம்
0—10	6	8				14
10—20		5	10	1		16
20—30			6	4		10
30—40				3	3	6
40—50				3	1	4
மொத்தம்	6	13	16	11	4	50

(26) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கணவன்—மனைவி வயதுகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவினைக் காண்க.

கணவர் களின் வயது	மனைவியரின் வயது 15	20	25	30	35	40	45	50	மொத்தம்
55—60						6	5	3	14
50—55					8	10	6	2	26
45—50				2	13	8	4		27
40—45				14	18	3			35
35-40			15	20	8				43
30—35	6	12	25	16					59
25—30	15	26	20	1					62
20—25	22	10	2						
மொத்தம்	43	48	62	53	47	27	15	5	300

(27) பின்வரும் விவரங்களுக்கு வரை ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

புள்ளியியல் வரிசை ...	5	3	4	7	6	2	8	1	10	9
பொருளாதாரத்தில் வரிசை ...	3	7	4	2	9	1	6	5	8	10

(28) ஒரு அழகுப் போட்டியில் இரு நடுவர்கள் அழகிகளைப் பின்வருமாறு வரிசைப் படுத்தினர்.

நடுவர் 1 ...	6	4	3	1	2	7	9	8	10	5
நடுவர் 2 ...	4	1	6	7	5	8	10	9	3	2

அழகை நிர்ணயிப்பதில் இரு நடுவர்களின் தரங்களும் ஒத்திருக்கின்றனவா ?

(29) ஒரு அழகுப் போட்டியில் 10 அழகிகள் மூன்று நடுவர்களால் பின்வருமாறு வரிசைப் படுத்தப்பட்டனர்.

நடுவர் 1 ...	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
நடுவர் 2 ...	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
நடுவர் 3 ...	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தி, எந்த இரு நடுவர்கள் அழகை ரசிப்பதில் பொதுவான ரசிகத்தன்மை யுடையவரென்று காண்க.

(30) கடுமையான கோடையைத் தொடர்ந்து கடுங்குளிர் இருக்குமென்று சிலர் நம்புகின்றனர். சில ஆண்டுகளில் ஆகஸ்டு, பிப்ரவரி ஆகிய மாதங்களின் சராசரி வெப்ப நிலைகளின் வரிசை ஒட்டுறவின் மூலம் இக்கூற்றினைச் சோதிக்க முடியும். பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு இக்கூற்றின் உண்மையினை ஆராய்க.

சராசரி பிப். வெப்ப நிலை ...	47	46	49	34	39	41	43	45	38	36
சராசரி ஆக. வெப்ப நிலை ...	65	58	64	62	53	60	61	66	54	57

(81) 10 பன்றிகள் தின்ற உணவின் அளவுகளும், அவை கூடுதலாகப் பெற்ற எடைகளும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவினைப் பயன்படுத்தி உண்ணும் உணவுக்கும், எடை அதிகரிப்புக்கு முள்ள உறவை ஆராய்க.

உண்ட உணவு (ராத்) ... 382 325 388 316 319 399 358 355 344 399

எடை அதிகரிப்பு (ராத்) ... 66 72 84 47 75 87 75 73 59 70

(82) பின்வரும் விவரங்களுக்கு வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x ...	180	178	175	175	168	167	160	159
y ...	112	113	114	114	114	116	115	117

(83) விலைக் குறியீட்டெண், வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் ஆகியவை பற்றிய பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒரு முக விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

விலைக் குறியீட்டெண் ... 100 101 103 102 100 99 97 98 96 95

வா. செ. குறியீட்டெண் ... 98 99 96 97 95 92 95 94 90 91

(84) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு முக விலக்க முறையைப் பயன்படுத்தி வருமானத்துக்கும் செலவுக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வருமானம் ரூ. 249 251 248 252 258 269 271 280 280 275

செலவு ரூ. 237 238 236 240 245 254 252 258 258 251

(85) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து அளிப்புக்கும், விலைக்குமுள்ள இடையுறவுக் கெழுவை ஒருமுக விலக்க முறையைப் பயன்படுத்திப் பெறுக.

ஆண்டு ... 1943 1944 1945 1846 1947 1948 1949 1950 1951

அளிப்பு ... 160 164 172 182 166 170 178 192 186

விலை ... 292 280 260 234 266 254 230 190 200

9. வளைகோடு பொருத்துதல்
(CURVE FITTING)

இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை அளவிடு கின்ற முறைகளைப் பற்றி முந்திய அத்தியாயத்தில் விரிவாக ஆராய்ந்தோம். ஆனால் புள்ளிவிவர ஆய்வின்போது இரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை அளவிடுவதோடு நின்று விடாமல், ஒரு மாறியின் சராசரி மதிப்புக்களுக்குரிய இரண்டாவது மாறியின் சராசரி மதிப்பை நிர்ணயிக்க வேண்டிய அவசியமும் ஏற்படும். இத்தகைய மதிப்பீடுகளை ஒட்டுறவுக் கெழுவிலிருந்து பெறமுடியாது. மேலும், ஒரு இனத் தொகுதி பற்றிய ஆய்வின்போது, அத்தொகுதியிலிருந்து சமவாய்புக் கூறு (random sample) ஒன்றினைத் தெரிவு செய்து, அக்கூறினை ஆராய்ந்து பெறப்படுகின்ற முடிவுகளை அம்முழு இனத் தொகுதியின் முடிவுகளாக ஏற்றுக் கொள்வதன் மூலம் காலம், செலவு, உழைப்பு ஆகியவை வீணுவதைத் தடுக்க முடிவதால் பெரும்பாலும் அதிக எண்ணிக்கை உறுப்புக்களைக் கொண்ட இனத்தொகுதிகள் கூறுகளின் மூலமே ஆராயப்படு கின்றன. எனவே, ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறிலிருந்து பெறப்படுகின்ற முடிவுகள் அத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற எந்தக் கூறுக்கும் பொருந்துவதாக யிருக்கவேண்டும். உதாரணமாக, பதினு யிரம் மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து 100 மாணவர்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றினைத் தெரிவு செய்து அந்த நூறு மாணவர்கள் ஆங்கிலத்திலும், தமிழிலும் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவினை அளவிடுவ தாகக் கொள்வோம். இந்த ஒட்டுறவு பற்றிய விவரத்தின் மூலம் மொத்த மாணவர்களிடையே ஆங்கிலத்துக்கும், தமிழுக் குமுள்ள ஒட்டுறவைத் தெரிந்து கொள்ளலாம். இப்பொழுது 100 மாணவர்களடங்கிய இன்னொரு அத்தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுவதாகக் கொள்வோம். இக்கூறிலுள்ள

100 மாணவர்களின் ஆங்கில மதிப்பெண்களின் சராசரியிலிருந்து தமிழ் மதிப்பெண்களின் சராசரியை மதிப்பிடவேண்டிய நிலை ஏற்படலாம். இம்மதிப்பீட்டை ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மூலம் பெறமுடியாது. ஆனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புக்களுள் பெரும்பாலானவற்றிற்குப் பொருந்துமாறு இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு சமன்பாட்டை அமைப்பதன் மூலம் இத்தகைய மதிப்பீட்டைப் பெற முடியும்.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)......$ என்பன x, y என்ற இரு மாறிகளின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களெனக் கொள்க. x-இன் மதிப்புக்களைக் கிடையச்சிலும், y-இன் மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு $(x_1, y_1), (x_2, y_2,), (x_3, y_3),......$ ஆகிய சோடி மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற புள்ளிகளான வரைபடத்துக்குச் சிதறல் விளக்கப் படம் **(Scatter diagram)** என்று பெயர். பொதுவாக, இப்புள்ளிகள் எல்லாவற்றின் வழியாகவும் செல்லுமாறு ஒரு நேர் கோடோ அல்லது ஒரு வளைகோடோ வரைய முடியாது. எனவே, அவற்றுள் பெரும்பாலான புள்ளிகள் வழியே செல்லுமாறு வரையப்படுகின்ற வளைகோடு அப்புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமான வளைகோடாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. இவ்வளை கோட்டுக்குரிய சமன்பாட்டிலிருந்து x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y இன் சராசரி மதிப்புக்களை அல்லது y இன் மதிப்புக்களுக்குரிய x இன் சராசரி மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான வளை கோட்டின் சமன்பாட்டை அமைப்பதற்கு ''வளை கோடு பொருத்துதல்'' என்று பெயர். கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளுள் பெரும்பாலானவற்றின் வழியே செல்லக்கூடிய வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுகின்ற முறைகளுள் மீச்சிறு இருபடி முறை (method of least squares) மிக எளிதானதும், கணித முறைப்படி அமைந்ததுமாகும்.

மீச்சிறு இருபடிக் கொள்கை (Principle of Least of Squares)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2),........., (x_n, y_n)$ என்பன x, y என்ற மாறிகளின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களெனக் கொள்க. இவ்விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $y = f(x)$ எனக் கொள்க. இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $x_1, x_2,......, x_n$ ஆகிய x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y இன் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம். இம்மதிப்பீடுகளை $y_1^1, y_2^1,......, y_n^1$ எனக் கொள்க.

அதாவது,

$$y_1^1 = f(x_1),\ y_2^1 = f(x_2),\ \ldots\ \ldots,\ y_n^1 = f(x_n).$$

இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள y இன் மதிப்புக்களுக்கும், வளை கோட்டுச் சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்பட்ட y இன் மதிப்பீடுகளுக்கு முள்ள வித்தியாசங்களைக் கவனிக்க. அதாவது, d_1, d_2, ..., d_n என்பன இவ்வித்தியாசங்களானால்,

$$d_1 = y_1 - y_1^1 = y_1 - f(x_1),$$
$$d_2 = y_2 - y_2^1 = y_2 - f(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_n = y_n - y_n^1 = y_n - f(x_n) \text{ ஆகும்.}$$

$d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$ ஆகிய இவ்வித்தியாசங்கள் யாவும் எச்சங்கள் (residuals) எனப்படுகின்றன. இவ்வெச்சங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை E என்று குறிப்பிட்டால்,

$$E = \Sigma d^2 = d_1^2 + d_2^2 + \ldots\ldots + d_n^2 \text{ ஆகும்.}$$

$y = f(x)$ என்ற வளை கோடு பெரும்பாலான புள்ளிகளின் வழியே செல்ல வேண்டுமானால், இக்கூட்டுத் தொகை மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற வேண்டும். ஆகவே, $E = \Sigma d^2$ என்பது மீச்சிறு மதிப்பாக யிருக்குமாறு பெறப்படுகின்ற $y = f(x)$ என்ற வளைகோடுதான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகவும் பொருத்தமான வளை கோடாகும். இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கட்குப் பொருத்தமான வளைகோடு அமைக்கின்ற இந்த முறைக்கு ‘‘மீச்சிறு இருபடி முறை’’ (method of least squares) என்று பெயர். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் தன்மைகளுக்கேற்ப பலவகையான வளைகோடுகளை அமைக்கலாம். அவற்றுள் எவ்வகை வளைகோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கட்கு மிக நன்ருகப் பொருந்துகிறதோ அதையே அவ்விவரங்களுக்குரிய வளைகோடாகப் பொருத்த வேண்டும். புள்ளிவிவர ஆய்வுகளில் அதிகமாகப் பயன்படுகின்ற சிலவகை வளைகோடுகள் வருமாறு :

1. நேர்கோடு : $y = ax + b$
2. பரவளையம் : $y = ax^2 + bx + c$.
3. அடுக்குக்குறிவளைவு : $y = ae^{bx}$.
4. அடுக்குச் சார்பு : $y = ax^b$.
5. அடுக்குச் சார்பு : $y = Ab^x$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு இவற்றுள் எந்த வகை வளைவு பொருந்துமென்பதை நிர்ணயிப்பது அவ்வளவு எளிதன்று. அனுபவத்தின் மூலமே இதைச் சரியாக நிர்ணயிக்க முடியுமென்றாலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் சிதறல் விளக்கப் படத்திலிருந்து பொருத்தமான வளை கோட்டின் நன்மையைப் பற்றி ஓரளவு தெரிந்து கொள்ளமுடியும்.

(1) நேர்கோடு பொருத்துதல் :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களெனக் கொள்க. இவ்விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$y = ax + b$$

எனக் கொள்க. இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகிய x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய $y_1^1, y_2^1, \ldots\ldots, y_n$ என்ற y இன் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad y_1^1 = ax_1 + b,$$

$$y_2^1 = ax_2 + b,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^1 = ax_n + b.$$

இப்பொழுது, $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள y-மதிப்புக்களுக்கும், கணக்கிடப்பட்டுள்ள y இன் மதிப்பீடுகளுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களெனில்,

$$d_1 = y_1 - y_1^1 = y_1 - (ax + b),$$

$$d_2 = y_2 - y_2^1 = y_2 - (ax_2 + b),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_n = y_n - y_n^1 = y_n - (ax_n + b)$$

ஆகும். இவ்வித்தியாசங்களைப் பொதுவாக d என்று குறிப்பிட்டால்,

$$d = y - (ax + b)$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad E = \Sigma d^2 = \Sigma \left[y - (ax + b) \right]^2$$

E என்பது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற வேண்டுமாயின் $\frac{\partial E}{\partial a}$, $\frac{\partial E}{\partial b}$ என்ற பகுதி வகைக் கெழுக்கள் பூச்சியமாக வேண்டும்.*

ஆகவே,

$$\frac{\partial E}{\partial a} \equiv 2 \Sigma [y-(ax+b)] (-x) = 0$$

அதாவது, $-\Sigma [xy-ax^2-bx] = 0$

அதாவது, $-\Sigma xy+a \Sigma x^2+b \Sigma x = 0$

அதாவது, $a \Sigma x^2+b \Sigma x = \Sigma xy$ ... ... (1)

$$\frac{\partial E}{\partial b} \equiv 2 \Sigma [y-(ax+b)] (-1) = 0$$

அதாவது, $\Sigma y-a \Sigma x-\Sigma b = 0$

அதாவது, $a \Sigma x+Nb = \Sigma y$ ... ... (2)

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு "மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகள்" (normal equations) என்று பெயர், இச்சமன் பாடுகளைத் தீர்த்து a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெற லாம். இம்மதிப்புக்களை $y = ax+b$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதி யிட்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்த மான நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

மாதிரி 87 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர் கோடு பொருத்துக.

x ...	0	5	10	15	20	25	30
y ...	10	14	19	25	31	36	39

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான நேர் கோட்டை $y = ax+b$ எனக் கொள்க. இச்சமன் பாட் டிற்குரிய மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$a \Sigma x+Nb = \Sigma y$ ... ... (1)

$a \Sigma x^2+b \Sigma x = \Sigma xy$ ... ... (2)

* வகை நுண் கணிதம் (Differential calculus) பற்றிய ஏதாவது ஒரு நூலினைப் பார்க்கவும்.

இங்கு N = 7 ; Σx, Σx^2, Σy, Σxy ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை பட்டியல் மூலம் பின்வருமாறு பெறுக.

x	y	xy	x^2
0	10	0	0
5	14	70	25
10	19	190	100
15	25	375	225
20	31	620	400
25	36	900	625
30	39	1170	900
105	174	3325	2275

இம்மதிப்புக்களை (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளில் பிரிதியிடவும்.

$$105a + 7b = 174$$

அல்லது, $15\,a + b = 24.857$ ... ... (3)

$$2275\,a + 105b = 3325$$

அல்லது, $21.667\,a + b = 31.667$ ... ... (4)

(4) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்கவும்.

$$6.667\,a = 6.810$$

$$\therefore \quad a = \frac{6.810}{6.667} = 1.02.$$

சமன்பாடு (3) இல் $a = 1.02$ என்று பிரிதியிடவும்.

$$15\,(1.02) + b = 24.857.$$

$$15.30 + b = 24.857$$

$$\therefore \quad b = 24.857 - 15.30 = 9.557.$$

ஆகவே, $y = 1.02\ x + 9.557$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடாகும்.

(2) பரவளையம் பொருத்துதல் :

(x_1, y_1), (x_2, y_2),......, (x_n, y_n) என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களெனக் கொள்க. இவ்விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான பரவளையத்தை $y = ax^2+bx+c$ எனக் கொள்க. இது ஒரு இரண்டாம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (**Second degree polynomial**) ஆகும். y^1 என்பது x க்குரிய y இன் மதிப்பீடு என்றால்,

$$d = y-y^1 = y-(ax^2+bx+c)$$

என்பது எச்சமாகும்.

$$\therefore \quad E = \Sigma d^2 = \Sigma [y-(ax^2bx+c)]^2.$$

E என்பது மீச்சிறு படி மதிப்பைப் பெற வேண்டுமானால்,

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

என்ற நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்படவேண்டும்.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\Sigma [y-(ax^2+bx+c)](-x^2) = 0.$$

$$\therefore \quad -\Sigma x^2y+a\Sigma x^4+b\Sigma x^3+c\Sigma x^2 = 0.$$

அதாவது. $a\Sigma x^4+b\Sigma x^3+c\Sigma x^2 = \Sigma x^2y \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\Sigma [y-(ax^2+bx+c)](-x) = 0.$$

$$\therefore \quad -\Sigma xy+a\Sigma x^3+b\Sigma x^2+c\Sigma x = 0.$$

அதாவது, $a\Sigma x^3+b\Sigma x^2+c\Sigma x = \Sigma xy \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2\Sigma [y-(ax^2+bx+c)](-1) = 0.$$

$$\therefore \quad -\Sigma y+a\Sigma x^2+b\Sigma x+\Sigma c = 0.$$

அதாவது, $a\Sigma x^2+b\Sigma x+Nc = \Sigma y \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1), (2), (3) ஆகிய மூன்று மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இம்மதிப்புக்களை

$$y = ax^2+bx+c$$

என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான பரவளைய சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

மாதிரி 88 :

பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பரவளையம் பொருத்துக.

x	...	1	3	5	7	9
y	...	3	10	36	77	150

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான பரவளையம்

$$y = ax^2+bx+c$$

எனக் கொள்க. a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடப் பயன்படுகின்ற மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகள் வருமாறு.

$$a\Sigma x^4+b\Sigma x^3+c\Sigma x^2 = \Sigma x^2y.$$
$$a\,\Sigma x^3+b\Sigma x^2+c\Sigma x = \Sigma xy.$$
$$a\,\Sigma x^2+b\,\Sigma x+\,Nc = \Sigma y.$$

இங்கு $N = 5$, Σx, Σx^2, Σx^3, Σx^4, Σy, Σxy, Σx^2y, ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வருமாறு கணக்கிடவும்.

x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
1	3	3	1	3	1	1
3	10	30	9	90	27	81
5	36	180	25	900	125	625
7	77	539	49	3773	343	2401
9	150	1350	81	12150	729	6561
25	276	2102	165	16916	1225	9669

இம்மதிப்புக்களை மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளில் பிரிதியிடவும்.

$$9669\,a+1225\,b+165\,c=16916$$

$$\therefore\quad 58.3\,a+7.4\,b+c=12.5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$1225\,a+165\,b+25\,c=2102$$

$$\therefore\quad 49\,a+6.6\,b+c=84.1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$165\,a+25\,b+5\,c=276$$

$$\therefore\quad 33\,a+5b+c=55.2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1) இலிருந்து (2) ஐக் கழிக்கவும்.

$$9.3\,a+0.8\,b=-71.6 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்கவும்.

$$16\,a+1.6\,b=28.9$$

அல்லது, $8a+0.8\,b=14.45 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

(4) இலிருந்து (5) ஐக் கழிக்கவும்.

$$1.3\,a=-86.5$$

$$a=-\frac{86.5}{1.3}=-6.62.$$

இதை (5) இல் பிரதியிடவும்.

$$-52.96+0.8\,b=14.45$$

$$\therefore\quad 0.8\,b=14.45+52.96=67.41$$

$$\therefore\quad b=\frac{67.41}{0.8}=84.26.$$

a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை (3) இல் பிரதியிட்டு c யின் மதிப்பைப் பெறவும்.

$$33\,(-6.62)+5\,(84.26)+c=55.2$$

$$-218.46+421.30+c=55.2$$

$$c=55.2+218.46-421.30$$

$$=-147.64$$

ஆகவே, $y = -6.62x^2 + 84.26x - 147.64$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான பரவளையச் சமன்பாடாகும்.

(3) $y = ae^{bx}$ என்ற அடுக்குக் குறிவளைவு பொருத்துதல் :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான வளைவு $y = ae^{bx}$ என்று கொள்க. இரு பக்கமும் மடக்கை மதிப்புக்கள் காண்க.

$$\therefore \quad \log_{10} y = \log_{10} a + bx \log_{10} e$$

இப்பொழுது, $\log_{10} y = Y$, $b \log_{10} e = A$, $\log_{10} a = B$ என்று பிரதியிடுக.

$\therefore$ $Y = Ax + B$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இது ஒரு நேர் கோட்டுச் சமன்பாடாகும். எனவே, A, B ஆகிய வற்றின் மதிப்புக்களை

$$A\,\Sigma x^2 + B\Sigma x = \Sigma x\,Y,$$

$$A\,\Sigma x + N\,B = \Sigma\,Y$$

என்ற மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறலாம். இம்மதிப்புக்களிலிருந்து a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

மாதிரி 89 :

பின்வரும் பட்டியல் ஒருவகைப் பூவிலுள்ள இதழ்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது. இவ்விவரத்திற்கு $y = ae^{bx}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள ஒரு அடுக்குக் குறிவளைவைப் பொருத்துக.

ஒரு பூவிலுள்ள இதழ்கள் (x) ...	5	6	7	8	9	10
பூக்களின் எண்ணிக்கை (y) ...	133	55	23	7	2	2

தீர்வு :

$$y = ae^{bx}$$

$$\therefore \quad \log_{10} y = \log_{10} a + bx \log_{10} e$$

இப்பொழுது,

$\log_{10} y = Y$, $b \log_{10} e = A$, $\log_{10} a = B$ என் கொள்க.

$$\therefore \quad Y = Ax + B.$$

இது ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு. ஆகவே, A, B ஆகிய வற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடு களிலிருந்து பெறலாம்.

$$A\ \Sigma x^2 + B\ \Sigma x = \Sigma x\ Y,$$

$$A\ \Sigma x + N\ B = \Sigma Y.$$

இங்கு $n = 6$; Σx, Σx^2, ΣY, ΣxY ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வருமாறு கணக்கிடவும்.

x	y	$Y = log_{10}\, y$	xY	x^2
5	133	2.12395	10.61975	25
6	55	1.74036	10.44216	36
7	23	1.36173	9.53211	49
8	7	0.84510	6.76080	64
9	2	0.30103	2.70927	81
10	2	0.30103	3.01030	100
45	—	6.67320	43.07439	355

இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டு பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

$$355\ A + 45\ B = 43.07439$$

$$\therefore\ 7.8889\ A + B = 8.957 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$45\ A + 6B = 6.67320$$

$$\therefore\ 7.5\ A + B = 1.1122 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) இலிருந்து (2)ஐக் கழிக்கவும்.

$$0.3889\ A = -0.1552$$

$$\therefore\ A = \frac{-0.1552}{0.3889} = -0.39907.$$

இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிடவும்.

$$7.5\,(-0.39907)+B=1.1122$$

$$\therefore \quad B=1,1122+2.9930=4.1052$$

ஆனால், $B=log_{10}\,a=4.1052$

$$\therefore \quad a=antilog\ 4.1052=12741.$$

$$b\ log_{10}\,e=A=-0.39907$$

$$\therefore \quad b=\frac{-0.39907}{log_{10}\,e}$$

$$=-0.39907\times log_e\,10$$

$$=-0.39907\times 2.30259$$

$$=-0.91889$$

$$=-0.92\ (\text{தோராயமாக})$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான அடுக்குக் குவளைவு

$$y=12741\,e^{-0.92\,x}$$ ஆகும்.

(4) $y=ax^b$ என்ற அடுக்குச் சார்பு பொருத்துதல் :

$$y=ax^b.$$

$$\therefore \quad log_{10}\,y=log_{10}\,a+b\ log_{10}\,x$$

இப்பொழுது, $log_{10}\,y=Y$, $log_{10}\,x=X$, $log_{10}\,a=c$ என்று பிரதியிடுக.

$\therefore$ $Y=b\,X+c$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இச்சமன்பாட்டிலுள்ள b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்துப் பெறலாம்.

$$b\ \Sigma X^2+c\ \Sigma X=\Sigma XY,$$

$$b\ \Sigma X+N\ c=\Sigma Y.$$

இவ்வாறு பெறப்படுகிற b, c ஆகியவற்றிலிருந்து a யின் மதிப்பைப் பெற்று $y=ax^b$ என்ற சமன்பாட்டை அமைக்கலாம்.

மாதிரி 90 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு $y = ax^b$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

x ...	1	1	15.85
y ...	10	31.62	100

தீர்வு :

$$y = ax^b$$

$$\therefore \quad log_{10}\, y = log_{10}\, a + b\, log_{10}\, x.$$

$log_{10}\, y = Y$, $log_{10}\, x = X$, $log_{10}\, a = c$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad Y = bX + c.$$

இது ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு. எனவே, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

$$b\, \Sigma X^2 + c \Sigma X = \Sigma XY,$$

$$b\, \Sigma X + N c = \Sigma Y.$$

இங்கு, $N = 3$; ΣX, ΣX^2, ΣY, ΣXY ஆகியவற்றைக் கீழ்க் கண்டவாறு கணக்கிடுக.

x	y	$X = log_{10}\, x$	$Y = log_{10}\, y$	XY	X^2
1	10	0	1	1	0
10	31.62	1	1.5	1.5	1
15.85	100	1.2	2	2.4	1.44
—	—	2.2	4.5	3.9	2.44

இம்மதிப்புக்களை மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளில் பிரதியிடுக.

$$2.44\,b + 2.2\,c = 3.9 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$2.2\,b + 3\,c = 4.5 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1) X 3 : $7.32\,b + 6.6\,c = 11.7$

(2) X 2.2: $4.84\,b + 6.6\,c = 9.9$

கழிக்கவும். $2.48\,b = 1.8$

$$\therefore \quad b = \frac{1.8}{2.48} = 0.7258.$$

(2)-இலிருந்து, $2.2\,(0.7258) + 3\,c = 4.5$

$$\therefore \quad 3\,c = 4.5 - 1.59676 = 2.9034$$

$$c = 0.96775.$$

ஆனல், $log_{10}\,a = c = 0.96775$

$$\therefore \quad a = antilog\,0.96775 = 9.2853.$$

ஆகவே, $y = (9.2853)\,x^{0.7258}$ என்பதுதான் கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான வளைகோடாகும்.

(5) $y = ab^x$ என்ற வளைகோடு பொருத்துதல் :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான வளைகோட்டை $y = ab^x$ என்று கொள்க.

$$\therefore \quad log_{10}\,y = log_{10}\,a + x\,log_{10}\,b$$

இப்பொழுது, $log_{10}\,y = Y$, $log_{10}\,a = A$, $log_{10}\,b = B$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad Y = A + Bx.$$

இது ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடாகும். எனவே, A, B ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்துப் பெறலாம்.

$$B\,\Sigma x^2 + A\,\Sigma x = \Sigma x\,Y,$$

$$B\,\Sigma x + N\,A = \Sigma\,Y.$$

A, B ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களிலிருந்து *a*, *b* ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெற்று, அவற்றை $y = ab^x$ என்ற சமன்

பாட்டில் பிரதியிட்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமான வளைகோட்டை அமைக்கலாம்.

மாதிரி 91 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு $Y = Ab^x$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

X ...	1	2	3	4	5
Y ...	21	24	32	57	98

(மதுரை பி.பி ஏ. **1972** ஏப்.)

தீர்வு :

$$Y = A\,b^x$$

$$\therefore \quad \log_{10} Y = \log_{10} A + X \log_{10} b.$$

இப்பொழுது,

$\log_{10} Y = y$; $\log_{10} A = a$, $\log_{10} b = B$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad y = a + BX.$$

இது ஒரு நேர் கோட்டுச் சமன்பாடு. எனவே, a, B ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பின்வரும் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறலாம்,

$$B\,\Sigma X^2 + a\,\Sigma X = \Sigma Xy,$$

$$B\,\Sigma X + Na = \Sigma y.$$

இங்கு $N = 5$; ΣX, ΣX^2, Σy, ΣXy ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

X	Y	$y = \log_{10} Y$	Xy	X^2
1	21	1.32222	1.32222	1
2	24	1.38021	2.76042	4
3	32	1.50515	4.51545	9
4	57	1.75587	7.02348	16
5	98	1.99123	9.95615	25
15	—	7.95468	25.57772	55

இம்மதிப்புக்களை மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளில் பிரதியிடவும்.

$$55\,B+15\,a = 25.57772.$$

அதாவது, $11\,B+3\,a = 5.115544$ ... ... (1)

$$15\,B+5\,a = 7.95468$$

$$\therefore\quad 3\,B+a = 1.590936$$

அதாவது, $9\,B+3\,a = 4.772808$ ... ... (2)

(1) இலிருந்து (2) ஐக் கழிக்கவும்.

$$2\,B = 0.342736$$

$$B = 0.171368.$$

ஆனால், $B = log_{10}\,b$

$$\therefore\quad b = antilog\ 0.171368 = 1.4839$$

இப்பொழுது, $3\,B+a = 1.590936.$

$$\therefore\quad a = 1.590936-3\,(0.171368)$$

$$= 1.590936-0.514104$$

$$= 1.076832$$

ஆனால், $a = log_{10}\,A$

$$\therefore\quad A = antilog\ a = antilog\ 1.076832$$

$$= 11.934.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான வளைகோடு

$Y = 11.934\,(1.4839)^x$ ஆகும்.

விஞத்தாள் 10.

(1) மீச்சிறு படிக் கொள்கையைக் கூறுக. ஒரு குறிப்பிட்ட (x, y) பட்டியலுக்கு அவ்விதியைப் பயன்படுத்தி, $y = a+bx+cx^2$ என்ற அமைப்பிலுள்ள பரவளைவு பொருத்தும் வகையை விளக்குக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

(2) மீச்சிறுபடி முறைப்படி ஒரு நேர்கோடு பொருத்தும் முறையினை விளக்குக.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

(3) மீச்சிறுபடிக் கொள்கை கொண்டு வளைவு பொருத்தும் முறையை, சிறப்பாக ஒரு பரவளைவு பொருத்துவதற்கேற்ப விளக்குக. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(4) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எங்ஙனம் பொருத்தப்படுகிறதென்பதை விளக்குக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

(5) மீச்சிறுபடி முறைப்படி $y = ae^{bx}$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைவு பொருத்தும் முயையினை விளக்குக.

(6) மீச்சிறுபடி முறைப்படி $y = Ab^x$ என்ற சமன்பாட்டு வளைவுப் பொருத்தும் வகையை விளக்குக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப். மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(7) மீச்சிறுபடிக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி $y = Ax^b$ என்ற சமன்பாட்டு வளைவைப் பொருத்தும் முறையினை விளக்குக.

(8) மீச்சிறுபடி முறை என்பது பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

(9) சிறு குறிப்பு வரைக:

மீச்சிறுபடி முறை.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்., பி.பி ஏ. 1971 செப்.)

பயிற்சி 10.

(1) பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோடு பொருத்துக.

x ...	5	10	15	20	25
y ...	16	19	23	26	30

(2) பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோடு பொருத்துக.

x ...	0	1	2	3	4
y ...	1	1.8	3.3	4.5	6.3

(3) பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு இரண்டாம் படிப் பரவளையம் பொருத்துக.

x ...	0	12	24	36	48
y ...	38	56	68	80	70

(4) பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு பரவளையம் பொருத்துக.

x ...	0	1	2	3	4	5	6
y ...	14	18	23	29	36	40	46

(5) பின்வரும் விவரங்களுக்கு $y = ae^{bx}$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

x ...	1	2	3	4	5	6	7	8
y ...	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

(6) பின்வரும் விவரங்களுக்கு $y = ae^{bx}$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடுச் சமன்பாடு பொருத்துக,

x ...	0	2	4
y ...	5.012	10	31.62

(7) பின்வரும் விவரங்களுக்கு $y = ax^b$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

x ...	5	6	7	8	9
y ...	4.0	2.8	2.0	1.6	1.2

(8) பின்வரும் விவரங்களுக்கு $y = \mathrm{A}\, b^x$ என்ற அமைப்பில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

x ...	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y ...	8.2	16.0	35.0	40.0	47.5

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

10. தொடர்புக் கோடுகள்
(REGRESSION LINES)

சிதறல் விளக்கப்படம் **(Scatter Diagram):**

இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரைபட முறையிலும் காணலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு மாறிகளுள் சாரா மாறியை x எனவும், சார்புடை மாறியை y எனவும் கொள்க. $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ என்பன மாறி x இன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களெனவும், $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ என்பன மாறி y இன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களெனவும் கொள்க. மாறி xஇன் மதிப்புக்களைக் கிடையச்சிலும், மாறி yஇன் மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அச்சிலும் பொருத்தமான அளவு கோல்களைக் கொண்டு குறித்துக் கொள்ளவும். இப்பொழுது, (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots\ldots$ ஆகிய சோடி மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவ்வாறு இரு மாறிகளின் சோடி மதிப்புகளுக் குரிய புள்ளிகளைக் கொண்ட வரைப்படத்திற்குச் "சதறல் விளக்கப் படம்" (Scatter diagram) என்று பெயர். இச்சிதறல் விளக்கப் படத்தில் புள்ளிகள் பரவிக்கிடக்கின்ற தன்மைகளைக் கொண்டு இரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை நிர்ணயிக்கலாம்.

சிதறல் விளக்கப் படத்திலுள்ள புள்ளிகள் யாவும் இடமிருந்து வலமாக ஏறுமுகமான ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் இரு மாறிகளுக்கிடையே "நேரிடை நிறை ஒட்டுறவு" (positive perfect correlation) இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எல்லாப் புள்ளிகளும் இடமிருந்து வலமாக இறங்கு முகமான ஒரு நேர் கோட்டின் மேலிருந்தால் இரு மாறிகளுக் கிடையே "எதிரிடை ஒட்டுறவு" (negative perfect correlation) இருப்பதாகவும், ஒரு கிடைக் கோட்டின்மேல், அல்லது ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லையென்றும் கொள்ளலாம். ஆனல், பெரும்பாலும் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒரு நேர் கோட்

டின் மேல் அமைவதில்லை. எனவே, மீச்சிறுபடிக் கொள்கையின்படி பெரும்பான்மையான புள்ளிகளின் வழியே செல்லக் கூடிய ஒரு நேர் கோட்டை அமைக்கவேண்டும். இந்த நேர் கோடு, இடமிருந்து வலமாக ஏறுமுகமாக யிருந்தால் இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு நேரிடையான தென்றும், இறங்கு முகமாயிருந்தால் எதிரிடையான தென்றும் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு இரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவின் தன்மையை வரை படம் மூலம் காணலாம். இரண்டு காலம் சார் தொடர் வரிசைகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை அவற்றின் சிதறல் படத்திலிருந்து அளவிடலாம். சிதறல் படத்திலிருந்து இரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவை அறிந்து கொள்வதோடு சாரா மாறியின் ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய சார்புடை மாறியின் மதிப்பை மதிப்பிடவும் முடியும். சிதறல் படத்திலுள்ள புள்ளிகளுக்குப் பொருத்துகின்ற நேர் கோடு பெரும்பாலான புள்ளிகளின் வழியே செல்லுமாறு வரையப்படுவதால் ஒரு சில மிகப் பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய உறுப்புக்களால் இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவு பாதிக்கப்படுவதில்லை.

தொடர்புக் கோடுகள் (Regression Lines) :

x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு காணப்பட்டால் அம்மாறிகளுக்குரிய சிதறல் விளக்கப் படத்தில் மாறிகளின் சோடி மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகள் ஒரு வளை கோட்டைச் சுற்றிக் குவிந்து கிடப்பது போன்று தோன்றும். இவ்வளை கோட்டிற்கு "மாறிகளின் தொடர்பு வளை கோடு" (curve of regression) என்று பெயர். அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்புக்கு "வளைகோட்டுத் தொடர்பு" (curvilinear regression) என்று பெயர். குறிப்பாக, சிதறல் படத்திலுள்ள புள்ளிகள் யாவும் ஒரு நேர் கோட்டைச் சுற்றி குவிந்து கிடந்தால் அம்மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பு "நேர்கோட்டுத் தொடர்பு" (linear regression) என்றும், அந்த நேர்கோடு "மாறிகளின் தொடர் கோடு" (regression line) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன. இத்தொடர் கோடு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புக்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான நேர் கோடாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து மீச்சிறுபடி முறையில் பொருத்தப்படுகின்ற நேர்கோடுதான் அவ்விரு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடாகும்.

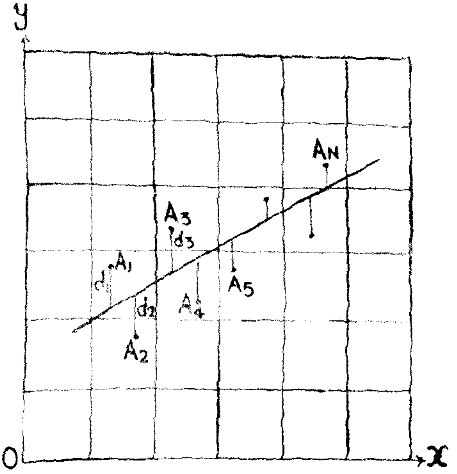
இரண்டு தொடர்பு கோடுகள் இருப்பதேன் ?

x, y என்ற மாறிகளின் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),......என்ற மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைச் சிதறல் விளக்கப் படத்தில் A_1,

A_2, A_3,...... என்று குறிக்கவும். இப்பொழுது, பெரும்பாலான புள்ளிகள் வழியே செல்லுமாறு ஒரு நேர் கோடு வரைக. ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் இந்த நேர்கோட்டிற்கு ஒரு நிலைக் குத்துக் கோடு வரைந்து நிலைக்குத்து தூரத்தை அளவிடுக. இந்த நேர்கோட்டிலிருந்து புள்ளிகளின் நிலைக்குத்து விலக்கங்களை d_1, d_2, d_3,...... என்று குறிப்பிடுக. இந்த நிலைக்குத்து விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை S_1 என்று குறிப்பிடுக. அதாவது,

$$S_1 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots\ldots = \Sigma d^2.$$

இதுபோல், பலநேர் கோடுகள் வரைந்து, S_1, S_2, S_3, ... நிலைத்தூர விலக்க வர்க்க மொத்தங்களைக் கணக்கிடுக. இவற்றுள் மிகச் சிறிய நிலைத்தூர விலக்க வர்க்க மொத்தத்தையுடைய நேர்கோடுதான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான நேர் கோடாகும். இவ்வாறு மீச்சிறு நிலைத்தூர விலக்க வர்க்க மொத்தத்தையுடைய நேர்கோட்டைப் பொருத்தமான நேர்கோடாகக் கொள்ளுகின்ற முறைக்கு "மீச்சிறு இருபடி முறை" (method of least squares) என்று பெயர். இவ்வாறு மீச்சிறு நிலைத்தூர விலக்க வர்க்க மொத்தத்தையுடைய நேர்கோட்டிற்கு "xஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு" (Regression line of y on x) என்று பெயர். படம் பார்க்கவும்).

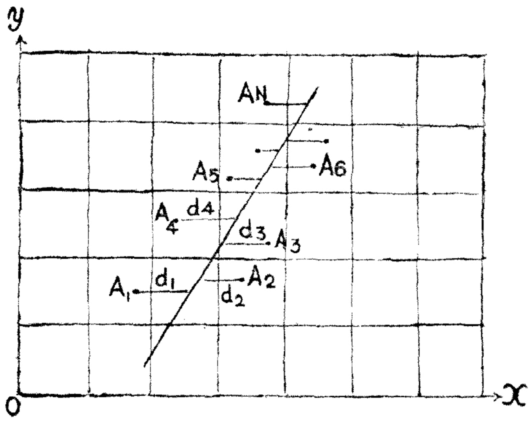


படம் 28.

x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு

இந்தத் தொடர்பு கோட்டின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x இன் மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான y இன் சிறந்த மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம். x-அச்சுடன் இத்தொடர்புக் கோட்டின் சரிவு (slope) க்கு "x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு" (regression coefficient of y on x) என்று பெயர்.

மாருக A_1, A_2, A_3,...... என்ற புள்ளிகளிலிருந்து நேர் கோட்டிற்குள்ள கிடைத் தூரங்களின் (horizontal distances) வர்க்கங்களின் மொத்தம் மீச்சிறிதாக யிருக்குமாறு வரையப்படுகின்ற நேர்கோட்டிற்கு "y ஐச் சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கோடு" (Regression line of x on y) என்று பெயர்.



படம் 29.

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கோடு

இத்தொடர்புக் கோட்டின் மூலம் y இன் மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான x இன் சிறந்த மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம். y அச்சுடன் இத்தொடர்புக் கோட்டின் சரிவுக்கு "y ஐச் சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு" (regression coefficient of x on y) என்று பெயர். ஆகவே, ஒட்டுறவுள்ள x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கு இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளிருக்கின்றன என்றும், இவ்விரு தொடர்புக் கோடுகளும் வெவ்வேருனவை யென்றும் அறிகிருேம். மேலும், இவ்விரு தொடர்புக் கோடுகளும் மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் குறிக்கின்ற $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுவதைக் காணலாம்.

தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் ;

$y = a+bx$ என்பது x, y என்ற இரு மாறிகளின் (x_1, y_1), (x_2, y_2),......, (x_n, y_n) என்ற புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமான "x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடு" என்க. இச்சமன்பாட்டில் $x = x_1, x_2 ......, x_n$ என்ற மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டு

$y_1^1 = a+bx_1$, $y_2^1 = a+bx_2$,..........., $y_n^1 = a+bx_n$ என்ற y இன் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம். $d_1, d_2, d_3,......, d_n$ என்பன y இன் உண்மையான மதிப்புகளுக்கும், மேலே கணக்கிடப் பட்ட மதிப்பீடுகளுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களென்றால்,

$$d_1 = y_1 - y_1^1 = y_1 - (a+bx_1),$$
$$d_2 = y_2 - y_2^1 = y_2 - (a+bx_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_n = y_n - y_n^1 = y_n - (a+bx_n)$$ ஆகும்.

$d_1, d_2,......, d_n$ என்ற இவ்விலக்கங்களைப் பொதுவாக

$$d = y - (a+bx)$$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது,

$$S = d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2 = \Sigma d^2 = \Sigma\, [y - (a+bx)\,]^2$$

என்று கொள்க. மீச்சிறுபடிக் கொள்கைப்படி S மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறவேண்டுமானால் $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ ஆகவேண்டும்.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\,\Sigma\,[y - (a+bx)\,]\,(-1) = 0$$

அதாவது, $-\Sigma y + \Sigma a + b\Sigma x = 0$.

அதாவது, $Na + b\Sigma x = \Sigma y$.

அல்லது, $a + b\,\frac{\Sigma x}{N} = \frac{\Sigma y}{N}$

அதாவது, $a + b\,\bar{x} = \bar{y}$ ... ... (1)

ஆகவே, x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லுகிறதென்பதை இச்சமன்பாட்டிலிருந்து தெரிந்து கொள்கிறோம்.

$$\therefore \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\,\Sigma\,[y - (a+bx)\,]\,(-x) = 0.$$

அதாவது, $-\Sigma xy + a\Sigma x + b\Sigma x^2 = 0.$

அவாவது, $a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy.$

அல்லது, $a\dfrac{\Sigma x}{N} + b\,\dfrac{\Sigma x^2}{N} = \dfrac{\Sigma xy}{N}$

அதாவது, $a\bar{x} + b\,\dfrac{\Sigma x^2}{N} = \dfrac{\Sigma xy}{N}$ ... ... (2)

(1) $X\bar{x}$: $\quad a\bar{x} + b\bar{x}^2 = \bar{x}\bar{y}$

கழிக்கவும். $b\left(\dfrac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2\right) = \dfrac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}$

$$\therefore \quad b = \frac{\dfrac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\dfrac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^{\,2}}$$

ஆனல் விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி

$$P_{xy} = \frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$$

அதாவது, $P_{xy} = \dfrac{1}{N}\,\Sigma\,(xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x}\bar{y})$

$$= \frac{\Sigma xy}{N} - \bar{y}\,\frac{\Sigma x}{N} - \bar{x}\,\frac{\Sigma y}{N} + \frac{\Sigma \bar{x}\bar{y}}{N}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{N} - \bar{y}\bar{x} - \bar{x}\bar{y} + \frac{N\bar{x}\bar{y}}{N}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

மேலும், $r = \dfrac{P_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$

$$\therefore \quad P_{xy} = r\,\sigma_x\,\sigma_y.$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y} = r\,\sigma_x\,\sigma_y.$$

$$\therefore \quad b = \frac{r\,\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x^2} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

இப்பொழுது, $a = \bar{y} - b\bar{x}$, $b = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ என்ற மதிப்புக்களை $y = a + bx$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

$$y = a + bx$$

$$= \bar{y} - b\bar{x} + bx$$

$$\therefore \quad y - \bar{y} = b\,(x - \bar{x})$$

அதாவது, $y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ என்பது x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புச் சமன்பாடாகும்.

$$b = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2} \text{ என்பது}$$

x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு ஆகும். மேலும், $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ என்ற பிரதியீடுகள் இத்தொடர்புச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்வதால் x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லுகிறதென்று அறிகிறோம்.

இதுபோன்று y ஐச் சார்ந்த x இன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

என்றும், y ஐச் சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு

$$r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2}$$

என்றும் அறிந்து கொள்ளலாம். இத்தொடர்புக் கோடும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லுமாகையால், இரு தொடர்புக் கோடுகளும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன என்று தெரிகிறது.

குறிப்பு 1. ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் போன்று தொடர்புக் கெழுவும் ஆதி மாற்றத்தால் பாதிக்கப் படுவதில்லையாகையால்,

$$u = (x - \mathrm{A}), \quad \sim = (y - \mathrm{B})$$

என்ற தொடர்புகளின் மூலம் x, y ஆகிய மாறிகளை $u, \sim$ என்ற மாறிகளாக மாற்றி $u, \sim$ ஆகியவற்றின் தொடர்புக் கெழுக் களையே x, y ஆகியவற்றின் தொடர்புக் கெழுக்களாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே,

x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு $=$ u சார்ந்த $\sim$ இன் தொடர்புக் கெழு.

அதாவது, $$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r\frac{\sigma\sim}{\sigma u} = \frac{\dfrac{\Sigma u\sim}{\mathrm{N}} - \bar{u}\approx}{\dfrac{\Sigma u^2}{\mathrm{N}} - \bar{u}^2}$$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு $=$ $\sim$ சார்ந்த u இன் தொடர்புக் கெழு.

அதாவது, $$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r\frac{\sigma u}{\sigma\sim} = \frac{\dfrac{\Sigma u\sim}{\mathrm{N}} - \bar{u}\approx}{\dfrac{\Sigma\sim^2}{\mathrm{N}} - \approx^2}$$

குறிப்பு 2. இரு தொடர்புக் கெழுக்களின் பெருக்கற் பலன் நிர்ணயக் கெழுவிற்குச் சமமாகும்.

x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு $= r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு $= r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$\therefore$ இரு தொடர்புக் கெழுக்களின் பெருக்கற் பலன்

$$= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r^2 = \text{நிர்ணயக் கெழு.}$$

குறிப்பு 3. பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் தனி மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட இயலாது.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$, என்பன x, y, ஆகிய மாறிகளின் N சோடி மதிப்புக்களெனக் கொள்க. இம் மதிப்புக்களிலிருந்து பெறப்பட்ட xஐச் சார்ந்த y_nஇன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ஆகும். இச்சமன்பாட்டில் $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகிய x இன் மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படுகின்ற y இன் மதிப்பீடுகளை $y_1{}^1, y_2{}^1, \ldots\ldots, y_n{}^1$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ y_1{}^1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_1 - \bar{x}) + \bar{y}$$

$$y_2{}^1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_2 - \bar{x}) + \bar{y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n{}^1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_n - \bar{x}) + \bar{y}.$$

பொதுவாக, $y^1 = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) + \bar{y}$ என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது, $d_1 = y_1 - y_1{}^1$, $d_2 = y_2 - \bar{y}_2, \ldots\ldots\ldots$, $d_n = y_n - y_n{}^1$ என்று எழுதுக. அதாவது, பொதுவாக

$$d = y - y^1$$

$$= y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) - \bar{y}$$

$$= (y - \bar{y}) - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ஆகும். $S^2 = \dfrac{1}{N}(d_1{}^2 + d_2{}^2 + \ldots\ldots + d_n{}^2) = \dfrac{1}{N}\Sigma d^2$ என்றால்,

$$S^2 = \frac{1}{N}\Sigma\left[(y - \bar{y}) - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})\right]^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma \left[(y-\bar{y})^2 + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} (x-\bar{x})^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x-\bar{x}) (y-\bar{y}) \right]$$

$$= \frac{\Sigma (y-\bar{y})^2}{N} + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{N} - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Sigma (x-\bar{x}) (y-\bar{y})$$

$$= \sigma_y^2 + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \cdot \sigma_x^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} P_{xy}.$$

$$= \sigma_y^2 + r^2 \sigma_y^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r \sigma_x \sigma_y$$

$$= \sigma_y^2 + r^2 \sigma_y^2 - 2r^2 \sigma_y^2$$

$$= \sigma_y^2 - r^2 \sigma_y$$

அதாவது, $S^2 = \sigma_y^2 (1-r^2)$

ஆனால் S^2 என்பது N வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகையால் எப்பொழுதும் நேரெண்ணாகவே யிருக்கும் அதாவது,

$$S^2 \geq 0$$

$$\therefore \quad \sigma_y^2 (1-r^2) \geq 0$$

$$\therefore \quad 1-r^2 \geq 0$$

$$\therefore \quad r^2 \leq 1$$

எனவே r இன் தனி மதிப்பு $|r| \leq 1$.

அதாவது, r இன் தனி மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்படாமல் -1 க்கும் $+1$ க்கும் இடையேதான் எப்பொழுது மிருக்கும்.

குறிப்பு. $r = +1$ ஆனால், x சார்ந்த y இன் தொடர்புச் சமன்பாடு :

$$y-\bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x-\bar{x}).$$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புச் சமன்பாடு :

$$x-\bar{x} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y-\bar{y}).$$

அதாவது, $y-\bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$.

ஆகவே, $r = +1$ ஆனால் இரு தொடர்புக் கோடுகளும் ஒன்றாகி விடுகின்றன. இதுபோல், $r = -1$ ஆனாலும் இரு தொடர்புக் கோடுகளும் ஒன்றாகிவிடுவதை காணலாம்.

மாதிரி 92 :

முறையே x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் 65, 67; திட்ட விலக்கங்கள் 2.5, 3.5; என்றும், அவைகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு 0.8 என்றும் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளை எழுதுக.

(ii) $y = 70$ ஆனால் x இன் சிறந்த மதிப்பீட்டைப் பெறுக.

(iii) x இன் இந்த மதிப்பீட்டையே x இன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பாகக் கொண்டு y இன் மதிப்பை மதிப்பிடுக.

(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

தீர்வு :

$$\bar{x} = 65,\ \bar{y} = 67;\ \sigma_x = 2.5,\ \sigma_y = 3.5;\ r = 0.8.$$

(i) x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு $= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.8 \times \frac{3.5}{2.5}$

$= 1.12.$

$\therefore$ x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு:

$$y-\bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

அதாவது, $y-67 = 1.12\ (x-65)$.

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு $= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0.8 \times \frac{2.5}{3.5}$

$= 0.57$

$\therefore$ y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கோடு:

$$x-\bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

அதவாவது, $x-65 = 0.57\,(y-67)$.

(ii) $y = 70$ ஆனால் x இன் மதிப்பை y சார்ந்த x இன் தொடர்புச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறவேண்டும்.

$$\therefore \quad x-65 = 0.57\,(70-67) = 0.57\,(3) = 1.71$$

$$\therefore \quad x = 1.71+65 = 66.71.$$

(iii) $x = 66.71$ ஆனால், $y-67 = 1.12\,(x-65)$

$$= 1.12\,(66.71-65)$$

$$= 1.12\,(1.71)$$

$$= 1.92$$

$$\therefore \quad y = 1.92+67 = 68.92.$$

மாதிரி 93 :

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து, பம்பாய் விலை ரூ. 70 ஆக யிருக்கும்போது சென்னை விலையின் மதிப்பீட்டையும் சென்னை விலை ரூ 68 ஆக யிருக்கும்போது பம்பாய் விலையின் மதிப்பீட்டையும் காண்க.

	சென்னை	பம்பாய்
சராசரி விலை	ரூ. 65	ரூ. 67
விலைகளின் திட்ட விலக்கம்	ரூ. 0.5	ரூ. 3.5

சென்னை, பம்பாய் விலைகளின் வித்தியாசங்களின் திட்ட விலக்கம் ரூ. 3.1.

தீர்வு :

சென்னை விலையை x என்றும், பம்பாய் விலையை y என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad \bar{x} = 65,\ \bar{y} = 67;\ \sigma_x = 0.5,\ \sigma_y = 3.5.$$

$$\sigma_{x-y} = 3.1$$

இப்பொழுது, $$r = \frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{(0.5)^2+(3.5)^2-(3.1)^2}{2\,(0.5)\,(3.5)}$$

$$= \frac{0.25+12.25-9.61}{3.5}$$

$$= \frac{2.89}{3.5}$$

$$= 0.83.$$

∴ x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு $= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$$= 0.83 \times \frac{3.5}{0.5} = 5.81$$

∴ x சார்ந்த y இன் தொடர்புச் சமன்பாடு :

$$y-\bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

அதாவது, $y-67 = 5.81\ (x-65)$

சென்னை விலை $x = 68$ ஆனால்,

$$y-67 = 5.81\ (68-65) = 5.81\ (3) = 17.43$$

∴ பம்பாய் விலை $y = 17.43+67$

$= ரூ.\ 84.43.$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு $= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0.83 \times \frac{0.5}{3.5}$

$= 0.12$

∴ y சார்ந்த x இன் தொடர்புச் சமன்பாடு :

$$x-\bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

அதாவது, $x-65 = 0.12\ (y-67)$

பம்பாய் விலை $y =$ ரூ. 70 ஆனால்,

$$x-65 = 0.12\ (70-67) = 0.36$$

∴ சென்னை விலை $x = 0.36+65 =$ ரூ. 65.36.

மாதிரி 94:

$x+3y=6$, $2x+3y=10$ என்பன இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள். $\sigma_x=2$ என்றால், σ_y, r ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

தீர்வு:

இரண்டு சமன்பாடுகளுள் x சார்ந்த y இன் தொடர்புச் சமன்பாடு, எது y சார்ந்த x இன் சமன்பாடு என்று முதலில் தீர்மானிக்கவேண்டும். முதல் சமன்பாட்டை x சார்ந்த y இன் சமன்பாடு என்றும் இரண்டாவது சமன்பாட்டை y சார்ந்த x இன் சமன்பாடு என்றும் கொண்டால்,

$$3y=-x+6$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+2.$$

$$\therefore\ r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=-\frac{1}{3} \text{ என்றும்,}$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$2x=-3y+10$$

$$\therefore\ x=-\frac{3}{2}y+5$$

$$\therefore\ r=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=-\frac{3}{2} \text{ என்றும் கிடைக்கின்றன.}$$

$$\therefore\ r^2=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.\,r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}=0.5<1.$$

r^2 இன் மதிப்பு 1ஐ விட குறைவாக யிருப்பதால், முதல் சமன்பாடு x சார்ந்த y இன் சமன்பாடு என்பதும், இரண்டாவது சமன்பாடு y சார்ந்த x இன் சமன்பாடு என்பதும் சரியென்று கொள்ளவேண்டும். மாறாக, r^2 இன் மதிப்பு 1ஐ விட அதிகமாக யிருப்பின் சமன்பாடுகளை மாற்றி எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

மேலும், இரண்டு தொடர்புக் கெழுக்களும் எதிரெண்களாக யிருப்பதால் r இன் மதிப்பும் எதிரெண்ணாகவே யிருக்கும்.

$$\therefore \quad r = -\sqrt{0.5} = -0.7.$$

இப்பொழுது, $r \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = -\dfrac{1}{3}$

$$\therefore \quad \sigma_y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_x}{r} = -\frac{1}{3}\frac{2}{(-0.7)} = \frac{2}{2.1} = 0.95$$

மாதிரி 95 :

தகப்பனார்கள், மகன்கள் ஆகியோரின் உயரங்கள் சென்டிமீட்டர்களில் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தகப்பன் உயரம் ...	158	160	163	165	167	170	167
	172	177	181				
மகன் உயரம் ...	163	158	167	170	160	180	170
	175	172	175				

(சென்னை பி.காம். 1967 ஏப்.)

தீர்வு :

தகப்பனார் உயரம் x என்றும், மகனின் உயரம் y என்றும் கொள்க.

x	y	u = $(x-167)$	~ = $(y-170)$	u~	u^2	~^{2}
158	163	−9	−7	63	81	49
160	158	−7	−12	84	49	144
163	167	−4	−3	12	16	9
165	170	−2	0	0	4	0
167	160	0	−10	0	0	100
170	180	3	10	30	9	100
167	170	0	0	0	0	0
172	175	5	5	25	25	25
177	172	10	2	20	100	4
181	175	14	5	70	196	25
1680	1690	10	−10	304	480	456

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{1680}{10} = 168; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{1690}{10} = 169.$$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma u}{N} = \frac{10}{10} = 1, \quad \bar{v} = \frac{\Sigma v}{N} = \frac{-10}{10} = -1.$$

$$\bar{u}^2 = 1; \quad \bar{v}^2 = 1; \quad \bar{u}\bar{v} = -1.$$

$$\frac{\Sigma uv}{N} - \bar{u}\bar{v} = \frac{304}{10} - (-1) = 30.4 + 1 = 31.4$$

$$\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{480}{10} - 1 = 48 - 1 = 47.$$

$$\frac{\Sigma v^2}{N} - \bar{v}^2 = \frac{456}{10} - 1 = 45.6 - 1 = 44.6.$$

x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கெழு $= r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{\dfrac{\Sigma uv}{N} - \bar{u}\bar{v}}{\dfrac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2}$

$$= \frac{31.4}{47} = 0.67$$

∴ x சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோடு ;

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

அதாவது, $y - 169 = 0.67\,(x - 168)$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கெழு $= r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \dfrac{\dfrac{\Sigma uv}{N} - \bar{u}\bar{v}}{\dfrac{\Sigma v^2}{N} - \bar{v}^2}$

$$= \frac{31.4}{44.6} = 0.704.$$

y சார்ந்த x இன் தொடர்புக் கோடு :

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

அதாவது, $x - 168 = 0.704\,(y - 168)$

தகப்பனாரின் உயரம் $x = 164$ ஆனால் மகனின் உயரம் y ஐ x சார்ந்த y இன் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறவேண்டும்.

$$y - 169 = 0.67\,(x - 168)$$

$$= 0.67\,(164 - 168)$$

$$= 0.67\,(-4)$$

$$= -2.68$$

$$\therefore \quad y = -2.68 + 169 = 166.32$$

மகனின் உயரம் $= 166.32$ செ.மீ.

மாறுபாட்டு விகிதம் (Ratio of Variation):

ஒட்டுறவுள்ள x, y என்ற இரு மாறிகளைக் கருதுக. இவ்விரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $+1$ ஆனால் x, y ஆகியவற்றின் ஏற்ற விறக்கங்கள் ஒரே விகிதத்திலிருக்கும். x, y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு $+1$ க்குக் குறைவான நேரெண்ணாக யிருந்தாலும் சாராமாறி ஏறும் போது சார்புடைய மாறியும் ஏறும்; சாராமாறி இறங்கும்போது சார்புடை மாறியும் இறங்கும். ஆனால் இரு மாறிகளின் ஏற்ற விறக்கங்கள் சம விகிதத்திலிருக்காது. ஆகவே, சாரா மாறியின் ஏற்ற விறக்கங்களின் எந்த விகிதத்தில் சார்புடை மாறியின் ஏற்ற விறக்கங்கலிருக்கின்றன என்று அறிந்து கொள்வது பொருளாதார ஆய்வுகட்கு இன்றியமையாததாகும். சாராமாறியாகிய x இன் மதிப்பு $\bar{x}$ இலிருந்து 1% மாறும்போது சார்புடை மாறியாகிய y இன் மதிப்பு $\bar{y}$ இலிருந்து மாறுகின்ற மாறுபாட்டுக்கும் x இன் 1% மாறுபாட்டுக்கு முள்ள விகிதத்துக்கு மாறுபாட்டு விகிதம் (Ratio of Variation) என்று பெயர்.

மாறுபாட்டு விகிதமும் தொடர்புக் கெழுவும்:

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),...... என்பன ஒட்டுறவுள்ள x, y என்ற மாறிகளின் சில மதிப்புக்களைக் கொள்க. $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பன x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் என்றால்,

$\frac{x_1}{\bar{x}} \times 100, \frac{x_2}{\bar{x}} \times 100,$ ...... என்பன மாறி x இன் சதவீதச் சார்புகள் (percentage relatives) என்றும் $\frac{y_1}{\bar{y}} \times 100, \frac{y_2}{\bar{y}} \times 100,$

...... என்பன மாறி y இன் சதவீதச் சார்புகளென்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இச்சதவீதச் சார்புகளை முறையே X, Y என்ற மாறிகளால் குறிப்பிடுக. இவ்விரு சதவீதச் சார்பு மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களைக் காண்க. குறைந்த திட்ட விலக்கத்தைக் கொண்ட மாறி (இங்கு X எனக் கொள்க) யின் மதிப்புக்களைக் கிடையச்சிலும், அடுத்த மாறி (Y) இன் மதிப்புக்களை நிலைக் குத்து அச்சிலும் கொண்டு, சதவீதச் சார்பு மதிப்புக்களுக்குரிய சிதறல் படம் வரைக. இப்பொழுது, X ஐச் சார்ந்த Y இன் தொடர்புக் கோடு வரைக. இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற வரைப்படத்துக்குக் "கால்டன் வரை படம்" (Galton Graph) என்று பெயர். நிலைக்குத்து அச்சுடன் X ஐச் சார்ந்த Y இன் தொடர்புக் கோட்டின் சரிவிலிருந்து மாறுபாட்டு விகிதத்தைப் பெறலாம் ஆனால் கிடையச்சுடன் X ஐச் சார்ந்த Y இன் தொடர்புக் கோட்டின் சரிவுதான் X ஐச் சார்ந்த Y இன் தொடர்புக் கெழு என்று நாமறிவோம். ஆகவே, X ஐச் சார்ந்த Y இன் தொடர்புக் கெழுவின் தலைகீழ் விகிதம் (reciprocal) தான் x, y மாறிகளின் மாறுபாட்டு விகிதமாகும். ஆகவே, கால்டன் வரைபடம் வரையாமலேயே சதவீதச் சார்பு மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவிலிருந்து மாறுபாட்டு விகிதத்தைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 96 :

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து x, y ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டு விகிதத்தைக் காண்க.

x ...	79	52	33	55	46	62	31	34
y ...	49	40	25	35	35	34	34	28

தீர்வு :

முதலில் x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை அவைகளுடைய கூட்டுச் சராசரிகளின் சதவீதச் சார்புகளாக மாற்றுக.

x	y	$X = \frac{x}{\bar{x}} \times 100$	$Y = \frac{y}{\bar{y}} \times 100$
79	49	$\frac{79}{49} \times 100 = 161$	$\frac{49}{35} \times 100 = 140$
52	40	$\frac{52}{49} \times 100 = 106$	$\frac{40}{35} \times 100 = 114$
33	25	$\frac{33}{49} \times 100 = 67$	$\frac{25}{35} \times 100 = 71$
55	35	$\frac{55}{49} \times 100 = 112$	$\frac{35}{35} \times 100 = 100$
46	35	$\frac{46}{49} \times 100 = 94$	$\frac{35}{35} \times 100 = 100$
62	34	$\frac{62}{49} \times 100 = 126$	$\frac{34}{35} \times 100 = 97$
31	34	$\frac{31}{49} \times 100 = 63$	$\frac{34}{35} \times 100 = 97$
34	28	$\frac{34}{49} \times 100 = 69$	$\frac{28}{35} \times 100 = 80$
392	280		

$$\bar{x} = \frac{392}{8} = 49 ; \quad \bar{y} = \frac{280}{8} = 35.$$

இப்பொழுது, X, Y ஆகியவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள், தொடர்புக் கெழுக்கள் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

X	Y	$u=(X-100)$	$\sim=Y-100$	$u\sim$	u^2	$\sim^2$
161	140	61	40	2440	3721	1600
106	114	6	14	84	36	196
67	71	−33	−29	957	1089	841
112	100	12	0	0	144	0
94	100	− 6	0	0	36	0
126	97	26	− 3	−78	676	9
63	97	−37	− 3	111	1369	9
69	80	−31	−20	620	961	400
		− 2	− 1	4134	8032	3055

$$\bar{u} = \frac{-2}{8} = -0.25, \quad \bar{\sim} = \frac{-1}{8} = -0.125$$

$$\bar{u}\,\bar{\sim} = (-0.25)(-0.125) = 0.03; \quad \bar{u}^2 = 0.06; \quad \bar{\sim}^2 = 0.02$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{8032}{8} - 0.06 = 1004 - 0.06 = 1003.94$$

$$\sigma_\sim^2 = \frac{\Sigma \sim^2}{N} - \bar{\sim}^2 = \frac{3055}{8} - 0.02 = 381.875 - 0.02$$

$$= 381.855$$

α_u^2 ஐவிட $\alpha_\sim^2$ குறைவாக யிருப்பதால் σ_x ஐவிட σ_y குறைவாக யிருக்கும் ஆகவே, Y ஐக் கிடையச்சில் குறிக்க வேண்டும். ஆகவே, Y ஐச் சார்ந்த X இன் தலைகீழ் விகிதமே மாறுபாட்டு விகிதமாகும்.

Y ஐச் சார்ந்த X இன் தொடர்புக் கெழு $= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \dfrac{\dfrac{\Sigma u\sim}{N} - \bar{u}\,\bar{\sim}}{\dfrac{\Sigma\sim^2}{N} - \bar{\sim}^2}$

$$= \frac{\frac{4134}{8} - 0.03}{\frac{3055}{8} - 0.02}$$

$$= \frac{516.75 - 0.03}{381.875 - 0.02}$$

$$= \frac{516.72}{381.855}$$

$$= 1.35.$$

$\therefore$ x, y ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டு விகிதம் $= \frac{1}{1.35} = 0.74.$

நெகிழ்ச்சி (Elasticity):

ஒரு நாட்டின் வருமானம் 5% அதிகரித்திருப்பதன் காரணமாக அந்த நாட்டின் இறக்குமதியில் 10% அதிகரித்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு, நாட்டு வருமானம் என்பது சாரா மாறியாகும்; இறக்குமதி யென்பது சார்புடை மாறியாகும். இவ்விரு மாறிகளும் ஒட்டுறவு மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சார்புடை மாறியாகிய இறக்குமதியின் சதவீத மாறுபாட்டிற்கும், சாரா மாறியாகிய நாட்டு வருமானத்தின் சதவீத மாறுபாட்டிற்குமுள்ள விகிதத்திற்கு "நாட்டு வருமானத்தைப் பொறுத்த இறக்குமதி நெகிழ்ச்சி" ("Elasticity of imports w.r.t. national income" or simply "Income elasticity of imports") என்று பெயர். அதாவது,

இறக்குமதி நெகிழ்ச்சி

$$= \frac{\text{இறக்குமதியின் சதவீத மாறுபாடு}}{\text{நாட்டு வருமானத்தின் சதவீத மாறுபாடு}}$$

$$= \frac{10}{5} = 2.$$

நெகிழ்ச்சியை E என்ற எழுத்தின் மூலம் குறிப்பிடலாம். x, y என்ற இரு ஒட்டுறவு மாறிகளுள் சாரா மாறியாகிய x ஐப் பொறுத்த சார்புடை மாறியாகிய y இன் நெகிழ்ச்சியை E_x என்று குறிப்பிடலாம். இதுபோல், சார்புடை மாறியாகிய y ஐப் பொறுத்த சாரா மாறியாகிய x இன் நெகிழ்ச்சியை E_y என்று குறிப்பிடலாம். E_y என்பது E_x இன் தலைகீழ் விகிதமாகும்.

அதாவது,

$$E_y = \frac{1}{E_x}$$

ஆகவே, மேற்கண்ட உதாரணத்தில், இறக்குமதியைப் பொறுத்த நாட்டு வருமான நெகிழ்ச்சி $\frac{1}{2}$ ஆகும். எனவே, நெகிழ்ச்சியானது 1க்குச் சமமாகவோ, குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு பண்டத்தின் விலையிலேற்படுகின்ற 10% அதிகரிப்பு, அப்பண்டத்தின் தேவையில் 5% குறைவை யேற்படுத்தினால், அப்பண்டத்தின் தேவை நெகிழ்ச்சி $= \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ என்றும், அப்பண்டத்தின் விலை நெகிழ்ச்சி $= -2$ என்றும் காணலாம்.

நெகிழ்ச்சியும் தொடர்புக் கெழுவும் :

x, y என்ற இரு மாறிகள் ஒட்டுறவு கொண்டிருந்தால், $\log x$, $\log y$ ஆகியவையும் ஒட்டுறவு கொண்டிருக்கும். y என்பது சார்புடை மாறியானால் $\log x$ ஐச் சார்ந்த $\log y$ இன் தொடர்புக் கெழு x இன் 1% மாறுதலுக்குரிய y இன் சதவீத மாறுபாட்டைக் குறிக்கும். ஆகவே, $\log x$ ஐச் சார்ந்த $\log y$ இன் தொடர்புக் கெழுவே x ஐப் பொறுத்த y இன் நெகிழ்ச்சி (E_x) ஆகும்.

மாதிரி 97 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விலை நெகிழ்ச்சி, உற்பத்தி நெகிழ்ச்சி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு ...	1935	37	39	41	43	45	47	49	51	53
உற்பத்தி (மில். டன்கள்) ...	250	270	278	325	260	510	428	320	440	310
குவிண்டால் விலை (ரூபாய்கள்) ...	84	50	62	75	90	170	136	65	72	58

தீர்வு :

இங்கு உற்பத்தி என்பது சாராமாறி; விலை என்பது சார்புடை மாறி. ஆகவே, உற்பத்தியை x என்றும், விலையை y

என்றும் கொண்டு *log x* ஐப் பொறுத்து *log y* இன் தொடர்புக் கெழுவிலிருந்து விலை நெகிழ்ச்சியைப் பெறலாம்.

உற்பத்தி x	விலை y	$u = \log x$	$\sim = \log y$	$u\sim$	u^2	$\sim^2$
250	84	2.3979	1.9243	4.614	5.751	3.701
270	50	2.4314	1.6990	4.131	5.911	2.888
278	63	2.4440	1.7924	4.380	5.973	3.212
325	75	2.5119	1.8751	4.710	6.310	3.516
260	90	2.4150	1.9542	4.719	5.832	3.818
510	170	2.7076	2.2304	6.039	7.335	4.973
428	136	2.6314	2.1335	5.615	6.924	4.554
320	65	2.5051	1.7924	4.489	6.275	3.212
440	72	2.6435	1.8573	4.910	6.992	3.448
310	58	2.4914	1.7634	4.391	6.205	3.108
		25.1792	19.0220	47.998	63.508	36.430

$$\bar{u} = \frac{25.1792}{10} = 2.51792;\quad \approx = \frac{19.0220}{10} = 1.9022$$

$$\bar{u}\approx = 2.51792 \times 1.9022 = 4.789.$$

$$\bar{u}^2 = 6.342;\quad \approx^2 = 3.617.$$

$$\frac{\Sigma u\sim}{N} - \bar{u}\approx = \frac{47.998}{10} - 4.789 = 4.7998 - 4.789 = 0.0108.$$

$$\frac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2 = \frac{63.508}{10} - 6.342 = 6.3508 - 6.342 = 0.0088.$$

log x ஐச் சார்ந்த *log y* இன் கெழு =

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r\frac{\sigma_\sim}{\sigma_u} = \frac{\dfrac{\Sigma u\sim}{N} - \bar{u}\approx}{\dfrac{\Sigma u^2}{N} - \bar{u}^2} = \frac{0.0108}{0.0088} = 1.22$$

$\therefore \quad E_x = x$ ஐப் பொறுத்து y இன் நெகிழ்ச்சி $= 1.22$

அதாவது, விலை நெகிழ்ச்சி $= 1.22$

$\therefore$ உற்பத்தி நெகிழ்ச்சி $= \frac{1}{1.22} = 0.8197.$

தொடர்புப் பகுப்பாய்வின் பயன்கள் :

எல்லா அறிவியல் துறைகளிலும் மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பை நிர்ணயிக்க தொடர்புக் கோடுகள் பயன் படுகின்றன. மதிப்பீடுகளுக்கும், முன் கணிப்புகளுக்கும் தொடர்புச் சமன்பாடுகள் அதிகமாகப் பயன்படுவதால் ஒட் டுறவுப் பகுப்பாய்வைவிட தொடர்புப் பகுப்பாய்வுக்கே தற் காலத்தில் அதிக முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படுகிறது. தொடர் புப் பகுப்பாய்வின் சில முக்கிய பயன்பாடுகள் வருமாறு.

(1) தொடர்புப் பகுப்பாய்வின் கொள்கைகள் விளைச்சல் முன்கணிப்புகள் (crop forecasts) செய்யப் பயன்படுகின்றன.

(2) பொருளாதாரத் துறையில் அளிப்பு—தேவைப் பகுப் பாய்வு, சந்தைப் பகுப்பாய்வு, நுகர்வு பகுப்பாய்வு ஆகியவற் றில் மாறுபாட்டு விகிதங்கள், நெகிழ்ச்சிக் கெழுக்கள் ஆகியவற் றைக் கணக்கிட தொடர்புப் பகுப்பாய்வுக் கொள்கைகள் பயன் படுத்தப் படுகின்றன.

(3) ஏற்றுமதி, இறக்குமதி ஆகியவற்கிடையே யுள்ள ஒட்டுறவு தொடர்புப் பகுப்பாய்வின் அடிப்படையில் ஆராயப் படுகிறது.

(4) நிலங்களுக்கு வரி விதிக்கவும், நிலங்களின் பேரில் கடன் வழங்கவும், நிலங்களின் தன்மைகளுக்கேற்ப அவை களின் சொத்து மதிப்புக்களை மதிப்பிட தொடர்புப் பகுப்பாய்வு முறைகள் பயன்படுகின்றன.

(5) விலைவாசிகளைப் பாதிக்கக் கூடிய பொருளாதாரக் காரணிகள் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு மூலம் ஆராயப்படுகின்றன.

(6) அறிவியல் நுண்கலைகளிலேற்படுகின்ற மாறுபாட்டு வீதங்கள், பொருளாதார வளர்ச்சி வீதம் ஆகியவற்றை ஆராய தொடர்புக் கொள்கைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(7) சேமிப்பு, முதலீடு ஆகியவை பற்றிய ஆய்வுகளில் தொடர்புக் கொள்கைகள் பயன்படுகின்றன.

(8) தொடர் வண்டிகளில் பதிவு செய்யப்பட்ட பயணச் சீட்டுகளின் அடிப்படையில் பயணிகளுக்குத் தேவைப்படு கின்ற சாப்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிட தொடர்புச் சமன்பாடுகள் பயன்படுகின்றன.

வினாத்தாள்—11.

(1) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் என்றாலென்ன? அவற்றின் பயன்பாடுகளை விளக்கவும்.

(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்., பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(2) மீச்சிறுபடிக் கொள்கையைக் கூறி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு x ஐச் சார்ந்த y இன் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு அக் கொள்கை எவ்வாறு பயன்படுத்த முடியுமென்பதை விவரிக்கவும். (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(3) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடு என்பதன் மூலம் அறியப்படுவது என்னவென்று விளக்குக. இத்தகைய கோடுகள் இரண்டு இருப்பதேன்?

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்., பி.காம். 61 செப்.)

(4) முதற்படி இடைநிலையுறவுக் கொள்கையில் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக. அதில் ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $|r| \leq 1$ என நிறுவுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(5) பியர்சன் இடைநிலையுறவுக் கெழுவின் தனி மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட இயலாதென நிறுவுக. மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டு இருக்க வேண்டிய காரணமென்ன?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(6) மாறிகளின் தொடர்பு பற்றிய உட்கருத்தை விளக்கி, அதன் பயன்பாடுகளைக் குறிப்பிடுக.

(சென்னை பி.காம். 1960 ஏப்., 62 செப்.)

(7) தொடர்புக் கெழுவுக்கும் ஒட்டுறவுக் கெழுவுக்குமுள்ள வேறுபாடு என்ன ?

(சென்னை பி.காம். 1968 செப்.)

(8) ஒட்டுறவுக் கெழு —1 க்கும் +1க்கு மிடையே யிருக்குமென்று காட்டுக.

(சென்னை பி.காம். 1967 ஏப்.,
மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்., 72 ஏப்.)

(9) தேவை நெகிழ்ச்சியின் உட்கருத்தை விளக்கவும்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. கணக்கியல் பொருளாதாரம் 1967 செப்.)

(10) நெகிழ்ச்சியின் உட்கருத்தை வரையறுத்து, வருமானம் குறித்து தேவை நெகிழ்ச்சி பற்றிய உட்கருத்தின் பொருள், முக்கியத்துவம் ஆகியவை பற்றி விவாதிக்கவும்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி.
கணக்கியல் பொருளாதாரம் 1967 செப்.)

(11) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் வர்க்கம் r^2, 1க்கு மேற்பட்ட மதிப்பைப் பெற முடியாதென்று காட்டுக. $r = 0$, $r =$ எதிரெண் ஆகியவைகளை விவாதிக்கவும்.

(மதுரை எம்.ஏ. 1971)

(12) மாறிகளின் தொடர்பு, மாறுபாட்டு விகிதம் ஆகியவை பற்றி நீங்கள் அறிந்துகொள்வதென்ன ? நெகிழ்ச்சி பற்றிய உட்கருத்துக்கு மாறிகளின் தொடர்பு, மாறுபாட்டு விகிதம் ஆகியவற்றின் தொடர்பு பற்றி விவாதிக்கவும். (மதுரை எம்.ஏ. 1969)

(13) சிறு குறிப்பு வரைக :—

(i) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்.

(சென்னை பி.காம். 62 ஏப்., பி.எஸ்ஸி. 67 ஏப்.)

(ii) மாறுபாட்டு விகிதம்.

(iii) நெகிழ்ச்சி.

(iv) சிதறல் விளக்கப்படம்.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி.
1961 ஏப்., 62 ஏப்., 65 ஏப்., 66 செப்.,
67 செப்., 68 ஏப்., 70 ஏப்., மதுரை பி.ஏ. 70 ஏப்.)

பயிற்சி 11.

(1) x ஐச் சார்ந்த y, y ஐச் சார்ந்த x இரண்டின் தொடர்புக் கோடுகள் பின்வருமாறு :

$$y = -0.75\,x + 21$$
$$x = -0.60\,y + 35$$

இடைநிலையுறவுக் கெழுவினையும், x, y இன் கூட்டுச் சராசரிகளையும் காண்க. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(2) y சார்ந்த x, x சார்ந்த y என்ற இரு தொடர்புக் கோடுகள் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன :—

$$y = 0.80\,x + 25,$$
$$x = 0.45\,y + 30.$$

x ஓடு y ஐத் தொடர்பு படுத்தும் இடையுறவுக் கெழுவின் மதிப்பையும், x, y இன் கூட்டுச் சராசரிகளையும் கவனிக்க. $\sigma_x : \sigma_y = 3 : 4$ என்று நிறுவுக. (மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

(3) இரண்டு தொடர்புக் கோடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :—

$$3\,x = 4y + 9,$$
$$1.5\,y = 6x + 7.$$

x, y ஆகியவற்றின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளின் மொத்தம் 8 என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

(i) x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள், விலக்க வர்க்கச் சராசரிகள்,

(ii) x, y க்குள்ள தொடர்புக் கெழு

ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கவும்.

(4) ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் புள்ளியியல், பொருளாதாரம் ஆகிய பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு :

	புள்ளியியல்	பொருளாதாரம்
சராசரி மதிப்பெண்	40	35
திட்ட விலக்கம்	8	6

இரண்டு பாடங்களிலும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0.4.

இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளையும் அமைத்து, பொருளாதாரத்தில் 42 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவனின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்ணை மதிப்பிடுக.

(5) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளையும் அமைத்து, மழையளவு 29 அங்குலமானால் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைச்சல் என்னவென்று காண்க.

		மழையளவு (அங்குலம்)	விளைச்சல் (ஏக்கருக்கு அலகுகள்)
சராசரி	...	25	40
திட்ட விலக்கம்	...	3	6

மழையளவுக்கும் விளைச்சலுக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு 0.8.

(6) பின்வரும் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

$$\bar{x} = 50; \quad \bar{y} = 100.$$
$$\sigma_x = 5; \quad \sigma_y = 10$$
$$r = 0.5.$$

இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளையும் $y = 120$ க்குரிய xஇன் மதிப்பீட்டையும் காண்க.

(7) பின்வரும் x, y மதிப்புக்களுக்கு இடையுறவுக் கெழுவினையும் தொடர்புச் சமன்பாடுகளையும் பெறுக.

x	...	2	6	4	7	5
y	...	8	8	5	6	2

(8) பின்வரும் விவரங்களுக்குத் தொடர்புச் சமன்பாடுகள் காண்க.

கணவன் வயது	...	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
மனைவி வயது	...	17	17	18	18	18	19	19	20	21	22

(சென்னை பி.காம். 1961 செப்.)

(9) தகப்பனுர், மகன் ஆகியோரின் உயரங்கள் அங்குலங்களில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தகப்பனுர் உயரம் ..	65	66	67	67	68	69	71	73
மகன் உயரம் ...	67	68	64	68	72	70	69	70

இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளையும் அமைத்து, தகப்பனுரின் உயரம் 67.5 அங்குலமானுல், மகனின் உயரத்தை மதிப்பிடுக.

(10) பின்வரும் கணவன் – மனைவியரின் வயதுகளிலிருந்து தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

கணவன் வயது ...	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
மனைவி வயது ...	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

கணவனின் வயது 32 என்றுல் மனைவியின் வயதை மதிப்பிடுக.

(11) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து $y = 200$ க்குரிய x இன் மதிப்பை மதிப்பிடுக.

x ...	250	248	297	338	463	393
y ...	137	147	184	196	276	260

(சென்னை பி.காம். 1964 ஏப்.)

(12) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து விற்பனைக்கும் இலாபத்துக்கும் மாறுபாட்டு விகிதம் காண்க.

விற்பனை ... (இலட்சம் ரூபாய்கள்)	72	84	66	60	48	42	54	63	51	57	69	54
இலாபம் ... (இலட்சம் ரூபாய்கள்)	48	52	48	46	30	28	36	38	34	42	44	40

11. பண்புகளின் உறவு
(ASSOCIATION OF ATTRIBUTES)

ஒரு கூறிலுள்ள உறுப்புக்களை அவைகளிடமுள்ள அல்லது அவைகளிடமில்லாத பண்புகளுக்கேற்ப பல்வேறு பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்வதற்குப் "பண்பின வகுப்பாக்கம்" அல்லது "பண்பினப் பாகுபாடு" (Attributive classification) என்று பெயர். உதாரணமாக, ஒரு நாட்டின் மக்களை "கற்றவர் — கல்லாதவர்", "பணக்காரர் — ஏழை", "ஆண் — பெண்", "திருமணமானவர் — திருமணமாகாதவர்" என்ற பண்பினப் பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்யலாம். ஒரு கூறிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட "பண்புள்ளவை", "பண்பு இல்லாதவை" என்ற இரு பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டால், அப்பாகுபாட்டிற்குத் "தனிப் பண்புப் பாகுபாடு" (Simple attributive classification) அல்லது "இரு பிரிவுப் பாகுபாடு" (dichotomy) என்று பெயர். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பண்புகளின் அடிப்படையில் பல்வெறு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்ற பாகுபாட்டிற்குப் "பல்பண்புப் பாகுபாடு" (manifold attributive classification) என்று பெயர். பண்பினப் பாகுபாட்டில் இடம் பெறுகின்ற பண்புகளை A, B, C,...... என்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களாலும், அப்பண்புகளில்லாமையை முறையே *a*, *b*, *c*,...... என்ற ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துக்களால் அல்லது α, β, γ, ... என்ற கிரேக்க எழுத்துக்களாலும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். உதாரணமாக, "குருடு" என்ற பண்பினை A என்று குறிப்பிட்டால், *a* அல்லது α என்பது குருடல்லாத பண்பினைக் குறிக்கும். A என்ற பண்பினைப் பெற்ற உறுப்புக்கள் யாவும் A பிரிவைச் சேர்ந்தவை யென்றழைக்கப்படுகின்றன. A என்ற பண்பினைப் பெற்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை பிரிவு A யின் "நிகழ்வெண்" அல்லது "பரவலெண்" எனப்படும். இந்த நிகழ்வெண் (A) என்று குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோல், *a* அல்லது α என்பது A என்ற பண்பைப் பெற்றிராத உறுப்புக்களைக்கொண்ட

பிரிவைக் குறிக்கும். இப்பிரிவின் நிகழ்வெண் (a) அல்லது (α) என்று குறிக்கப்படுகிறது. A என்பது "குருடு" என்ற பண்பையும் B என்பது "செவிடு" என்ற பண்பையும் குறிப்பிட்டால், AB என்பது குருடு, செவிடு ஆகிய இரு பண்புகளின் சேர்க்கையைக் குறிக்கும். இவ்விரு பண்புகளையும் கொண்டவர்கள் AB என்ற பிரிவைச் சேர்ந்தவர்களாவார்கள். குருடாகவும், செவிடாகவு மிருப்பவர்களின் எண்ணிக்கை AB என்ற பிரிவின் நிகழ்வெண்ணாகும். இது (AB) என்று குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோல் (ab) அல்லது ($\alpha\beta$) என்பது குருடு, செவிடு ஆகிய இரு பண்புகளும் இல்லாதவர்களின் எண்ணிக்கையையும், ($A\beta$) என்பது செவிடு அல்லாத குருடர்களின் எண்ணிக்கையையும், (αB) என்பது குருடு அல்லாது செவிடர்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிடுகின்றன. இரு பண்புகளைக் கொண்டமைந்த ஒரு பிரிவுக்கு "இரண்டாம் நிலைப் பிரிவு" (class of the Second order) என்று பெயர். AB, BC, AC, $A\beta$, $A\gamma$, $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$, αB, αC, βC, $\beta\gamma$ என்பன இரண்டாம் நிலைப்பிரிவுகளாகும். இதுபோல் ABC, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma$,...... போன்று மூன்று பண்புகளைக் கொண்டமைந்த பிரிவுகளுக்கு "மூன்றும் நிலைப்பிரிவுகள்" (classes of the third order) என்று பெயர். A, B, C என்ற மூன்று பண்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படுகின்ற 1, 2, 3 ஆகிய நிலைகளின் பிரிவுகளும், பிரிவுகளின் எண்ணிக்கைகளும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நிலை	பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்	பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை
1	(A) (B) (C) (α) (β) (γ)	6
2	(AB) ($A\beta$) (αB) ($\alpha\beta$) (AC) ($A\gamma$) (αC) ($\alpha\gamma$) (BC) ($B\gamma$) (βC) ($\beta\gamma$)	12
3	(ABC) ($AB\gamma$) ($A\beta C$) ($A\beta\gamma$) (aBC) ($\alpha B\gamma$) ($\alpha\beta C$) ($\alpha\beta\gamma$)	8

ஒரு தொகுப்பிலுள்ள மொத்த நிகழ்வெண் N என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. ஒரு தொகுப்பிலுள்ள N உறுப்புக்களையும் எந்தப் பண்புமில்லாத தனி உறுப்புக்களாகக் கருதினுல் அந்த N உறுப்புக்களை 0 நிலைப்பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுகக் கொள்ளலாம். எந்தப் பிரிவு நிகழ்வெண்ணையும் அதைவிட உயர்ந்த நிலைப்பிரிவு நிகழ்வெண்களின் கோவையாக மாற்றி எழுதலாம்.

N = மொத்த உறுப்பினர்கள்

= பண்பு A உள்ளவை + பண்பு A இல்லாதவை

$= (A) + (\alpha)$.

இதுபோல், (A) = பண்பு A உள்ளவை

= A, B பண்புகள் கொண்டவை + பண்பு B இல்லாமல் பண்பு A மட்டும் கொண்டவை

$= (AB) + (A\beta)$

இதுபோல், $(AB) = (ABC) + (AB\gamma)$,

$(A\beta) = (A\beta C) + (A\beta\gamma)$.

$\therefore \quad (A) = (AB) + (A\beta)$

$= (ABC) + (AB\gamma) + (A\beta C) + (A\beta\gamma)$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பண்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப் படுகின்ற மிக உயர்ந்த நிலைப்பிரிவுகளுக்குக் கடைப் பிரிவுகள் அல்லது இறுதிப் பிரிவுகள் (ultimate classes) என்று பெயர். உதாரணமாக, (ABC), $(\alpha, \beta\gamma)$, $(A\beta C)$, $(\alpha B\gamma)$,...... என்பன A, B, C என்ற மூன்று பண்புகளைக் கொண்ட கடைப் பிரிவு களின் நிகழ்வெண்களாகும். A, B, C...... என்ற பண்புகளைப் பெற்ற உறுப்புக்களைக் கொண்ட A, B, C,...... என்ற பிரிவு களுக்கு "நேர் பிரிவுகள்" அல்லது "நிறை பிரிவுகள்" (positive classes) என்றும், A, B, C,...... என்ற பண்புகளில்லாத உறுப்புக்களைக் கொண்ட α, β, γ,......என்ற பிரிவுகளுக்கு "எதிர்ப் பிரிவுகள்" அல்லது "குறைப் பிரிவுகள்" (negative classes) என்று பெயர். ஆகவே, A, B, C, AB, BC, AC, ABC, ஆகியவை நேர் பிரிவுகளாகும்; α, β, γ, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$, ஆகியவை எதிர்ப் பிரிவுகளாகும்.

மாதிரி 98;

பண்புகள் கொள்கையில் பயன்படும் குறியீடுகளை ஏற்றுக் கொண்டு, இரு பண்புகள் A, B, உள்ளபோது பின்வரும் விவ ரங்களைக் கொண்டு, கொடுக்கப்படாத வகுப்புகளின் பரவ லெண் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக.

$$(A) = 500, (B) = 600, (A\beta) = 400, (\alpha\beta) = 350.$$

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

$$(A) = (AB)+(A\beta)$$
$$500 = (AB)+400 \qquad \therefore \quad (AB) = 500-400 = 100$$
$$(B) = (AB)+(\alpha B)$$
$$600 = 100+(\alpha B) \qquad \therefore \quad (\alpha B) = 600-100 = 500$$
$$(\alpha) = (\alpha B)+(\alpha\beta)$$
$$= 500+350 = 850$$
$$N = (A) + (\alpha) = 500+650 = 1350.$$
$$(\beta) = (A\beta)+(\alpha\beta)$$
$$= 400+350 = 750.$$

ஒரு பிரிவு நிகழ்வெண்ணை நேர் பிரிவு நிகழ்வெண்களின் சார்பாக மாற்றுதல் :

$$(AB) = (ABC)+(AB\gamma)$$
$$\therefore \quad (AB\gamma) = (AB)-(ABC).$$

இதே முறையில், $(A\beta\gamma) = (A\beta)-(A\beta C)$

$$= [(A)-(AB)]-[(AC)-(ABC)]$$
$$= (A)-(AB)-(AC)+(ABC)$$

இதுபோல்,

$$(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta)-(\alpha\beta C)$$
$$= [(\alpha)-(\alpha B)]-[(\alpha C)-(\alpha BC)]$$
$$= (\alpha)-(\alpha B)-(\alpha C)+(\alpha BC)$$
$$= N-(A)-[(B)-(AB)]-[(C)-(AC)]+[(BC)-(ABC)]$$
$$= N-(A)-(B)+(AB)-(C)+(AC)+(BC) \quad (ABC)$$
$$= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(BC)+(AC)-(ABC)$$

மாதிரி 99 :

$(A) = (B) = (C) = \frac{1}{2}N$, $(ABC) = (\alpha\beta\gamma)$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $2(ABC) = (AB)+(BC)+(AC)-\frac{1}{2}N$ என்று நிறுவுக.

நிறுவல் :

$$(ABC) \equiv (\alpha\beta\gamma) = N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(BC)+(AC) -(ABC)$$

$$\therefore \quad 2\,(ABC) = N-\frac{N}{2}-\frac{N}{2}-\frac{N}{2}+(AB)+(BC)+(AC)$$

$$= (AB)+(BC)+(AC)-\tfrac{1}{2}N.$$

பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை **(Independence of Attributes) :**

ஒன்றுக்கொன்று எவ்வித தொடர்புமற்ற இரு பண்புகளுக்குச் மார்பற்ற பண்புகளென்று பெயர். உதாரணமாக, குருட்டுத் தன்மை A, செவிட்டுத் தன்மை B ஆகிய இரு பண்புகளும் சார்பற்றவை யெனக் கொள்க. மொத்த உறுப்பினர்களுள் குருடர்களின் விகிதம், செவிடர்களுள் குருடர்களின் விகிதம், செவிடு அல்லாதவர்களுள் குருடர்களின் விகிதம் ஆகியவை சமமாக யிருக்கவேண்டும்.

மொத்த உறுப்பினர்கள் $= N.$

குருடர்களின் எண்ணிக்கை $= (A)$

செவிடர்களின் எண்ணிக்கை $= (B)$

செவிடர்களில் குருடர்களின் எண்ணிக்கை $= (AB)$

செவிடு அல்லாதவரில் குருடர்களின் எண்ணிக்கை $= (A\beta)$

$\therefore$ செவிடர்களில் குருடர்களின் விகிதம் $= \dfrac{(AB)}{(B)}$

செவிடல்லாதவரில் குருடர்களின் விகிதம் $= \dfrac{(A\beta)}{(\beta)}$

மொத்த உறுப்பினர்களில் குருடர்களின் விகிதம் $= \dfrac{(A)}{N}$

இப்பொழுது, Aயும் Bயும் சார்பற்ற பண்புகளாயின், செவிடர்களில் குருடர்களின் விகிதமும், செவிடல்லாதவர்களில் குருடர்களின் விகிதமும் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(AB)}{(\beta)} = \frac{(AB)+(A\beta)}{(B)+(\beta)} = \frac{(A)}{N}$$

= மொத்தத்தில் குருடர்களின் விகிதம்.

ஆகவே, $(AB) = \dfrac{(A)\,(B)}{N}$,

$$(A\beta) = \frac{(A)\,(\beta)}{N}$$

என்ற நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறோம். ஆகவே, இரு பண்புகள் சார்பற்றவையாக யிருக்கவேண்டுமாயின்,

$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}\,;\quad (AB) = \frac{(A)\,(B)}{N},\quad (A\beta) = \frac{(A)\,(\beta)}{N}$$

ஆகியவற்றுள் ஏதாவதொரு நிபந்தனையைத் திருப்தி செய்ய வேண்டும்.

மாதிரி 100 :

1024 பேர்களில் 144 பேர் குருடர்கள் : 884 பேர் பைத்தியக்காரர்கள். குருடும், பைத்தியமும் சார்பற்றவையெனில், குருடாகவும், பைத்திமாகவும் உள்ளவர் எத்தனை பேர்? குருடு, பைத்தியம் எதுவுமில்லாதவர் எத்தனை பேர்?

தீர்வு :

குருட்டுத் தன்மையை A என்றும், பைத்தியத்தை B என்றும் கொள்க.

$$N = 1024,\quad (A) = 144,\quad (B) = 884$$

$$\therefore\quad (\alpha) = N-(A) = 1024-144 = 880$$

$$(\beta) = N-(B) = 1024-884 = 640.$$

Aயும் Bயும் சார்பற்றவை யாகையால்,

குருடாகவும், பைத்தியமாகவும் உள்ளவர் $= (AB)$

$$= \frac{(A)\,(B)}{N}$$

$$= \frac{144\times 884}{1024}$$

$$= 54.$$

குருடு, பைத்தியம் எதுவுமில்லாதவர் $= (\alpha\beta)$

$$= \frac{(\alpha)\,(\beta)}{N}$$

$$= \frac{880\times 640}{1024}$$

$$= 550.$$

மாதிரி 101 :

மக்கள் தொகுதியொன்றில் 60 சதவீதத்தினர் குருடர்கள்; 35 சதவீதத்தினர் செவிடர்கள். குருடும், செவிடும் சார்பற்றவையெனக் கருதப்பட்டால், குருடாயும் செவிடாயும் உள்ளவர் எத்தனை சதவீதம் ?

குருட்டுத் தன்மையை A என்றும், செவிட்டுத் தன்மையை B என்றும் கொள்க.

குருடர்களின் சதவீதம் $= \frac{(A)}{N} \times 100 = 60$

$$\therefore \quad (A) = \frac{60\,N}{100}.$$

செவிடர்களின் சதவீதம் $= \frac{(B)}{N} \times 100 = 35.$

$$\therefore \quad (B) = \frac{35\,N}{100}$$

Aயும் Bயும் சார்பற்றவை யாகையால்,

$$(AB) = \frac{(A)\,(B)}{N} = \frac{\frac{60\,N}{100} \cdot \frac{35\,N}{100}}{N} = \frac{60}{100}\,\frac{35}{100}.\,N = \frac{21\,N}{100}$$

குருடாகவும், செவிடாகவு முள்ளவரின் சதவீதம் $= \frac{(AB)}{N} \times 100$

$$= \frac{\frac{21\,N}{100}}{N} \times 100 = 21.$$

இரு பண்புகளின் சார்பின்மைக்கு மற்றொரு சூத்திரம் :

A, B என்ற இரு பண்புகள்

$$(AB) = \frac{(A)\,(B)}{N}$$

என்ற சூத்திரத்தை நிறைவு செய்தால் அவை சார்பற்ற பண்புகளெனக் கண்டோம். அதாவது, A, B, ஆகியவை சார் பற்றவை யானால்,

$$(AB)-\frac{(A)(B)}{N}=0 \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது, $(AB)-\frac{(A)(B)}{N}$ ஐ δ எனக் குறிப்பிடுக.

$$\therefore\quad \delta=(AB)-\frac{(A)(B)}{N}$$

$$=\frac{1}{N}[(AB)N-(A)(B)]$$

$$=\frac{1}{N}[(AB)\{(A)+(\alpha)\}-\{(AB)+(A\beta)\}\{(AB)+(\alpha B)\}]$$

$$=\frac{1}{N}[(AB)\{(AB)+(A\beta)+(\alpha B)+(\alpha\beta)\}-\{(AB)+(A\beta)\}\{(AB)+(\alpha B)\}]$$

$$=\frac{1}{N}[(AB)\{(AB)+(A\beta)+(\alpha B)-(AB)-(\alpha B)-(A\beta)\}-(A\beta)(\alpha B)]$$

$$=\frac{1}{N}[(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)]$$

ஆகவே A, B என்ற இரு பண்புகள் சார்பற்றவை யானால், $\delta=0$ ஆகும். அதாவது, $(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)=0$.

A, B ஆகியவை நிறைச் சார்புடையவை யெனில் $\delta>0$ ஆகவும், குறைச் சார்புடையவையெனில் $\delta<0$ ஆகவுமிருக்கும். அதாவது, A, B ஆகிய இருபண்புகளுக்கு

(i) $(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)=0$ ஆனால் Aயும் Bயும் சார் பற்றவை யென்றும்,

(ii) $(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)>0$ ஆனால் Aயும் Bயும் நிறைச் சார்புடையவை யென்றும்,

(iii) $(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)>0$ ஆனால் Aயும் Bயும் குறைச் சார்புடையவை யென்றும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

யூல்-இன் பண்புறவுக் கெழு (அல்லது சார்புக் கெழு)
(Yule's coefficient of association)

A, B ஆகிய இரு பண்புகளின் சார்புத் தன்மையைச் சோதிக்கப் பயன்படும் (AB) $(\alpha\beta)$—$(A\beta)$ (αB) என்ற கோவையை (AB) $(\alpha\beta) + (A\beta)$ (αB) என்ற கோவையால் வகுத்து A, B க்கிடையேயுள்ள உறவுக் கெழுவினைப் பெறலாம். இக் கெழுவிற்கு யூல்-இன் பண்புறவுக் கெழு அல்லது யூல்-இன் சார்புக் கெழு என்று பெயர். இக் கெழு Q என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. ஆகவே, யூல்-இன் பண்புறவுக் கெழு

$$Q = \frac{(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(\alpha B)}{(AB)\,(\alpha\beta) + (A\beta)\,(\alpha B)}$$

Aயும் Bயும் சார்பற்றவையெனில் $Q=0$ ஆகவும், நிறைச் சார்புடையவையாயின் $Q>0$ ஆகவும், குறைச் சார்புடையவையாயின் $Q<0$ ஆகவுமிருக்கும். Aயும் Bயும் முழுநிறைச் சார்புடையவையாயின், உறுப்புக்கள் யாவும் இரண்டு நேர் பண்புகளையும் பெற்றிருக்கும் அல்லது இரண்டு எதிர்பண்புகளையும் பெற்றிருக்கும். ஆகவே, $(A\beta)$ வும், (αB)வும் பூச்சியமாகும். $Q = +1$. Aயும் Bயும் முழுக்குறைச் சார்புடையவையானல், உறுப்புக்கள் யாவும் நேர், எதிர் ஆகிய இரு பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும். ஆகவே, $(AB) = 0, (\alpha\beta) = 0$ ஆகும். $\therefore Q = -1$. எனவே, Q — இன் மதிப்பு —1க்கும் + க்கு மிடையேயிருக்குமென்றறிகிறேம். A, B ஆகிய பண்புகளின் நிகழ்வெண்களடங்கிய பரவலைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிலமைத்து, அதன்மூலம் யூல் — இன் பண்புறவுக் கெழுவை மிக எளிதில் கணக்கிடலாம்.

பண்புகள்	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	$(A\beta)$	$(\alpha\beta)$	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

மாதிரி: 102

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு அம்மை குத்திக் கொள்வதை வைசூரித் தடுப்பு முறையாக ஏற்றுக் கொள்ளலாமாவென ஆராய்க.

“வைசூரியால் பாதிக்கப் படக்கூடிய சூழ்நிலையிலுள்ள 1482 பேர்களில் 343 பேர்கள் அம்மை குத்திக் கொண்டனர். மொத்தத்தில் வைசூரியால் பாதிக்கப்பட்ட 368 பேர்களுள் 35 பேர்கள் அம்மை குத்திக் கொண்டவர்கள்”

தீர்வு.

	பாதிக்கப் பட்டவர் A	பாதிக்கப் படாதவர் α	மொத்தம்
அம்மை குத்தியவர் B	35	308	343
அம்மை குத்தாதவர் β	333	806	1139
மொத்தம்	368	1114	1482

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha\beta)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(35)(806) - (333)(308)}{(35)(826) + (333)(308)}$$

$$= \frac{28210 - 102569}{28210 + 102569}$$

$$= \frac{-74359}{130779}$$

$$= -0.56.$$

அம்மை குத்துவதும் (B), வைசூரியால் பாதிக்கப்படுவதும் (A) குறைச் சார்புடனிருப்பதால் அம்மை குத்திக்கொள்வதன் மூலம் வைசூரிவராமல் தடுக்க முடியுமென ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

தேற்றம் :

N என்பது $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்ற n பண்புகளைக் கொண்ட மொத்த நிகழ்வெண் எனில்,

$(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) \geq [(A_1) + (A_2) + (A_3) + \ldots + (A_n)] - (n-1)N$ என நிறுவுக.

நிறுவல் :

எந்தப் பண்பின் நிகழ்வெண்ணும் எதிரெண்ணாகயிருக்க முடியாதாகையால், $(\alpha_1 \alpha_2) \ge 0$.

ஆனால், $(\alpha_1 \alpha_2) = (\alpha_1) - (\alpha_1 A_2)$

$$= N - (A_1) - [(A_2) - (A_1 A_2)]$$

$$= N - (A_1) - (A_2) + (A_1 A_2)$$

$\therefore \quad N - (A_1) - (A_2) + (A_1 A_2) \ge 0$

அல்லது, $(A_1 A_2) \ge (A_1) + (A_2) - N.$

இதுபோல், $(A_1 A_2 A_3) \ge (A_1) + (A_2 A_3) - N.$

$$\ge (A_1) + [(A_2) + (A_3) - N] - N$$

$$\ge (A_1) + (A_2) + (A_3) - 2N$$

இதுபோல், $(A_1 A_2 A_3 A_4) \ge (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_4) - 3N.$

பொதுவாக, $(A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n \ge (A_1) + (A_2) + (A_3) + \ldots\ldots + (A_n) - (n-1) N.$

மாதிரி 103 :

ஒரு போரில் குறைந்தது 70% வீரர்கள் ஒரு கண் இழந்திருப்பார்கள் ; குறைந்தது 75% வீரர்கள் ஒருகாது இழந்திருப்பார்கள் ; குறைந்தது 80% வீரர்கள் ஒருகையிழந்திருப்பார்கள் ; குறைந்தது 85% வீரர்கள் ஒரு கால் இழந்திருப்பார்கள். கண், காது, கை, கால் ஆகிய நான்கையும் குறைந்தது எத்தனை சதவீதத்தினர் இழந்திருப்பர் ?

தீர்வு :

ஒருகண் இழத்தலை A என்றும்,

ஒருகாது இழத்தலை B என்றும்,

ஒருகை இழத்தலை C என்றும்,

ஒரு கால் இழத்தலை D என்றும் கொள்க.

$(A) \ge 70$; $(B) \ge 75$; $(C) \ge 80$; $(D) \ge 85$; $(N) = 100.$

இப்பொழுது,

$$
\begin{aligned}
(ABCD) &\geq (A) + (B) + (C) + (D) - 3N \\
&\leq 70 + 75 + 80 + 85 - 300 \\
&\geq 310 - 300 \\
&\geq 10.
\end{aligned}
$$

குறைந்தது 10% வீரர்கள் நான்கையும் இழந்திருப்பர்.

மாதிரி 104:

பண்பு B இல்லாதவர்களைவிட B இருப்பவர்களிடம் பண்பு A உள்ளவர்களின் விகிதம் அதிகமானால், பண்பு A இல்லாதவர்களைவிட பண்பு A இருப்பவர்களிடம் பண்பு B உள்ளவர்களின் விகிதம் அதிகமாகயிருக்குமென நிறுவுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

தீர்வு:

பண்பு B இருப்பவர்கள் $= (B)$

பண்பு B இல்லாதவர்கள் $= (\beta)$

பண்பு B இருப்பவர்களில் பண்பு A உள்ளவர்கள் $= (AB)$

பண்பு B இல்லாதவர்களில் பண்பு A உள்ளவர்கள் $= (A\beta)$

பண்பு B இருப்பவர்களில் பண்பு A உள்ளவர்களின் விகிதம்

$$= \frac{(AB)}{(B)}$$

பண்பு B இல்லாதவர்களில் பண்பு A உள்ளவர்களின் விகிதம்

$$= \frac{(A\beta)}{(\beta)}$$

இப்பொழுது, $\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(\beta)}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதுபோல், பண்பு A இருப்பவர்களில் B உள்ளவர்களின்

விகிதம் $= \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$

நிறுவ வேண்டியது :— $\frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$

இப்பொழுது, $\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(\beta)}$

$$\therefore \quad (AB)(\beta) > (B)(A\beta)$$

$$(AB)[N-(B)] > (B)[(A)-(AB)]$$

$$(AB)N-(AB)(B) > (A)(B)-(AB)(B)$$

$$\therefore \quad (AB)N > (A)(B)$$

$$\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A)}{N}$$

$$\frac{(AB)}{(B)-(AB)} > \frac{(A)}{N-(A)}$$

$$\frac{(AB)}{(\alpha)} > \frac{(A)}{(\alpha)}$$

அல்லது, $\frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$

மாதிரி 105 :

100 குடும்பங்களுள் மூன்று வெவ்வேறு வார இதழ்களைப் படிக்கின்ற குடும்பங்களின் எண்ணிக்கைகள் பின்வருமாறு :—

வார இதழ்கள்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
ஆனந்த விகடன்	28
தினமணி கதிர்	30
குமுதம்	42
ஆனந்த விகடனும் தினமணி கதிரும் ...	8
ஆனந்த விகடனும் குமுதமும்	10
தினமணி கதிரும் குமுதமும்	5
மூன்று இதழ்களும்	3

(i) ஒரு இதழும் வாசிக்காத குடும்பங்கள் எத்தனை ?

(ii) குமுதம் மட்டும் வாசிக்கின்ற குடும்பங்கள் எத்தனை ?

(iii) குமுதமும் தினமணி கதிரும் மட்டும் வாசிக்கின்ற குடும்பங்கள் எத்தனை ?

தீர்வு :

A = ஆனந்த விகடன், B = தினமணி கதிர், C = குமுதம் என்று கொள்க.

$$(A) = 28,\ (B) = 30,\ (C) = 42,\ (AB) = 8,$$

$$(AC) = 10,\ (BC) = 5,\ (ABC) = 3\ ;\ N = 100.$$

(i) இப்பொழுது, $(\alpha\beta\gamma) = N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(BC)+(AC)-(ABC)$

$$= 100-28-30-42+8+5+10-3$$

$$= 20.$$

ஒரு இதழும் வாசிக்காத குடும்பங்கள் = 20,

(ii) குமுதம் மட்டும் வாசிக்கின்ற குடும்பங்கள் $= (A\beta\gamma)$

$$= (A\beta)-(A\beta C)$$

$$= (A)-(AB)-[(AC)-(ABC)]$$

$$= (A)-(AB)-(AC)+(ABC)$$

$$= 28-8-10+3$$

$$= 13.$$

(iii) குமுதமும் தினமணி கதிரும் மட்டும் வாசிக்கின்ற குடும்பங்கள் $= (\alpha BC)$

$$= (BC)-(ABC)$$

$$= 5-3$$

$$= 2.$$

மாதிரி 106 :

பின்வரும் விவரங்கள் முரண்பாடுள்ளவையென நிறுவுக.

$$N = 1000, (A) = 525, (B) = 312, (C) = 470,$$

$$(A\beta) = 488, (A\gamma) = 378, (B\gamma) = 226, (ABC) = 25.$$

நிறுவல் :

$$(\alpha\beta\gamma) = N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(BC)+(AC)-(ABC)$$

$$= 1000-525-312-470+[(A)-(A\beta)]+[(B)-(B\gamma)]+[(A)-(A\gamma)]-25$$

$$= 100-1332+[525-488]+[312-226]+[525-378]$$

$$= 1275-1332$$

$$= -57.$$

ஆனால் எந்தப் பிரிவு நிகழ்வெண்ணும் எதிரெண்ணுக யிருக்க முடியாதாகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் முரண்பாடுள்ளவை யென்று தெரிகிறது.

வினாத்தாள் 12.

(1) பண்புகளின் உறவு என்பதன் மூலம் நீங்கள் அறிந்து கொள்வது என்ன? அதை எவ்வாறு அளவிடுவீர்கள். (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1962 ஏப்.)

(2) இரு பண்புகள் (அ) சார்பற்றவை, (ஆ) நிறைச் சார்புடையவை, (இ) குறைச் சார்புடையவை யென்று எப்போது கூறுவீர்கள்? எடுத்துக் காட்டுகள் தருக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(3) பண்புகளுக்கிடையே உறவு இருப்பதை எவ்வாறு சோதிப்பீர்கள்? (மதுரை பி.ஏ. 1969 ஏப்.)

(4) பண்புகளின் உறவு, உறவின்மை, ஆகியவற்றை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(5) பண்புகள் கொள்கையில் மூன்று பண்புகளையும் அவற்றின் எதிர் பண்புகளையும் கொண்டு நிறைப் பிரிவுகள், கடைப் பிரிவுகள் என்றால் என்னவென விளக்குக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(6) இரு பண்புகளுக்கிடைப்பட்ட உறவுக் கெழுவினைக் கணிக்கக்கூடிய ஒரு வாய்ப்பாட்டினைக் கூறி அதன் பொருத்தத்தை விளக்குக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(7) யூல்-இன் பண்புறவுக் கெழு Q-வை வரையறுத்துக் கூறி, Q = −1, 0, +1 ஆகிய வகைகளை ஆராய்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(8) சிறு குறிப்பு வரைக :—

(i) பண்புகளின் உறவு.

(பி.எஸ்ஸி. சென்னை : 1959 ஏப், 61 ஏப்., 67 செப்,
மதுரை : 1968 ஏப்., பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

(ii) உறவுக் கெழு.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1963 ஏப்.)

(iii) பண்புகளின் உறவின்மை.

பயிற்சி 12.

(1) பின்வரும் பிரிவு நிகழ்வெண்களிலிருந்து மீதிப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

$$(A) = 50;\quad (B) = 40$$
$$(AB) = 30;\quad N = 100.$$

(2) பின்வரும் நேர்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கடைப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

$$N = 47426,\ (A) = 3236,\ (B) = 4030,\ (C) = 1540,$$
$$(ABC) = 312,\ (AB) = 856,\ (AC) = 670,\ (BC) = 312.$$

(3) பின்வரும் கடைப்பிரிவு நிகழ்வெண்களிலிருந்து நிறைப்பிரிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

$$(ABC) = 298,\ (A\beta C) = 450,\ (\alpha BC) = 408,\ = (\alpha\beta C) = 342,$$
$$(AB\lambda) = 1476,\ (A\beta\lambda) = 2292,\ (\alpha B\lambda) = 3524$$
$$(\alpha\beta\lambda) = 43684.$$

(4) பின்வரும் கடைப்பிரிவு நிகழ்வெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. குறைப்பிரிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

$(ABC) = 30$, $(\alpha BC) = 22$, $(AB\lambda) = 21$, $(\alpha\beta\lambda) = 27$

$(A\beta\lambda) = 28$, $(\alpha\beta C) = 25$, $(A\beta C) = 31$, $(\alpha\beta\lambda) = 80$.

(5) ஒருகல்லூரியைச் சேர்ந்த 400 புகுமுக வகுப்பு மாணவர்களின் முதல் பருவத் தேர்வு, இரண்டாம் பருவத்தேர்வு, பல்கலைக் கழகத் தேர்வு ஆகியவற்றின் முடிவுகள் வருமாறு: தேறியவர்கள் :—முதல் பருவத்தேர்வு 180, இரண்டாம் பருவத்தேர்வு 140, பல்கலைக் கழகத்தேர்வு 180; மூன்று தேர்வுகளிலும் தேறியவர்கள் 60; மூன்றிலும் தவறியவர்கள் 80; முதல் இரண்டிலும் தேறி மூன்றுவதில் தவறியவர்கள் 40; முதல் இரண்டிலும் தவறி மூன்றுவதில் தேறியவர்கள் 70; குறைந்தது இரண்டு தேர்வுகளில் தேறியவர்கள் எத்தனைபேர்?

(6) மதுரை நகரில் புகுமுகத் தேர்வு எழுதிய 1600 மாணவர்களில் 256 பேர் தனிப்பயிற்சி பெற்றவர்கள். தனிப்பயிற்சி பெற்றவர்களில் 150 பேர் தேறினுர்கள். மொத்தம் தேறியவர்கள் 422 பேர்களென்றுல், தனிப்பயிற்சியின் பயனை ஆராய்க.

(7) மலேரியாத் தடுப்புத்துறையினரால் ஒரு ஊரில் மொத்தமுள்ள 3248 பேர்களில் 812 பேர்களுக்குக் கொய்னு மாத்திரைகள் கொடுக்கப்பட்டன. மலேரியா காய்ச்சல் கண்டவர்கள் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு:

	காய்ச்சல் கண்டவர்கள்	காய்ச்சல் காணுதவர்கள்
கொய்னு சாப்பிட்டவர்	20	792
கொய்னு சாப்பிடாதவர்	220	2216

மலேரியா தடுப்பில் கொய்னுவின் பயனை ஆராய்க.

(8) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து தகப்பன் — மகன்களின் புத்திக் கூர்மை பற்றிய உறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

புத்திக் கூர்மையான மகன்களைக் கொண்ட புத்திக் கூர்மையான தகப்பனுர்கள் = 248.

மந்தமான மகன்களைக் கொண்ட புத்திக் கூர்மையான தகப்பனுர்கள் = 81.

புத்திக் கூர்மையான மகன்களைக் கொண்ட மந்தமான தகப்பனுர்கள் = 92.

மந்தமான மகன்களைக் கொண்ட மந்தமான தகப்பனுர்கள் = 579.

12. இடைச் செருகல்
(INTERPOLATION)

பொதுவாக x-ஐ மாறியாகக் கொண்ட $y = f(x)$ என்ற சார்பலன் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல், வர்க்கப் படுத்தல் போன்ற செயலிகளை (operators) யுடைய இயற் கணிதச் சார்பாகயிருப்பின் x-இன் மதிப்புகளுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களை இச் செயலிகளைச் செயல் படுத்துவதன் மூலம் மிகச் சரியாகப் பெறலாம். ஆனல், $y = log_{10} x$ போன்ற சார்பலன்களில் x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக் களைச் சாதாரண எண் கணிதச் செயலிகளின் மூலம் பெற முடியாது. எனவே, இத்தகைய சார்பலன்களின் மதிப்புக் களைக் காண x-இன் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களடங்கிய மடக்கைப் பட்டியலின் உதவியை நாடவேண்டிய தேவையேற்படுகிறது. உதாரணமாக,

x	$y = log_{10}x$
2.0	0.30103
2.1	0.32222
2.2	0.34242
2.3	0.36173
2.4	0.38021
2.5	0.39794
2.6	0.41497

என்ற மடக்கைப் பட்டியல் கொடுக்கப் பட்டிருப்பதாகக் கொள் வோம். இத்தகைய பட்டியல்களிலிருந்து, அதில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள x இன் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். ஆனல், பட்டியலில் கொடுக்கப்

பட்டுள்ள x-இன் ஏதாவது இரண்டு அடுத்தடுத்த மதிப்புகளுக் கிடையில் ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய y-இன் மதிப்பு தேவைப் பட்டால் அம்மதிப்பை இப்பட்டியலிலிருந்து பெற இயலாது. உதாரணமாக, $x = 2.34$ க்குரிய y-இன் மதிப்பை இப் பட்டியலிலிருந்து பெறமுடியாது. இத்தகைய மதிப்புக்களை இடைச் செருகல் முறைகளின் மூலம் பெறமுடியும். இவ்வாறு, சில குறிப்பிட்ட சார்பின் மாறிகளும், அவற்றிற்குரிய சார்பலன் களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து ஏதாவது இரண்டு அடுத்தடுத்த சார்பின் மாறிகளுக்கிடையில் ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய சார்பலனின் மதிப்பைப் பெறுகின்ற முறைக்கு இடைச் செருகல் (Interpolation) என்று பெயர். அவ் விடை மதிப்பைப் பெறப் பயன்படும் சூத்திரத்திற்கு 'இடைச் செருகல் வாய்பாடு'' (Interpolation formula) என்று பெயர். இது போன்று, பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-இன் மதிப்பு களுக்குப் புறம்பான 2.7, 2.8, ...போன்ற ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய y-இன் மதிப்பையும் இடைச் செருகல் மூலம் காணலாம். இவ்வாறு பட்டியல் வரிசைக்குப் புறம்பான மதிப்புக்களைக் காணும் முறைக்குப் ''புறச் செருகல்'' (extrapolation) என்று பெயர். குறிப்பாக, வெவ்வேறு காலங் களை x-இன் மதிப்புக்களாகவும், அக்காலங்களுக்குரிய மதிப்புக் களை y-இன் மதிப்புக்களாகவும் கொண்ட ஒரு காலம் சார் தொடர்வரிசை (time series) x-இன் வருங்கால மதிப்புகளுக் குரிய y-இன் மதிப்புக்களைப் புறச் செருகல் மூலம் மதிப் பிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 1931, 1941, 1951, 1961, 1971-ஆம் ஆண்டுகளில் நம் நாட்டின் மக்கட் தொகையின் மதிப்புக்கள் கொண்ட ஒரு பட்டியலிலிருந்து 1972, 1973, 1981 முதலிய ஆண்டுகளின் மக்கள்தொகைகளைப் புறச் செருகல் மூலம் மதிப்பிடலாம். இவ்வாறு வருங்கால மதிப்புக் களை முன்னதாக மதிப்பிடப் பயன்படுவதால் புறச் செருகல் முறை ''முன்கணிப்பு'' (Forecastings) என்றும் வழங்கப் படுகிறது.

இடைச் செருகலில் மேற்கொள்ளப்படும் தற்கோள்கள்.
(Assumptions in interpolation)

(1) x இன் ஏதாவது இரு மதிப்புகளுக்கிடையே $f(x)$ இன் மதிப்புக்களில் திடீர் ஏற்றமோ அல்லது திடீர் இறக்கமோ இல்லையென்று கொள்ளப்படுகிறது.

(2) $f(x)$ இன் ஏற்ற இறக்கங்கள் ஒழுங்காகவும் ஒரே சீராகவும் இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

* இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் பல உள. அவைகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். (i) சம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள். (ii) அசம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் பல உள. அவற்றுள் ஒருசில வாய்பாடுகள் மட்டுமே இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(1) ஈருறுப்பு விரிவு முறை (Binomial expansion method):

சார்ரா மாறியாகிய x இன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களும், சார்ந்த மாறியாகிய y இன் விடுபட்ட மதிப்புக்குரிய x இன் மதிப்பும் சம இடைவெளிகளிலிருந்தால் இம்முறையைப் பயன்படுத்தி y இன் விடுபட்ட மதிப்பை மிகச் சுலபமாகப் பெறலாம். உதாரணமாக, $x = 0, 1, 2, 4, 5, \ldots\ldots, n$ என்ற மதிப்புக்களுக்குரிய y இன் மதிப்புக்கள் $y_0, y_1, y_2, y_4, y_5, \ldots\ldots y_n$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். $x = 3$க்குரிய y_3 இன் மதிப்பை இம் முறையைப் பயன்படுத்தி மிகச் சுலபமாக பெறமுடியும். ஏனெனில், x இன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களாகிய $0, 1, 2, 4, 5, \ldots\ldots, n$-ம், y இன் விடுபட்ட மதிப்பாகிய y_3க்குரிய x இன் மதிப்பாகிய 3-ம் சம இடைவெளிகளிலிருக்கின்றன. முதலில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களுடன் காணவேண்டிய மதிப்புக்களையும் சேர்த்து வரிசைப் படுத்திக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதிக் கொள்ளவேண்டும்.

x ...	0	1	2	3	4	...	...	...	n
y ...	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	...	...	...	y_n

$x = 3$க்குரிய y_3 இன் மதிப்பைப் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

$$y_n - n\, y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} + \ldots\ldots = 0.$$

இவ்வாய்ப்பாட்டில் $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots\ldots\ldots$ ஆகியவற்றின் குணகங்கள் யாவும் $(y-1)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்து குணகங்களென்பதை எளிதில் காணலாம். இதன் காரணமாகவே, இவ்வாய்ப்பாடு ஈருறுப்பு விரிவு முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது

* இடைச் செருகல் பற்றி விரிவாகத் தெரிந்துகொள்ள விரும்பின் ஆசிரியரின் "எண்சார் கணிதவியல்" என்ற நூலினைப் பார்க்கவும்.

$n = 5, 6, 7, 8$க்குரிய இவ்வாய்ப்பாட்டின் அமைப்புக்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$n = 5;\ y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$n = 6;\ y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0 = 0$$

$$n = 7;\ y_7 - 7y_6 + 21y_5 - 35y_4 + 35y_3 - 21y_2 + 7y_1 - y_0 = 0.$$

$$n = 8;\ y_8 - 8y_7 + 28y_6 - 56y_5 + 70y_4 - 56y_3 + 28y_2 - 8y_1 + y_0 = 0.$$

இதுபோல், n இன் மதிப்புக்கு உரிய வாய்ப்பாட்டை எழுதிக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 107 :

பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள உறுப்பினை மதிப்பிடுக.

x ...	1	2	3	4	5
$f(x)$ ...	216000	226981	—	250047	262144

(சென்னை பி.காம். 1963 செப்.)

தீர்வு :

காணவேண்டிய மதிப்பாகிய $f(3)$ ஐயும் சேர்த்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களை வரிசைப்படி y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 என்க. எனவே, $n = 4$க்குரிய வாய்ப்பாடு எழுதி அதில் இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவேண்டும்.

$n = 4$ ஆனால், $y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0.$

$$\therefore\ 262144 - 4\,(250047) + 6y_2 - 4\,(226981) + 276000 = 0$$

அதாவது, $478144 - 1908113 + 6y_2 = 0$

$$6y_2 = 1429969$$

$$y_2 = 238328.1$$

மாதிரி 108 :

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $\log 212$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x ...	210	211	212	213	214
$\log x$ ...	2.3222193	2.3242825	—	2.3283796	2.3304138

தீர்வு :

மொத்தம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் 4. எனவே, $n = 4$க்குரிய வாய்ப்பாட்டை எழுதி y_2 இன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$\therefore \quad 2.3304138 - 4\,(2.3283796) + 6y_2 - 4\,(2.3242825) + 2.3222493 = 0$$

$$2.3304138 - 9.3135184 + 6y_2 - 9.2971300 + 2.3222193 = 0$$

$$4.6526331 - 18.6106484 + 6y_2 = 0$$

$$\therefore \quad 6y_2 = 13.9580153$$

$$y_2 = 2.3263359$$

மாதிரி 109 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 1935, 1945 ஆகிய ஆண்டுகள் உற்பத்தியளவுகளை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	...	1920	1925	1930	1940	1950
உற்பத்தி	...	200	220	260	350	430

(இலட்சம் டன்களில்)

தீர்வு :

மதிப்பிடவேண்டிய ஆண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளுடன் சம இடைவெளிகளில் இருப்பதால் ஈருறுப்பு விரிவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம். முதலில் மதிப்பிட வேண்டிய ஆண்டுகளையும் கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டுகளுடன் சேர்த்து ஒழுங்கான வரிசையில் பின்வருமாறு அமைத்துக் கொள்ளவும்.

ஆண்டு	...	1920	25	30	35	40	45	50
x	...	0	1	2	3	4	5	6
உற்பத்தி	...	200	220	260	—	350	—	430
y	...	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

இங்கு y_3, y_5 ஆகிய இரு மதிப்புக்களைக் காண வேண்டியிருப்பதால், முதலில் $n = 6$ க்குரிய வாய்ப்பாட்டில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டு ஒரு சமன்பாட்டைப் பெறவேண்டும். பின்னர் $n = 5$ க்குரிய வாய்ப்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைப் பிரதியிட்டு ஒரு சமன்பாட்டைப் பெறவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து y_3, y_5 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். $n = 6$ க்குரிய வாய்ப்பாடு:

$$y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0 = 0.$$

$$\therefore \quad 430 - 6y_5 + 15(350) - 20y_3 + 15(260) - 6(220) + 200 = 0$$

$$430 - 6y_5 + 5250 - 20y_3 + 3900 - 1320 + 200 = 0$$

$$9780 - 1320 - 6y_5 - 20y_3 = 0$$

$$8460 - 6y_5 - 20y_3 = 0$$

$$\therefore \quad 6y_5 + 20y_3 = 8460$$

$$\therefore \quad 3y_5 + 10y_3 = 4230 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$n = 5$ க்குரிய வாய்ப்பாடு:

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5(350) + 10y_3 - 10(260) + 5(220) - 200 = 0$$

$$y_5 - 1750 + 10y_3 - 2600 + 1100 - 200 = 0$$

$$y_5 + 10y_3 - 4550 + 1100 = 0$$

$$y_5 + 10y_3 = 3450 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஐத் தீர்க்கவும்.

$$3y_5 + 10y_3 = 4230$$

$$y_5 + 10y_3 = 3450$$

கழிக்கவும்: $2y_5 = 780$

$$y_5 = \frac{780}{2} = 390$$

இம்மதிப்பை சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிடவும்:

$$390 + 10y_3 = 3450$$

$$\therefore \quad 10y_3 = 3450 - 390 = 3060$$

$$\therefore \quad y_3 = \frac{3060}{10} = 306$$

∴ 1935, 1945 ஆகிய ஆண்டுகளில் உற்பத்திகளின் மதிப்பீடுகள் முறையே 306, 390 இலட்சம் டன்களாகும்.

(2) நியூட்டனின் முன்வேக வேறுபாட்டு வாய்ப்பாடு (Newton's formula of forward differences)

சாராமாறியாகிய x இன் மதிப்புக்கள் சம இடைவெளி களில் இருந்தால் மட்டுமே நியூட்டனின் இந்த வாய்ப்பாட் டைப் பயன்படுத்தி இடைச் செருகல் மதிப்புக்களைப் பெற முடியும்.

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன சாராமாறியாகிய x இன் சில மதிப்புக்களென்றும், y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 என்பன x இன் இம்மதிப் புக்குரிய x ஐச் சார்ந்த மாறி y இன் மதிப்புக்களென்றும் கொள்க. x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகக் கொள்க. x, y ஆகிய மாறிகளின் இம்மதிப்புக் களை இரண்டு நிரல்களில் வரிசையாக எழுதிக் கொள்க. y_1-y_0, y_2-y_1, y_3-y_2, y_4-y_3 என்பன y இன் முதல் நிலை வேறுபாடு களென அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்வேறுபாடுகள் முறையே Δy_0, Δy_1, Δy_2, Δy_3 என்று குறிப்பிடப்படப் படுகின்றன. இவ்வேறுபாடுகள் யாவும் மூன்ருவது நிரலில் Δy_0 ஆனது y_1, y_0 ஆகியவற்றிற்கிடையே வருமாறும், Δy_1 ஆனது y_2, y_1 ஆகிய வற்றிற்கிடையே வருமாறும், Δy_2 ஆனது y_3, y_2 ஆகியவற்றிற் கிடையே வருமாறும், Δy_3 ஆனது y_4, y_3 ஆகியவற்றிற் கிடையே வருமாறும் எழுதுக. இதுபோல், $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$; $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$ என்ற இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளைக் கணக்கிட்டு, $\Delta^2 y_0$ ஆனது Δy_1 க்கும் Δy_0 க்கு மிடையே வருமாறும், $\Delta^2 y_1$ ஆனது Δy_2 க்கும் Δy_1 க்கு மிடையே வருமாறும், $\Delta^2 y_2$ ஆனது Δy_3 க்கும் Δy_2 க்கு மிடையே வருமாறும் நான்காவது நிரலில் எழுதுக. இதுபோல் ஐந்தாவது நிரலில் $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$, என்ற மூன்ரும் நிலை வேறுபாடுகளையும், ஆரும் நிரலில் $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$ என்ற நான்காம் நிலை வேறுபாட்டையும் எழுதுக. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற பட்டியலுக்கு வேறு பாட்டுப் பட்டியலென்று பெயர்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$			
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_4	y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$

இப்பொழுது $x = x_r$ க்குரிய y இன் மதிப்பு y_r ஐ மதிப்பிட வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் கீழ்க்காணும் தொடர்பைப் பயன்படுத்தி t என்ற மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$t = \frac{x_r - x_0}{\text{இடைவெளி}}$$

t இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டபின் பின்வரும் இடைச் செருகல் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி y_r இன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

$$y_r = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\times 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\times 2\times 3}\Delta^3 y_0$$
$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots\ldots$$

இவ்வாய்ப்பாட்டிற்கு நியூட்டனின் முன்வேக வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் வாய்ப்பாடு அல்லது சுருக்கமாக நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்ப்பாடு என்று பெயர்.

மாதிரி 110 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 29 வயதிற்கான ஆண்டுப் பிரிமியத்தை மதிப்பிடுக.

வயது	...	24	28	32	36
ஆண்டு பிரிமியம்	...	1427	1580	1772	1996

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

தீர்வு :

முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியலைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கவும்.

வயது x	பிரிமியம் y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
24	<u>1427</u>			
		<u>153</u>		
28	1580		<u>39</u>	
		192		<u>−7</u>
32	1772		32	
		224		
36	1996			

y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களாகிய 1427, 153, 39, −7 என்பன அடிக்கோடிடப்பட்டிருக்கின்றன.

இங்கு, $x_0 = 24$, $x_r = 29$, சம இடைவெளி $= 4$

$$\therefore \quad t = \frac{x_r - x_0}{\text{இடைவெளி}} = \frac{29-24}{4} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

நாம் y_{29} இன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$$y_r = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\times 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\times 2\times 3}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4 y_0$$

$$\therefore \quad y_{29} = 1427 + (1.25)\,153 + \frac{(1.25)(0.25)}{1\times 2}(39) + \frac{(1.25)(.25)(-.75)}{1\times 2\times 3}(-7)$$

$$= 1427 + 191.25 + 6.09375 + 1.640625$$

$$= 1625.98.$$

மாதிரி 111 :

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு u_3 இன் மதிப்பைக் காண்க.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1	11	21	28	29

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

தீர்வு ;

வேறுபாட்டு பட்டியல் வருமாறு.

x	$y = u_x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1				
		10			
1	11		0		
		10		−3	
2	21		−3		0
		7		−3	
3	28		−6		
		1			
4	29				

$y_9 = u_9$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும்.

இங்கு $x_0 = 0$, $x_r = 9$, இடைவெளி $= 1$

$$\therefore \quad t = \frac{x_r - x_0}{\text{இடைவெளி}} = \frac{9-0}{1} = 9.$$

$$y_9 = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\times 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\times 2\times 3}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4 y_0$$

$$= 1 + 9(10) + \frac{9(8)}{2}(0) + \frac{9(8)(7)}{6}(-3) + \frac{9(8)(7)(6)}{24}(0)$$

$$= 1 + 90 + 0 - 252 + 0$$

$$= -161.$$

மாதிரி 112 :

x, u_x-ன் பட்டியல் பின்வருமாறு.

x ...	1	2	3	4	5
u_x ...	375	414	451	498	546

$u_{2.6}$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு :

வேறுபாட்டுப் பட்டியல் வருமாறு.

x	$y = u_x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	375				
		39			
2	414		−2		
		37		12	
3	451		10		−21
		47		−9	
4	498		1		
		48			
5	546				

$x_0 = 1, \quad x_t = 2.5, \quad$ இடைவெளி $= 1$

$$\therefore t = \frac{x_t - x_0}{\text{இ.வெ.}} = \frac{2.5-1}{1} = 1.5$$

$$u_{2.5} = y_{2.5} = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\times 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\times 2\times 3}\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4 y_0$$

$$= 375 + (1.5)(39) + \frac{(1.5)(.5)}{2}(-2)$$

$$+ \frac{(1.5)(.5)(-.5)}{6}(12)$$

$$+ \frac{(1.5)(.5)(-.5)(-1.5)}{24}(-21)$$

$$= 375 + 58.5 - 0.75 - 0.75 - 0.4922$$

$$= 431.5078.$$

***அசம இடைச் செருகல்* (Interpolation for unequal intervals):**

நாம் இதுவரை படித்த இடைச் செருகல் முறைகளில் சம இடைவெளியுள்ள x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய $f(x)$ இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தன. அவற்றிலிருந்து x இன் ஏதாவது ஒரு இடைமதிப்புக் குரிய $f(x)$ இன் மதிப்பினைக் கண்டோம். ஆனால் கண்டறியப்படும் விவரங்கள் எப்போதும் சாரா மாறியின் சம இடைவெளி மதிப்புக்களுக் குரியனவாக யிருப்பதில்லை. எனவே, x இன் அசம இடைவெளி மதிப்புகளுக்குரிய $f(x)$ இன் மதிப்புக்களைக் காணவேண்டிய தேவை யேற்படுகிறது. அசம இடைவெளிகளுக்கு இடைச் செருகல் மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் முறைகளுள் **இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் முறை மட்டும் இங்கு விளக்கப்** பட்டுள்ளது.

இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்ப்பாடு.
(Lagrange's formula for interpolation)

x_0, x_1, x_2, x_3 என்ற சாரா மாறி x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய சார்புடை மாறி y இன் மதிப்புக்களை y_0, y_1, y_2, y_3, என்க. x_0, x_1, x_2, x_3, என்பன சம இடைவெளிகளிலுமிருக்கலாம்; அசம

இடைவெளிகளிலும் இருக்கலாம். x இன் ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குரிய y இன் மதிப்பு y_x ஐக் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம். இந்த y_x இன் மதிப்பைப் பின்வரும் இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்ப்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\,(x_0...x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_3-x_0)\,(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}$$

y_0 ஐக் கொண்டுள்ள முதல் உறுப்பின் தொகுதியிலுள்ள காரணிகளை x இலிருந்து x_1, x_2, x_3 ஆகியவற்றைக் கழித்தும், பகுதியிலுள்ள காரணிகளை x_0 இலிருந்து x_1, x_2, x_3 ஆகியவற்றைக் கழித்தும் பெறலாம். இதுபோல், y_1 ஐக் கொண்டுள்ள இரண்டாவது உறுப்பின் தொகுயிலுள்ள காரணிகளை x இலிருந்து x_0, x_2, x_3 ஆகியவற்றைக் கழித்தும், பகுதியிலுள்ள காரணிகளை x_1 இலிருந்து x_0, x_2, x_3 ஆகியிவற்றைக் கழித்தும் பெறலாம். இதுபோல் ஏனைய உறுப்புக்களையும் பெறலாம்.

இலக்ராஞ்சியின் இந்த இடைச் செருகல் முறை சம இடைவெளிகளுக்கும் அசம இடைவெளிகளுக்கும் பொருந்துமாகையால் இது மிகவும் முக்கியமானதாகக் கருதப்படுகிறது.

மாதிரி 113 :

ஒரு குழந்தை பிறந்த ஆறு மாதங்களில் அதனுடைய எடை பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

மாதங்களில் வயது	...	0	2	3	5	6
ராத்தல்களில் எடை	...	5	7	8	10	12

நான்கு மாத குழந்தையின் எடையை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைப் பின்வருமாறு எழுதிக் கொள்க.

			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x
வயது	x	...	0	2	3	5	6	4
எடை	y	...	5	7	8	10	12	$y_4 = ?$

$$y_4 = 5\,\frac{(4-2)\,(4-3)\,(4-5)\,(4-6)}{(0-2)\,(0-3)\,(0-5)\,(0-6)}$$

$$+\;7\,\frac{(4-0)\,(4-3)\,(4-5)\,(4-6)}{(2-0)\,(2-3)\,(2-5)\,(2-6)}$$

$$+\;8\,\frac{(4-0)\,(4-2)\,(4-5)\,(4-6)}{(3-0)\,(3-2)\,(3-5)\,(3-6)}$$

$$+\;10\,\frac{(4-0)\,(4-2)\,(4-3)\,(4-6)}{(5-0)\,(5-2)\,(5-3)\,(5-6)}$$

$$+\;12\,\frac{(4-0)\,(4-2)\,(4-3)\,(4-5)}{(6-0)\,(6-2)\,(6-3)\,(6-5)}$$

$$= 5\,\frac{(2)\,(1)\,(-1)\,(-2)}{(-2)\,(-3)\,(-5)\,(-6)} + 7\,\frac{(4)(1)(-1)(-2)}{(2)(-1)(-3)(-4)}$$

$$=8\,\frac{(4)\,(2)\,(-1)\,(-2)}{(3)\,(1)\,(-2)\,(-3)} + 10\,\frac{(4)\,(2)\,(1)\,(-2)}{(5)\,(3)\,(2)\,(-1)} + 12\,\frac{(4)(2)(1)(-1)}{(6)\,(4)\,(3)\,(1)}$$

$$= 5\left(\frac{1}{45}\right) + 7\left(-\frac{1}{3}\right) + 8\left(\frac{8}{3}\right) + 10\left(\frac{8}{15}\right) + 12\left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{7}{3} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} - \frac{12}{9}$$

$$= \frac{80}{9} = 8.89.$$

∴ நான்கு மாதக் குழந்தையின் எடை = 8.89 ராத்தல்கள்.

மாதிரி 114:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து இலக்ராஞ்சியின் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி 30 வயதுக்குக் குறைவானவர்கள் 10,000 க்கு எத்தனை பேர்களென்று மதிப்பிடுக.

வயது (வருடங்களில்)	வாழ்பவர் (10,000 இன் வீதம்)
10 — 15	193.5
15 — 20	880
20 — 25	933
25 — 35	1636
35 — 45	1201
45 — 55	830

(சென்னை பி.காம். 1965 ஏப்.)

குறிப்பு : 30 வயதுக்குட் பட்டவர்களின் வீதம் காண வேண்டுமாகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலை வளர் நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

	வயது (x)		வீதம் (y)
x_0	15 க்குக் கீழ்		193.5
x_1	20	,,	1073.5
x_2	25	,,	2006.5
x_3	35	,,	3642.5
x_4	45	,,	4843.5
x_5	55	,,	5673.5
x	30	,,	$y_{30} = ?$

$$y_{30} = 193.5 \frac{(30-20)(30-25)(30-35)(30-45)(30-55)}{(15-20)(15-25)(15-35)(15-45)(15-55)}$$

$$+ 1073.5 \frac{(30-15)(30-25)(30-35)(30-45)(30-55)}{(20-15)(20-25)(20-35)(20-45)(20-55)}$$

$$+ 2006.5 \frac{(30-15)(30-20)(30-35)(30-45)(30-55)}{(25-15)(25-20)(25-35)(25-45)(25-55)}$$

$$+ 3642.5 \frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-45)(30-55)}{(35-15)(35-20)(35-25)(35-45)(35-55)}$$

$$+ 4843.5 \frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-35)(30-55)}{(45-15)(45-20)(45-25)(45-35)(45-55)}$$

$$+ 5673.5 \frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-35)(30-45)}{(55-15)(55-20)(55-25)(55-35)(55-45)}$$

$$= 193.5 \frac{(10)(5)(-5)(-15)(-25)}{(-5)(-10)(-20)(-30)(-40)}$$

$$+ 1073.5 \frac{(15)(5)(-5)(-15)(-25)}{(5)(-5)(-15)(-25)(-35)}$$

$$+ 2006.5 \frac{(15)(10)(-5)(-15)(-25)}{(10)(5)(-10)(-20)(-30)}$$

$$+ 3642.5 \frac{(15)(10)(5)(-15)(-25)}{(20)(15)(10)(-15)(-20)}$$

$$+ 4843.5 \frac{(15)(10)(5)(-5)(-25)}{(30)(25)(20)(10)(-10)}$$

$$+ 5673.5 \frac{(15)(10)(5)(-5)(-15)}{(40)(35)(30)(20)(10)}$$

$= 15.12 - 460.07 + 1881.09 + 1707.42 - 303.97 + 38.13$

$= 3641.76 - 764.04$

$= 2877.72$

பயிற்சி 13.

(1) பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்ட உறுப்பினைக் காண்க.

x ...	0	1	2	3	4
y ...	150	192	241	—	374

(2) பின்வரும் பட்டியலில் $x = 4$ க்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண்க.

x ...	2	3	4	5	6
y ...	144	172.9	—	248.8	298.5

(3) கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $x = 25$ க்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண்க.

x ...	5	10	15	20	25	30
y ...	7	10	12	17	—	28

(II பி.இ. 1965 செப். சென்னை)

(4) பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்ட மதிப்பைக் காண்க.

x ...	1	6	11	16	21
$f(x)$ ...	3.84	12.59	—	26.30	32.67

(5) பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்பை ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் வாய்ப்பாடு மூலம் காண்க.

ஆண்டு ...	1950	1955	1960	1965	1970
துணிகளின் விற்பனை ... (இலட்சம் கெஜங்கள்)	250	285	328	—	444

(6) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்புக்களைக் காண்க.

ஆண்டு ...	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919
நிலப்பரப்பு (மில். ஏக்கர்) ...	78.6	78.7	—	77.7	78.7	—	80.6	77.6	78.7

(7) அடியிற்காணும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்புக்களைக் காண்க.

x ...	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
y ...	.135	—	.111	.100	—	.082	.074

(8) பின்வரும் மதிப்புக்களைக் கொண்டு $u_{2\cdot3}$ யின் மதிப்பைக் காண்க.

x ...	1	2	3	4	5
u_x ...	10	50	70	80	100

(சென்னை பி காம். 1967 ஏப்.)

(9) ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் காணப்பட்ட வெப்ப நிலைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து காலை 3 மணிக்கும், காலை 5 மணிக்குமுள்ள வெப்ப நிலைகளைக் காண்க.

நேரம் (மணி) ...	காலை 2	6	10	மாலை 2
வெப்ப நிலை (°C) ...	40.2	42.4	51.0	72 4

(பி. காம்.: சென்னை 1967 செப்.; மதுரை 1969 செப்.)

(10) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் x என்பது ஈயமும் துத்தநாகமும் கலந்த ஒரு உலோகத்தில் ஈயத்தின் சத வீதத்தையும் θ என்பது அவ்வுலோகம் உருகும் நிலையை (°C) யும் குறிக்கின்றன.

x ...	40	50	60	70	80	90
θ ...	184	204	226	250	276	304

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1964 செப்.)

(11) ஒரு வட்டத்தின் விட்ட மதிப்புகளும் (d), அவற்றிற் கேற்ப வட்டத்தின் பரப்புகளும் (A) கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

d ...	80	85	90	95	100
A ...	5026	5674	6362	7088	7854

விட்டத்தின் மதிப்பு 82 ஆனால் வட்டத்தின் பரப்பை மதிப்பிடுக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

(12) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து $f(8)$, $f(24)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

x ...	6	11	16	21	26	31
$f(x)$ ...	25.1	31.8	40.1	46.8	53.2	63.8

(13) பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து, இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி $x = 27$ க்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண்க.

x ...	14	17	31	35
y ...	68.7	64.0	44.0	39.1

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1964 செப்.)

(14) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு $f(19)$ ஐ மதிப்பிடுக.

x	11	17	21	23	31
$f(19)$	14.6	83.5	19.4	28.0	92.3

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1963 ஏப்.)

(15) பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து u_8 ஐ மதிப்பிடுக.

u_4	u_5	u_7	u_{10}	u_{11}	u_{13}
48	100	294	900	1210	2028

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(16) பின்வரும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள உறுப்பை மதிப்பிடுக.

x	...	2	10	12	15	23
$f(x)$	...	15.7	14.3	—	13.6	13.0

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(17) இலக்ராஞ்சியின் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, அடியிற்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து u_{22} இன் மதிப்பைக் காண்க.

$$u_{10} = 22.40, \quad u_{15} = 21.66, \quad u_{20} = 20.82, \quad u_{25} = 19.85.$$

(18) நீராவியின் அழுத்தத்திற்கும், வெப்ப நிலைக்குமுள்ள தொடர்பு கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வெப்ப நிலை 372° ஆக யிருக்கும்போது அழுத்தத்தைக் காண்க.

வெப்ப நிலை	...	361	367	378	387	399
அழுத்தம்	...	154.9	167.0	191.0	212.5	244.2

(19) ஐ. ஏ. எஸ். தேர்வு எழுதிய 130 பேர்களின் மதிப்பெண் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து 119 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

மதிப்பெண்		நிகழ்வெண்
50 க்கு மேல்		130
72	,,	126
90	,,	60
110	,,	36
140	,,	14

(20) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து இலக்ராஞ்சி யின் முறைப்படி 45 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைந்த மதிப்பெண் கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
30 — 40	31
40 — 50	42
50 — 60	51
60 — 70	35
70 — 80	31

13. காலம்சார் தொடர்வரிசை
(TIME—SERIES)

ஒரு தொழிலின் வருங்காலப் போக்கினை (trend) முன் கூட்டியே அறிந்து கொள்ளுவதன் மூலமே அத்தொழிலைப் பெருக்கவோ அல்லது வளர்ச்சியடையச் செய்யவோ முடியும். உதாரணமாக, ஒரு தொழில் அடுத்த ஐந்தாண்டு காலத்திற்குள் வளர்ச்சி குன்றிவிடுமென முன்கூட்டித் தெரிந்தால் அதற்குத்தக்க நடவடிக்கைகளை மேற்கொண்டு அத்தொழிலை அழிந்து போகாமல் செய்வதோடு, வளர்ச்சியடையவும் செய்ய முடியும். இது போன்று ஒரு தொழிற்சாலையில் செய்யப் படுகின்ற பொருட்கள் அடுத்த இரண்டு மூன்று ஆண்டுளில் எவ்விதப் போட்டியாலும் பாதிக்கப் படாமல், பொது மக்களால் பெரிதும் விரும்பி வாங்கப்படுமென்று முன்னதாகத் தெரிந்தால், அப்பொருட்களின் உற்பத்தியைப் பெருக்குவதற்கான வழிமுறைகளைக் கையாளமுடியும். இவ்வாறு ஒரு தொழிலின் வருங்காலப் போக்கினை முன்னதாக அறியவேண்டுமாயின் அத்தொழிலைப் பற்றிய கடந்தகால, நிகழ்கால விவரங்களை ஆராய்தல் அவசியமாகும். ஒரே காலத்தில் நிகழ்கின்ற விவரங்களை ஆராய நிகழ்வெண் பரவல்கள் பயன்படுகின்றன. ஆனல் கடந்த கால, நிகழ்காலத்தைச் சேர்ந்த பல்வேறு நேரங்களுக்குரிய விவரங்களை ஆராய தனிப்பட்ட புள்ளியியல் முறைகள் உள்ளன. இவ்வாறு பல்வேறு நேரங்களைச் சேர்ந்த விவரங்களை, அவை நிகழ்ந்த நேரங்களுக்கேற்ப வரிசைப் படுத்தப்பட்டிருப்பதால் அவ்விவரங்களின் வரிசைக்குக் "காலம்சார் தொடர் வரிசை" (Time—Series) என்று பெயர். பொதுவாக ஒரு காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஆய்வுக்கேற்ற வகையில் சம இடைவெளிகளில் நிகழ்ந்தவையாகவே இருக்குமாறு அமைத்துக் கொள்ளப் படுகின்றன. இச்சம இடைவெளியானது வினடியாகவோ, நிமிடமாகவோ, மணியாகவோ, நாளாகவோ, வாரமாகவோ, மாதமாகவோ,

வருடமாகவோ வருடங்களின் தொகுப்புக்களாகாவோ இருக்க லாம். ஒரு இடத்தில் ஒரு நாளில் ஒரு மணி நேர இடைவெளி களில் அளவிடப்பட்ட வெப்பநிலை அளவுகள், ஒரு திரைப்பட அரங்கின் ஒரு மாதத்திற்குரிய தினசரி வசூல்கள், ஒரு விற்பனை நிலையத்தின் வாராந்தர விற்பனைப்பட்டியல், ஒரு தொழிற்சாலை யின் மாதாந்தர உற்பத்திப்பட்டியல், ஒரு கூட்டுறவு விற்பனை நிலையத்தில் ஆண்டு தோறும் கிடைத்த இலாபகங்களின் பட்டி யல், தொடர்ந்து பல மக்கள்கணிப்பு ஆண்டுகளில் (Census Years) ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகைகளடங்கிய பட்டியல் முதலியன காலம் சார் வரிசைகளாகும்.

காலம்சார் தொடர்பின் பகுப்பாய்வு : (Time Series Analysis)

காலம் சார் தொடர்களிலுள்ள விவரங்களில் காலப் போக்கிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் பற்றிய ஒழுங்குமுறைகளைக் கண்டுபிடித்து அளவிடுதலே காலம் சார் தொடர்கள் பற்றிய புள்ளியியல் பகுப்பாய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும். காலம் சார் தொடர்களைப் பகுப்பாய்வதன் மூலம் பலவகையான பலன்களை யடைய முடிகிறது.

(1) வருங்காலத் திட்டங்களை வகுத்துக் கொள்ள காலம் சார் தொடரின் பகுப்பாய்வு உதவியாக இருக்கிறது. ஒரு தொழில் நிறுவனத்தை எப்படி, எப்பொழுது, எவ்வளவு விரிவு படுத்த வேண்டும், எங்கெங்கு எத்தனை கிளைகள் நிறுவலாம், எந்தக் கிளையில் எந்தப் புதிய பிரிவைத் தொடங்கலாம், எவ்வளவு அதிகப்படியான வேலையாட்களை எங்கெங்கு நியமிக்க லாம் என்பது போன்ற பல முக்கியப் பிரச்சினைகளில் முடிவுக ளெடுப்பது நிர்வாகத்தினருக்கு மிகுந்த சிக்கல்கள் நிறைந்தவை யாகும். வருங்காலத் தேவைகளைப் பொறுத்தே இது போன்ற பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணமுடியும். கடந்த கால, நிகழ் கால விவரங்களடங்கிய காலம் சார் தொடரைப் பகுப்பாய்வு செய்து, வருங்காலப் போக்கினை நிர்ணயித்து, வருங்காலத் தேவைகளை மதிப்பிட்டு அத்தேவைகளுக்கேற்ப வருங்காலத் திட்டங்களை வகுத்துச் செயல்பட முடியும்.

(2) ஒரு தொழில் நிறுவனத்தில் கடந்த கால விவரங் களைப் பகுப்பாய்வு செய்து மதிப்பிடப்பட்ட நிலைக்கும், தற் போது அந்நிறுவனம் எய்திருக்கும் உண்மை நிலைக்குமுள்ள வித்தியாசத்தை அளவிட்டு அதற்குத் தகுந்த நடவடிக்கைகளை மேற்கொள்ள முடியும். காலம் சார் தொடர் பகுப்பாய்வின் மூலம் எதிர்பார்க்கப்பட்ட வளர்ச்சியினை ஒரு தொழில்

அடைந்திராவிட்டால், அக்குறைபாட்டிற்கான காரணங்களை ஆராய்ந்து கண்டுபிடித்து அவற்றை நிவர்த்தி செய்து மேற்கொண்டு வளர்ச்சிக்கான செயல் முறைகளை மேற்கொள்ள முடியும்.

(3) உற்பத்திப் பொருட்களின் விநியோகத்தைக் கட்டுப்படுத்த காலம் சார் தொடர் பகுப்பாய்வுத் துணைபுரிகிறது. ஒரு நிறுவனத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்களின் தேவைகள் எந்த எந்த இடங்களில் எந்த எந்தக் காலங்களில் அதிகமாக இருக்குமென்றறிந்து அத்தேவைகளுக்கேற்ப விநியோகம் செய்யப்படாவிடில், தேவையுள்ள இடங்களில் பொருட்களில்லாமலும், தேவையற்ற இடங்களில் பொருட்கள் தேங்கியும் கிடக்கிற நிலையேற்பட்டுவிடும். ஆகவே, எவ்வகைப் பொருட்கள் எந்த எந்த இடங்களில் எந்த எந்தக் காலங்களில் தேவைப்படுமென்பதை முன்னதாக அறிந்து கொள்ள வேண்டியது அவசியமாகும். அப்பொருட்களின் கடந்த கால விற்பனை விவரங்களடங்கிய காலம் சார் தொடரைப் பகுப்பாய்வு செய்வதன் மூலம் மேலே சுட்டிக்காட்டப்பட்ட விவரங்களை முன்னதாக அறிந்து கொள்ள முடியும்.

(4) தொழில்களில் ஏற்படுகின்ற வீண் செலவுகளும், கழிவுகளும் பெரும்பாலும் பருவகால அலைவுகளின் (Seasonal Oscillations) காரணமாகவே ஏற்படுகின்றன. பருவகால ஏற்றத் தாழ்வுகளை முன்னதாகவே கணக்கிட முடிந்தால் அதற்குத் தக்கவாறு நடவடிக்கைகளை மேற்கொண்டு இத்தகைய வீண்செலவுகளையும் கழிவுகளையும் குறைக்க முடியும். உதாரணமாக பட்டாசுத் தொழிலானது பருவகால ஏற்றத் தாழ்வுகளால் பெரிதும் பாதிக்கப் படுகின்ற தொழிலாகும். தீபாவளி, கிறிஸ்துமஸ் ஆகிய பருவகாலங்களில் அதாவது ஐப்பசி, கார்த்திகை, மார்கழி மாதங்களில் பட்டாசுகளின் விற்பனை உச்சமாக இருக்கும். ஆகவே இப்பருவங்களுக்கு முந்திய சில மதாங்களில் இப்பருவகாலத் தேவைகளுக்கான பட்டாசுகளைத் தயாரிப்பதில் பட்டாசுத் தொழிற்சாலைகள் தீவிரமாக ஈடுபடுகின்றன. ஏராளமான வேலையாட்களைத் தற்காலிகமாக நியமித்து, தேவைக்கு ஏற்ப பட்டாசுகளைத் தயாரிக்கின்றனர். ஆனால் தேவைக்கும் அதிகமாக உற்பத்தி செய்துவிட்டால், ஏராளமான பட்டாசுகள் விற்பனையின்றித் தேங்கி விடலாம். ஆகவே, பட்டாசுகளின் தேவையின் அளவை முன்னதாக நிர்ணக்க வேண்டியது அவசியமாகும். ஆனால் மழையின்றி, உற்பத்திக்குன்றி, வரட்சி மிகுந்துள்ள ஆண்டுகளில் பட்டாசுகளின் விற்பனை குறை

வதும், செழிப்பான ஆண்டுகளில் விற்பனை அதிகரிப்பதும் இயல்பே. ஆகவே, இத்தகைய நிலமைகளுக்கேற்ப தேவைகளின் அளவுகளை நிர்ணயிக்க காலம் சார் தொடர்களின் பகுப்பாய்வு பயன்படுகின்றது. மேலும் இத்தகையப் பருவ காலத் தொழில்களில் பணிபுரிகின்ற நிரந்தர வேலையாட்கள் மற்ற காலங்களில் வேலையின்றியிருக்க நேரிடுமாகையால் வேறு பருவங்களுக்குத் தேவையான பொருட்களை உற்பத்தி செய்வதன் மூலமோ அல்லது உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்களின் துணைப் பொருட்களை உற்பத்தி செய்வதன் மூலமாகவோ, வீண் செலவுகளைக் குறைக்கலாம். உதாரணமாக, பட்டாசுத் தொழிலுடன், வெடிமருந்துகள் தயாரிப்பு, தீப்பெட்டித் தயாரிப்பு முதலிய தொழில்களையும் மேற்கொள்ளலாம். பருவகால அலைவுகளினால் தொழிலில் ஏற்படுகின்ற தீய விளைவுகளைக் குறைப்பது தான் இத்துணைத் தொழில்களை மேற்கொள்வதன் நோக்கமாகும். ஆகவே, பருவகால அலைவுகளை அளவிடுதன் மூலமே இவைகள் யாவற்றையும் மேற்கொள்வதற்கான திட்டங்களை வகுக்க முடியும். இவ்வாறு பருவகால அலைவுகளை அளவிடுவது காலம் சார் தொடர்களின் பகுப்பாய்வின் முக்கிய பணிகளுள் ஒன்றாகும்.

(5) ஒரு தொழிலில் ஏற்படுகின்ற மாறுதல்களையும், முன்னேற்றங்களையும் ஆராய்கின்ற நிர்வாகத்தினர் கீழ்க்காணும் மூன்று வினாக்களுக்கு விடைகாண முயலுகின்றனர்.

(அ) தொழிலின் தற்போதைய நிலைமைக்குக் கடந்த காலத்தில் காரணமாயிருந்தவை யாவை?

(ஆ) தற்போது தொழிலைப் பாதித்துக் கொண்டிருக்கின்ற அல்லது தொழிலின் முன்னேற்றத்திற்குத் துணையாகயிருக்கின்ற காரண காரியங்கள் யாவை?

(இ) தொழிலில் தற்போது செயல்பட்டு வருகின்ற காரண காரியங்களின் வருங்கால விளைவுகள் எப்படியிருக்கும்?

இந்த மூன்று வினாக்களுக்குரிய விடைகளையும் குறிப்பிட்ட தொழிலைப் பற்றிய கடந்த கால, தற்கால விவரங்களடங்கிய காலம் சார் தொடரைப் பகுப்பாய்வு செய்வதன் மூலம் பெற முடியும். முதல் இரண்டு கேள்விகளுக்குரிய விடைகளில் அடிப்படையிலமைந்த மூன்றாவது கேள்வியின் விடைதான் அத் தொழிலின் வருங்கால நிலைப்பற்றிய முன்கூற்று (prediction) எனப்படுகிறது. ஒரு தொழிலின் வருங்கால நிலைபற்றிய முன்

கூற்றுதான் அத்தொழிலின் நிர்வாகத்தினரின் முக்கிய நோக்க மாகும். விலை ஏறக்கூடிய பொருட்களை விலையேறும் முன்னால் வாங்கி வைத்தல்; விலைசரியக்கூடிய பொருட்களை விலைசரியு முன்னால் விற்றல்; வருங்காலத்தேவைக்கேற்றவாறு பொருட் களைத் தேக்கி வைத்தல்; வருங்காலத்தில் தேவைப்படாத பொருட்களைத் தேக்கி வைக்காதிருத்தல்; குறைந்த வட்டி வீதத்தில் கடன் வாங்குதல்; கொடுக்கப் படுகின்ற கடன் திரும்பி வந்து விடுமென அறிந்த பின்னரே கடன் வழங்குதல்; தொழிலின் வருங்கால முன்னேற்றத்தை அறிந்து தொழிலை விரிவுபடுத்துதல்; பயனுள்ள நேரத்தை அறிந்து விளம்பரங் கள் செய்தல்—என்பவையெல்லாம் ஒரு தொழிலின் இலாபகர மான முன்னேற்றத்திற்கு அடிகோலுபவையாகும். இச்செயல் களில் சிறு தவறுகளேற்படினும் பெரும் இழப்புக்களையடைய நேரிடும். இவைகளைச் சரியாகச் செயல்படுத்த வேண்டு மாயின் வருங்காலத்தைப் பற்றிய சரியான முன்கூற்று அவசிய மாகும். இத்தகைய முன்கூற்றினை அத்தொழில் பற்றிய காலம் சார் தொடரின் பகுப்பாய்வின் மூலமே காணமுடியும்.

காலம்சார் தொடர்களில் காணப்படுகின்ற அசைவுகள்

ஒரு காலம் சார் தொடரானது பல தரப்பட்ட அசைவு களினால் (movements) பாதிக்கப்படுகிறது. இவற்றுள் சில வகை அசைகள் ஒரே சீராக ஒழுங்கான இடைவெளிகளில் திரும்பத் திரும்ப ஏற்படுகின்றன; இன்னும் சில ஒழுங்கான இடைவெளி களில் அல்லாமல் திரும்பி ஏற்படுபவை; இன்னும் சில எப்போதாவது ஏற்படுபவையாகும். இவ்வாறு ஒரு காலத் தொடரில் காணப்படுகின்ற அசைவுகள் அவைகளின் தன்மை களுக்கேற்ப நான்கு வகைகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

(அ) நீள்காலப்போக்கு (long-time trend or Secular trend)

(ஆ) பருவகால மாறுபாடுகள் (Seasonal Variations)

(இ) சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical Variations)

(ஈ) ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் (Random Fluctuations)

இந்நான்கு அசைவுகளும் கடந்த கால நிலை பற்றிய விளக் கத்திற்கும், வருங்கால நிலை பற்றிய முன் கூற்றுக்கும் அடிப் படையாக அமைவதால் புள்ளியியல் ஆய்வில் இவை முக்கிய இடம் பெறுகின்றன. ஒவ்வொரு அசைவும் ஏற்படுவதற்கான காரணங்களுக்கேற்றவாறு அவ்வசைவின் போக்கு அமைந்

திருக்கும். பெரும்பாலும் எல்லாவகைக் காலம் சார் தொடர் களிலும் இந்த நான்கு வகை அசைவுகளும் இருப்பதைக் காண லாம். ஒரு காலம் சார் தொடரிலுள்ள இந்த நான்கு வகை அசைவுகளையும் தனிமைப்படுத்திப் பிரித்து அளவிட்டு, இவ் அசைவுகளுக்கான காரணங்களையும் அவற்றின் விளைவுகளையும் ஆராய்வதே புள்ளியியல் ஆய்வாளரின் முக்கிய பணியாகும்.

நீள்காலப்போக்கு (Secular or Basic or long time trend)

பொருளாதார விவரங்களைக் கொண்டமைக்கப்பட்ட ஒரு காலம் சார் தொடரினை நாம் பார்த்தோமேயானால், அத் தொடரிலுள்ள மதிப்புக்களில் மாதத்திற்கு மாதமும், ஆண்டுக்கு ஆண்டும் ஏற்ற இறக்கங்களிருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய சிறு சிறு ஏற்ற இறக்கங்கள் காணப்பட்ட போதிலும், அத் தொடரின் பல ஆண்டுகளுக்குரிய மதிப்புக்கள் பொதுவான ஏற்றத்துடனோ அல்லது இரக்கத்துடனோ முடியும். உதாரண மாக, புதிதாகத் தொடங்கப்பட்ட துணி விற்பனை நிலையம் ஒன்றில் முதல் ஆண்டின் மாதாந்தர விற்பனைகள் மாதாந் தோறும் சமமாகயில்லாமல் ஏற்ற, இறக்கங்களுடனிருபதைக் காணலாம். திருமண மாதங்களிலும், தீபாவளி, கிறிஸ்துமஸ், பொங்கல் ஆகிய பண்டிகை மாதங்களிலும் விற்பனைகள் மிக அதிகமாகவும், ஏனைய மாதங்களில் குறைவாகவு மிருப்பதைக் காணமுடியும். இத்தகைய ஏற்ற இறக்கங்களிருத்த போதிலும், பொதுவாக நோக்குமிடத்து, அந்நிலையத்தில் மாத விற்பனை மெதுவாகக் கூடிக்கொண்டே செல்வதைக் காணலம். இது போல், ஆண்டு விற்பனைகளில் ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்ற இறக்கங்கள் இருந்த போதிலும், தொடர்ச்சியான பல ஆண்டு களின் விற்பனைப் பட்டியலைக் கவனித்துப் பார்த்தால், சராசரி ஆண்டு விற்பனை மெதுவாக ஏறிக் கொண்டோ அல்லது இறங்கிக் கொண்டோ செல்வதைக் காணலாம். ஒரு நீண்ட காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற பொதுவான ஏற்றம் அல்லது இறக்கத்தைக் காட்டுகின்ற போக்கு (trend) அக்காலம் சார் தொடரின் அடிப்படைப் போக்கு (Basic trend) ஆகும். ஒரு காலம் சார் தொடரில் இத்தகையப் போக்கு நீண்ட காலத் தைச் சார்ந்த விவரங்களிடையே மட்டுமே காணப்படுமாகை யால் இந்த அடிப்படைப் போக்கானது அக் காலம் சார் தொடரின் "நீள்காலப் போக்கு" (long term trend or Secular trend) என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு காலம் சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்கினை மிகச்சரியாக அளவிடுதல் காலம் சார் தொடர்ப்பகுப்பாய்வின் முக்கிய நோக்கங்களுள் ஒன்றாகும்.

மேலும் ஒரு காலம் சார் தொடரின் நீள் காலப் போக்கின் மதிப்புக்கள் அத் தொடரில் காணப்படுகின்ற ஏனைய மூன்று அசைவுகளாகிய பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் மாறுபாடுகள், ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் ஆகியவற்றை அளவிடுவதற்கான அடிப்படைகளாகவும் அமைகின்றன. அது மட்டுமின்றி, நீள்காலப் போக்கின் ஏற்றம் அல்லது இறக்கத்தைக் கட்டுப் படுத்திக் கொண்டிருக்கின்ற காரண காரியங்கள் நிலைத்தன்மையை உடையவையாக இருக்குமாதலால், நீள் காலப் போக்கு அதன் தன்மையை திடீரென மாற்றிக் கொள்வதில்லை. ஆகவே, ஒரு காலம் சார் தொடரின் கடந்த காலப் போக்குத் தற்காலத்திலும் நீடித்துக் கொண்டிருப்பதாகவும், அடுத்து நெருங்கிய வருங்காலத்திலும் இப்போக்கு நீடிக்குமென்றும் கருதலாம். காலம் சார் தொடர்களின் போக்குகளை அளவிடும் முறைகள் யாவும் இத் தற்கோளின் (assumption) அடிப்படையிலேயே அமைந்துள்ளன. இதே தற்கோளின் அடிப்படையில் தான் காலம் சார் தொடர்களின் வருங்கால மதிப்புக்களின் முன் கணிப்புக்கள் (forecasts) செய்யப்படுகின்றன.

பருவகால மாறுபாடுகள்: (Seasonal Variations)

ஒரு ஆண்டு அல்லது அதற்கும் குறைவான ஒரு குறிப்பிட்ட கால வட்டத்தில் (period) மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படுகின்ற ஒரு காலவட்ட அசைவிற்குப் (periodic movement) பருவகால அசைவு (Seasonal variation) என்று பெயர். ஒரு காலம் சார் தொடரில் பருவகால அசைவுகள் இரண்டு முக்கிய காரணங்களினால் ஏற்படுகின்றன. தட்ப, வெப்ப நிலைகள் (Climatic conditions) பருவகால அசைவுகளேற்பட முதற்காரணமாகின்றன. விவசாயத் தொழில் தட்ப, வெப்ப நிலைகளுக்கும், மழையளவுகளுக்கு மேற்ப செயல்பட்டு வருகின்றது. விவசாயத் தொழிலில் ஆண்டு தோறும் குறிப்பிட்ட காலங்களில் பயிரிடப்பட்டு, குறிப்பிட்ட காலங்களிலேயே அறுவடைகள் செய்யப்படுகின்றன. ஆகவே, விவசாயிகளின் வருமானங்களும் ஆண்டு முழுவதும் ஒரே சீராகயிருப்பதில்லை. அறுவடையாகும் பொழுது மட்டுமே அவர்கள் வருமானம் பெறுகிறார்கள். இதன் விளைவாக அறுவடைக் காலங்களில் கிராமப்புறங்களில் சந்தைகளில் வியாபாரம் பெருகுகின்றது. அறுவடைப் பொருட்கள் பல இடங்களுக்கும் அனுப்பப்படுவதால் சாலைப் போக்குவரத்து அதிகரிக்கிறது. பாங்குகளில் வைப்புத் தொகைகளின் (deposits) அளவுகள் பெருகுகின்றன. இது போன்று, பயிரிடுங் காலங்களில் விவசாயிகள் விவசாயச் செலவுகளுக்காக பாங்கு

களிலுள்ள வைப்புப் பணத்தை வாங்கிக் கொள்வதோடல்லாமல், அதிகப்படியான செலவுகளுக்காகக் கடன் வாங்கவும் முயல்கின்றனர். எனவே, பாங்குகள் விவசாயிகளுக்குக் கடன் வழங்குகின்றன. விவசாயிகளிடம் செலவுகளுக்குப் போதுமான பணம் இல்லாததால் சந்தைகளில் வியாபாரம் குறைகிறது. இவ்வாறு தட்ப, வெப்ப நிலைகளுக்கு ஏற்ப விவசாயத் தொழிலில் ஏற்படுகின்ற மாறுதல்கள் மற்ற எல்லாத் தொழில்களையும் பாதிக்கின்றன. இம்மாறுதல்கள் யாவும் ஆண்டு தோறும் குறிப்பிட்டகாலங்களிலேயே ஏற்படுகின்றன. ஆகவே, இம்மாறுதல்களில் காலவட்டம் ஒரு ஆண்டு ஆகும். மேலும், கோடைக்காலங்களில் குளிர்பானங்கள், குளிர்சாதனங்கள் ஆகியவற்றின் விற்பனை அதிகரிப்பதும், குளிர் காலங்களில் இவற்றின் விற்பனை குறைவதும், மழைக் காலங்களில் குடைகளின் விற்பனை அதிகரிப்பதும், நாமறிந்ததே. இத்தகைய மாறுதல்களும் ஒரு ஆண்டு கால வட்டத்தையுடைய பருவகால மாறுபாடுகளேயாகும்.

மக்களின் பழக்க வழக்கங்களும், மதச் சடங்குகளும் பருவகால மாறுபாடுகளுக்கான இரண்டாவது காரணமாகின்றன. தீபாவளி, கிறிஸ்துமஸ், பொங்கல் ஆகிய பண்டிகை மாதங்களில் சில குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விற்பனைகள் உச்ச நிலையை அடைகின்றன இக்குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விற்பனைகளில் இப்பண்டிகை மாதங்களில் காணப்படுகின்ற மாறுதல்கள் யாவும் ஒரு ஆண்டு கால வட்டத்தையுடைய பருவகால மாறுபாடுகளாகும். ஒரு ஆண்டு கால வட்டத்தை விடக் குறைந்த கால வட்டத்தையுடைய பருவகால மாறுபாடுகளும் மக்களின் பழக்க வழக்கங்களினால் ஏற்படுகின்றன. சில்லறை வியாபாரங்கள் மாதத் தொடக்கங்களில் அதிகமாகவும் மாத இறுதிகளில் மிகக் குறைவாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய மாறுதல்கள் ஒரு மாத கால வட்டத்தையுடைய பருவகால மாறுபாடுகளாகும். மேலும் திரைப்பட அரங்குகளில் ஞாயிற்றுக்கிழமைகளில் வசூல் அதிகமாகயிருப்பதை அறிவோம். ஆகவே திரைப்பட அரங்குகளின் தினசரி வசூல்களில் ஞாயிற்றுக் கிழமை வசூல்களில் மட்டும் காணப்படுகின்ற மாறுதல் ஒரு வார காலவட்டத்தையுடைய பருவகால மாறுபாடாகும். ஆகவே, பருவகால மாறுபாடுகளின் காலவட்டம் ஒரு வருடமாகவோ, ஒரு மாதமாகவோ, ஒரு வாரமாகவோ, அல்லது இன்னும் குறைந்த காலத்தையுடையதாகவோயிருக்கலாம்,

(இ) *சுழல் மாறுபாடுகள் :* (Cyclical Variations)

ஒரு காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற மாறுபாடுகளுள் மூன்றாவது வகையைச் சார்ந்தவை சுழல் மாறுபாடுகளாகும். இம்மாறுபாடுகள் முந்திய இருவகை மாறுபாடுகளினின்றும் மாறுபட்டவையாகும். புதிதாகத் தொடங்கப்படுகின்ற ஒரு தொழில் முதலில் மெதுவாக வளரத் தொடங்குகிறது பின், தொழிலில் கையாளப்படுகின்ற புதுமுறைகளால் அத்தொழில் மேலும் அபிவிருத்தி அடைந்து சில காலங்களில் உச்ச வளர்ச்சியடைகிறது. பின்னர், தொழிலில் சிறிது மந்தம் ஏற்பட்டுப் பின்னிறக்கம் ஏற்படுகிறது. அதோடு, தொழிலில் ஏற்படுகின்ற போட்டிகளும் சேர்ந்து கொள்ளவே, தொழில் வீழ்ச்சி அடைய தொடங்குகிறது. தொழில் வீழ்ச்சியடைவதை உணர்ந்ததும், வீழ்ச்சியைத் தடுக்கத் தேவையான நடவடிக்கைகள் எடுக்கப்படுவதால் சிறிது காலத்திற்கு வளர்ச்சியுமின்றி, வீழ்ச்சியுமின்றி, தொழிலில் தேக்கம் ஏற்படுகிறது. பின் தொழிலில் புதுமைகள் கையாளப்பட்டு வளர்ச்சிக்கான நடவடிக்கைகள் மேற்கொள்ளப்படுவதால் தொழிலானது மீண்டும் அபிவிருத்தியை நோக்கி மீட்சியடைகிறது. இவ்வாறு ஒரு தொழிலானது அபிவிருத்தி (Prosperity) பின்னிறக்கம் (recession), வீழ்ச்சி (decline), மீட்சி (recovery) என்ற பல நிலைகளையடைந்து மீண்டும் முதல் நிலையை அடைகிறது. பொதுவாக எல்லாத் தொழில்களும் இந்நான்கு நிலைகளுக்குள் சுழன்று கொண்டிருக்கின்றன. ஒரு தொழிலானது இந்நான்கு நிலைகளையும் அடைந்து மீண்டும் தொடக்க நிலையை அடைவது ஒரு தொழிற் சுழல் (business cycle) என்று சொல்லப்படுகிறது. ஒரு சுழலின் அபிவிருத்தி நிலைக்கும் அதற்கு அடுத்த சுழலின் அபிவிருத்தி நிலைக்குமிடையேயுள்ள காலம் அல்லது ஒரு சுழலின் மந்த நிலைக்கும் அதற்கு அடுத்த சுழலின் மந்த நிலைக்குமிடையே காலம் அச்சுழலின் காலவட்டம் (period) எனப்படுகிறது. ஒரு தொழிலிலேற்படுகின்ற சுழல்கள் யாவும் சமகால வட்டத்தைக் கொண்டவையாகயிருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. ஒரு சுழலின் கால வட்டமும் தன்மையும் மற்றொரு சுழலின் காலவட்டம், தன்மை ஆகியவற்றினின்றும் மாறுபட்டிருக்கலாம். ஒரு தொழிற் சுழல் மூன்று ஆண்டு கால வட்டத்துடனும், அடுத்த சுழல் ஐந்து ஆண்டு கால வட்டத்துடனுமிருக்கலாம். ஒரு சுழலிலுள்ள அபிவிருத்தியின் உச்சநிலை மற்றொரு சுழலின் அபிவிருத்தி உச்ச நிலையைப் போல் இரு மடங்காகயிருக்கலாம். ஒரு சுழலின் அபிவிருத்தி நிலை மெதுவான வளர்ச்சியுடனும், மற்றொன்றின் அபிவிருத்தி நிலை வேகமான வளர்ச்சியுடனும் இருக்கலாம். ஒரு சுழல் மெதுவாக அபிவிருத்தி உச்சத்தை

யடைந்து வேகமாக மந்த நிலையடைவதாகவும், மற்றொன்றில் வேகமாக அபிவிருத்தி நிலையடைந்து மெதுவாக மந்த நிலையை யடைவதாகவுமிருக்கலாம். இத்தகைய சுழல்களால் காலம் சார் தொடர்களிலேற்படுகின்ற மாறுபாடுகள் மூன்றும் வகையைச் சார்ந்த சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical variations) ஆகும். பல பொருளாதாரக் காலம் சார் தொடர்களை ஆராய்ந்ததன் பலனாக மூன்று வகைத் தொழிற்சுழல்கள் கண்டு பிடிக்கப் பட்டுள்ளன.

(அ) 37 மாதக் குறுகிய காலவட்டத்தைக் கொண்ட கிச்சின் வட்டம் (Kitchin Cycle)

(ஆ) 10 ஆண்டுக் கால வட்டத்தைக் கொண்ட ஜக்ளர் வட்டம் (Juglar Cycle)

(இ) 50 ஆண்டு நீண்ட கால வட்டத்தைக் கொண்ட "கொண்ட்ராட்டிஃப் வட்டம்" (Kondratieff Cycle). பொருளாதாரக் காலம் சார் தொடர்களில் காணப்படுகின்ற சுழல்கள் இவ்வாறு சீரற்ற தன்மைகளுடனிருப்பதாலேயே பொருளாதார ஆய்வுக்குக் கணிதமுறைகளைப் பயன்படுத்த முடியாத நிலையிலிருந்து வருகிறது. இத்தகைய தொழிற் சுழல்களால் காலம் சார் தொடர்களிலேற்படுகின்ற மாறுபாடுகளே சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical Variations) ஆகும்.

(ஈ) ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் (Random fluctuations)

காலம் சார் தொடர்களில் காணப்படுகின்ற அசைவுகளுள் நான்காம் வகையைச் சார்ந்த ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் என்று சொல்லப்படுகின்ற அசைவுகளைச் சுழல் மாறுபாடுகளினின்றும் தனிமைப் படுத்திக் காண்பது எளிதன்று. இவ்வகை மாறுபாடுகளால் காலம்சார் தொடர்களில் எதிர்பாராத காலங்களில் எதிர்பாராத அளவு ஏற்றமோ அல்லது அளவு இறக்கமோ ஏற்படுகின்றது. இத்தகைய அசைவுகளைச் சரியாக வரையறுத்துக் கூற முடியாவிட்டாலும், மற்ற மூன்றுவகை அசைவுகளிலும் சேராத அசைவுகளை யெல்லாம் ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் என்று கூறலாம். மற்ற மூன்று அசைவுகளைப் போல் இவ்வகை அசைவுகள் நீடிக்கமாட்டாவென்பது மட்டுமல்ல, திரும்பவும் ஏற்படுமென்று எதிர்பார்க்கவும் முடியாது. எதிர்பாராமல் நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகளாகிய போர்கள், சமுதாய, அரசியல் புரட்சிகள், தொழிலாளர் வேலை நிறுத்தங்கள்,

போராட்டங்கள் மற்றும் வெள்ளப் பெருக்கு, வறட்சி, தொற்று நோய், கோரப் புயல்கள், பூமி அதிர்ச்சிகள் ஆகியவற்றின் காரணமாக பொருளாதாரக் காலம் சார் தொடர்களில் இத்தகைய ஒழுங்கற்ற அசைவுகள் ஏற்படுகின்றன. விஞ்ஞான, தொழில் நுணுக்கப் புதிய கண்டுபிடிப்புக்களும் சிலவகை காலம் சார் தொடர்களில் இத்தகைய ஒழுங்கற்ற அசைவுகளை ஏற்படுத்துகின்றன. விஞ்ஞான தொழில் நுணுக்கப் புதிய கண்டு பிடிப்புக்களும் சிலவகை காலம் சார் தொடர்களில் இத்தகைய ஏற்ற, இறக்கங்களை ஏற்படுத்துவதுண்டு. சிலவகை காலம் சார் தொடர்களில் மட்டுமே ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்களைச் சுழல் தனிமைப்படுத்தி ஆராய முடியும். ஆகவே, நடைமுறையில் ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் சுழல் மாறுபாடுகளினின்றும் மாறுபாடுகளினின்றும் பிரிக்கப்படாமல், இரண்டும் ஒன்றாகவே ஆராயப்படுகின்றன.

நீள்காலப்போக்கினை அளவிடுதல் (Measuring Secular trend)

தற்காலப் பொருளாதார நிலைகளை ஆராய்வதற்கும், தொழில்களின் வருங்கால நிலைமைகளை முன்கணிப்பதற்கும் பொருளாதார அல்லது தொழிலியல் காலம்சார் தொடர்களின் அடிப்படைப் போக்குகளின் தன்மைகளையும், திசைகளையும் மிகச் சரியாகத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியது மிகவும் அவசிய மாகும். பல்வேறு தொழில்களும், சமுதாயங்களும், நிறுவனங் களும் வெவ்வேறு வகையான சூழ்நிலைகளில் வெவ்வேறு வகை யான காரண காரியங்களால் செயல்பட்டு வருவதால் எல்லாத் துறைகளையும் சார்ந்த காலம் சார் தொடர்களின் போக்குகளும் ஒத்த தன்மைகளுடன் அமைந்திருக்குமென்று கூற முடியாது. பல்வேறு வகையான தொடர்களில் காணப்படுகின்ற போக்கு களின் மாறுபட்ட தன்மைகளுக்கேற்ப, காலம் சார் தொடர் களின் போக்குகளை நான்கு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். ஆண்டு தோறும் ஒரே சீராக, ஒரே அளவில் கூடிக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ செல்கின்ற போக்குகள் முதல் வகையாகும். இவற்றைக் கூட்டுத் தொடர்ப் போக்குகள் என்று கூறலாம். இத்தகைய போக்குகளைச் சாதாரண வரைப் படத் தாள்களில் நேர்கோடுகளின் மூலம் காட்டலாம். ஆண்டு தோறும் ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீத அளவு ஒழுங்காகக் கூடிக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ செல்லக்கூடிய போக்குகள் இரண்டாம் வகையாகும். இவற்றைப் பெருக்குத் தொடர் போக்கு என்று கூறலாம். இத்தகைய போக்குகளை ஒரு சார் மடக்கை தாள்களில் (Semi logarithmic graph sheets)

நேர்கோடுகளின் மூலம் காட்டலாம். மூன்ருவது வகையைச் சார்ந்த போக்குகள் பல தொழில்களில் காணப்படுகின்றன. ஒரு தொழில் தொடங்கப்பட்ட முதல் சில காலங்களில் குறைந்த வருவாயுடனும், பின் தீவிர முன்னேற்ற நடவடிக்கைகள் மேற் கொள்ளப் படுவதால் பெருவாரியான வருவாயுடனும் அதன் பின்னர் அத்தொழிலின் வளர்ச்சி உச்ச நிலையை அடைந்து விடுவதால் மீண்டும் குறைந்த வருவாயுடனும் செயல்பட்டு வருவது இயல்பு. இத்தகைய போக்கு சாதாரண வரைப்படத் தாளில் S என்ற ஆங்கில எழுத்தின் வடிவத்தைப் பெறுவதால், S வளைவு போக்கு (S curve trend) என்று கூறப்படுகிறது. நான்காவது வகைப்போக்குகள் ஒழுங்கற்ற தன்மைகளுடன் காணப்படுபவையாகும். வரைப்படத்தாளில் இத்தகைய போக்கு ஒரு ஒழுங்கற்ற வளைவாக அமைவதால் இது ஒழுங்கற்ற போக்கு எனப்படுகிறது. நீள் காலப்போக்குகளை அளவிடப் பல முறைகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. அவற்றுள் சில முறைகளை இங்கு ஆராய்வோம்.

(அ) *நகரும் சராசரி முறை* (Method of Moving Averages):

நீள் காலப் போக்கினை அளவிடும் முறைகளுள் நகரும் சராசரி முறையானது மிகவும் எளிதானதாகும். சில நிபந்தனை களுக்குட்பட்டு இம்முறை பயன்படுத்தப்படும்போது நீள்காலப் போக்கினை மிகச் சரியாக அளவிட முடிகிறது. கொடுக்கப்பட் டுள்ள காலம்சார் தொடர் கீழ்க்காணும் மூன்று நிபந்தனைகளுக் குட்பட்டிருந்தால் மட்டுமே இம்முறையைப் பயன்படுத்திக் காலம் சார் தொடரின் போக்கினைச் சரியாக அளவிட முடியும்.

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம் சார் தொடரின் போக்கு, ஒரு நேர்கோட்டுப் போக்காக (linear trend) அமைவதாக யிருக்கவேண்டும்.

(2) காலம் சார் தொடரினின்றும் நீக்கப்படவேண்டிய மாறுபாடுகள் செயல்பட்டிருக்கின்ற காலவரைகள் (duration) ஒழுங்கானவையாக யிருக்கவேண்டும்.

(3) காலம் சார் தொடரினின்றும் நீக்கப்படவேண்டிய மாறுபாடுகளின் அலைவு தூரங்கள் ஒழுங்கானவையாக யிருக்க வேண்டும்.

இம்மூன்று நிபந்தனைகளுக்கு முட்பட்ட ஒரு காலம் சார் தொடரிலிருந்து பருவகால, சுழல் மாறுபாடுகளையும், ஒழுங்

கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் நீக்கி, அத்தொடரின் போக்கினை அளவிட முடியும்.

காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற சுழல் மாறுபாடுகள், ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகள் ஆகியவற்றை நீக்குவதற்குத் தக்கவாறு ஒரு காலவட்டத்தை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற சுழல் மாறுபாடுகளின் ஒரு கால வட்டத்தையே நகரும் சராசரிக்கு ஏற்ற காலவட்டமாக எடுத்துக் கொள்வது நன்று. காலம் சார் தொடரின் முதல் மதிப்பிலிருந்து ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற எல்லா மதிப்புக்களில் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடப்பட்டு, அக்கால வட்டத்தின் நடு மதிப்புக்கு நேர் எழுதப் படவேண்டும். பின், இரண்டாவது மதிப்பிலிருந்து ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, அவற்றின் நடுமதிப்புக்கு எதிரே எழுத வேண்டும். இம்முறையைத் தொடர்ந்து இறுதி வரை செய்து வரவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற சராசரிகளுக்கு "நகரும் சராசரிகள்" (moving averages) என்று பெயர். உதாரணமாக, ஐந்தாண்டுக் காலவட்டத்துடன் நகரும் சராசரிகள் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதல் ஐந்து மதிப்புக்களின் சராசரியைக் கணக்கிட்டு நடுமதிப்பாகிய மூன்றும் ஆண்டின் மதிப்புக்கு எதிரே எழுத வேண்டும். பின்னர், இரண்டாம் மதிப்பு முதல் ஆறுவது மதிப்பு வரையுள்ள ஐந்து மதிப்புக்களின் சராசரியை நடுமதிப்பாகிய நான்காவது மதிப்புக்கு எதிரில் எழுதவேண்டும். இவ்வாறு இறுதிவரைத் தொடர்ந்து செய்து வர, தேவையான நகரும் சராசரிகள் கிடைக்கின்றன. ஐந்தாண்டு கால வட்ட நகரும் சராசரிகள் முதல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும் இதுபோல் இறுதி இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும் கிடையாதென்பதைக் கவனிக்கவும். இதுபோன்று, 7 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டால் முதல் மூன்று ஆண்டுகளுக்கும், இறுதி மூன்று ஆண்டுகளுக்கும் நகரும் சராசரிகள் கிடையாதென்பதை யறிந்து கொள்ளலாம். ஆகவே, நகரும் சராசரிகள் கணக்கிடப்படும்போது, முதல் நடு மதிப்புக்கு முன்னுள்ள ஆண்டுகளுக்கும், இறுதி நடு மதிப்புக்குப் பின்னுள்ள ஆண்டுகளுக்கும் சராசரிகள் கிடையாதென்பதைக் கவனத்திலிறுத்திக் கொள்ளவும். இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட நகரும் சராசரிகளே அக்காலம் சார் தொடரின் போக்கு மதிப்புக்கள் (trend values) ஆகும்.

நகரும் சராசரியின் காலவட்டம் இரட்டை யெண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக யிருந்தால், அக்கால வட்டத்திற்குள் அடங்கிய

மதிப்புக்களின் சராசரியை அவ்வட்டத்தின் இரண்டு நடு மதிப்புக்களுக்கும் நடுவே யிருக்குமாறு எழுத வேண்டும். இவ்வாறு எழுதப்பட்ட சராசரிகளை இரண்டு இரண்டாக எடுத்து மீண்டும் ஒரு நகரும் சராசரித் தொடர் அமைக்க வேண்டும். இத் தொடரிலுள்ள சராசரிகள் முதலில் காணப்பட்ட நகரும் சராசரிகளுக்கு இடையே அமையுமாறு எழுதப்படுவதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளுக்கு எதிரில் அமைகின்றன. இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாவது நகரும் சராசரிகள் அவற்றிற்குரிய ஆண்டுகளின் போக்கு மதிப்புக்களாகும். நகரும் சராசரியின் காலவட்டம் ஒற்றை யெண்ணிக்கைக் கால இடைவெளிகளில் இருந்தால் நகரும் சராசரிகள் கணக்கிடுவது எளிதாகும் என்பதை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட போக்கு மதிப்புக்களைக் கொண்டு வரைப் படத் தாளில் வரையப்படுகின்ற வளைவு திடீர் ஏற்ற இறக்கங்கள் (Sudden ups and downs) எதுவுமின்றி வழவழப்பாக யிருப்பதைக் காணலாம். இதன் காரணமாக, காலம் சார் தொடரின் போக்கு மதிப்புக்களைக் காணும் முறையானது காலம் சார் தொடரை வழவழப்பாக்கும் முறை (Method of Smoothing a time series) என்று அழைக்கப்படுகிறது. போக்கு மதிப்புக்களிலிருந்து அவற்றிற்குரிய மூல மதிப்புக்களின் விலக்கங்கள் (deviations) குறுகிய கால ஏற்ற இறக்கங்கள் (Short term fluctuations) அல்லது குறுகிய கால அலைவுகள் (Short term oscillations) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

நகரும் சராசரி முறையின் குறைபாடுகள் :

(1) ஒழுங்கற்ற அசைவுகளைக் கொண்ட ஒரு காலம் சார் தொடருக்கு இம்முறை பொருந்தாது.

(2) காலம் சார் தொடரின் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலுமுள்ள சில மதிப்புக்களுக்கு நகரும் சராசரிகள் காண முடியாதாகையால் நடப்புக் காலம் (Current Period) வரை போக்கு மதிப்புக்களைக் காண முடியாது.

(3) ஏறும் போக்குடைய ஒரு காலம் சார் தொடரில் கூடும் அளவு கூடிக்கொண்டிருந்தால் அத்தொடரின் போக்கு ஏறுமுக ஒரு சார்பு (upward bias) உடையதாகவும், கூடும் அளவு குறைந்து கொண்டே யிருந்தால் தொடரின் போக்கு இறங்குமுக ஒரு சார்புடையதாகவு மிருக்கும். இதுபோல், இறங்கும் போக்குடைய ஒரு காலம் சார் தொடரில் குறையும் அளவு குறைந்து கொண்டேயிருந்தால் அத்தொடரின் போக்கு ஏறு

முக ஒரு சார்புடையதாகவும், குறையும் அளவு கூடிக் கொண்டேயிருந்தால் அத்தொடரின் போக்கு இறங்குமுக ஒரு சார்புடையதாகவுமிருக்கும்.

(4) சிறிய காலம் சார் தொடர்களுக்கு இம்முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

மாதிரி 115 :

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் 1931 முதல் 1950 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவில் உற்பத்தியான கரியின் அளவுகள் (மில்லியன் டன்களில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஐந்தாண்டு கால வட்டத்துடன் நகரும் சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக, மேலும், குறுகிய கால அலைவுகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றை வரைப்பட மூலம் காட்டுக,

ஆண்டு ...	1931	32	33	34	35	36	37	38	39	
கரியின் அளவு ...	60	50	50	57	52	55	52	46	52	
ஆண்டு ...	1940	41	42	43	44	45	46	47	48	49 50
கரியின் அளவு ...	52	56	60	61	64	55	61	57	57	33 14

கணக்கீட்டு முறையில் கையாளப்படும் தற்கோள் :

சராசரிகள் முழு எண்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடப் படுகின்றன.

1 ஆண்டு	2 கரி அளவு (மில், டன்)	3 ஐந்தாண்டு நகரும் மொத்தம்	4 ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரி (3) ÷ (5)	5 குறுகிய கால அலைவுகள் (2) − (4)
1931	60	—	—	
1932	50	—	—	
1933	50	269	54	−4
1934	57	264	53	4

1935	52	266	53	—1
1936	55	262	52	3
1937	52	257	51	1
1938	46	257	51	—5
1939	52	258	52	0
1940	52	266	53	—1
1941	56	281	56	0
1942	60	293	59	1
1943	61	296	59	2
1944	64	301	60	4
1945	55	298	60	—5
1946	61	294	59	2
1947	57	273	55	2
1948	57	362	52	5
1949	43	—	—	
1950	44	—	—	

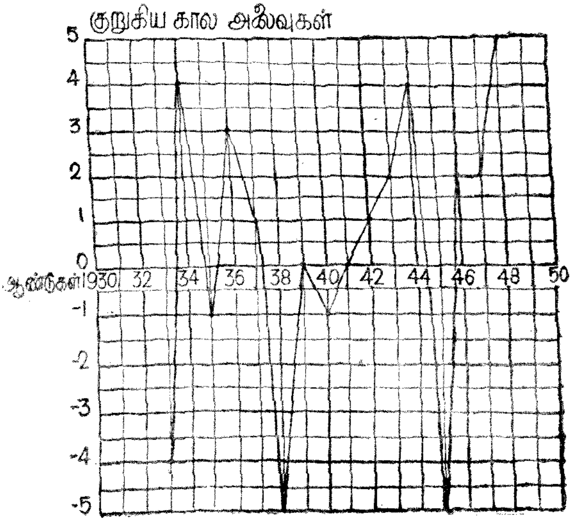
கணக்கீடுகளில் விளக்கம் :

1931 முதல் 1935 முடிய 5 ஆண்டுகளின் மதிப்புக்களின் மொத்தம் 60+50+50+57 = 269 ஆகும். இந்த ஐந்தாண்டு மொத்தம் நடு ஆண்டாகிய 1933க்கு எதிரே (3) ஆவது நிரலில் எழுதப்பட்டுள்ளது. பின், 1931 இன் மதிப்பாகிய 60ஐ நீக்கிவிட்டு 1936 இன் மதிப்பாகிய 55ஐச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் மொத்தமாகிய 50+50+57+52+55 = 264 நடு ஆண்டாகிய 1934க்கு எதிரே (3) ஆவது நிரலில் எழுதப்பட்டுள்ளது. இதே முறையைப் பின்பற்றி எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் ஐந்தாண்டு நகரும் மொத்தங்கள் கணக்கிடப்பட்டு (3) ஆவது நிரலில் எழுதப்பட்டுள்ளன. தொடக்கத்தில் 1931, 1932 ஆகிய இரு ஆண்டுகளுக்கும் நகரும் மொத்தம் இல்லாதது போல் இறுதியிலும் 1949, 1950 ஆகிய இரு ஆண்டுகளுக்கும் நகரும் மொத்தம் கிடையாது. இந்த நகரும் மொத்தங்களை 5 ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கப்பெறும் 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் (4) ஆவது நிரலில் எழுதப்பட்டுள்ளன. இச்சராசரிகள் தாம் அவற்றிற்குரிய ஆண்டுகளில் போக்கு மதிப்புகளாகும்.

இப்பொழுது, (2) ஆம் நிரலிலுள்ள மூல மதிப்புக்களிலிருந்து (4) ஆம் நிரலிலுள்ள போக்கு மதிப்புக்களைக் கழித்துக் கிடைக்கப்பெறும் குறுகிய கால அலைவுகள் (5) ஆவது நிரலில் எழுதப்பட்டுள்ளன. உதாரணமாக, 1933 ஆம் ஆண்டின் குறுகிய கால அலைவு 50 − 54 = − 4 ஆகும்.

குறுகிய கால அலைவுகளின் வரைப்படம் வரைதல் :

1931 முதல் 1950 வரையுள்ள 20 ஆண்டுகளையும் கிடையச்சின் (horizontal Axis) மேல் சம இடைவெளிகளிலும், குறுகிய கால அலைவுகளை இடது பக்க ஒரே நிலைக்குத்து அச்சில் (Vertical Axis) மேலும் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். குறுகிய கால அலைவுகள் நேர், எதிர் அடையாளங்களுடனிருப்பதால், அவற்றின் நேர் மதிப்புக்களையும் எதிர் மதிப்புக்களையும் நிலைக்குத்து அச்சின் மேல் குறித்துக் கொள்வதற்கு இசைந்தாற் போல், கிடையச்சை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இப்பொழுது, குறுகிய கால அலைவுகளுக்குரிய புள்ளிகளை வரைப்படத்தில் குறித்து, அவற்றை நேர் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெறும் வரை படம்தான் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குரிய குறுகிய கால அலைவுகளின் வரைபடமாகும்.



படம் 30.

அமெரிக்காவின் கரி உற்பத்தியின் குறுகிய கால அலைவுகளைக் காட்டும் வரைபடம்.

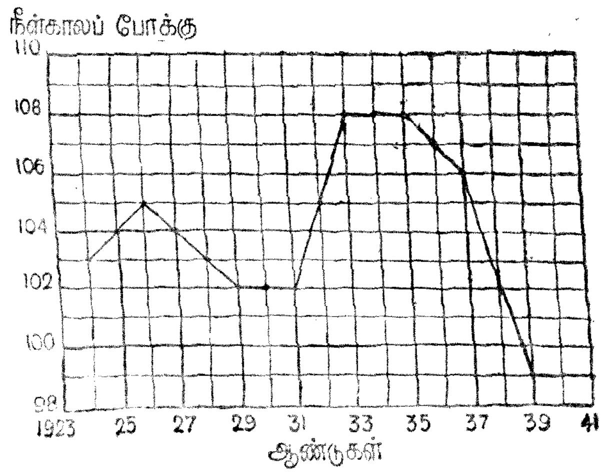
மாதிரி 116 :

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் 1921 முதல் 1944 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவின் இரும்பு உற்பத்தி அளவுகள் (மில்லியன் டன்களில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 6 ஆண்டு கால வட்டத்துடன் நகரும் சராசரிகள் கணக்கிட்டு, அவற்றை வரைபட மூலம் காட்டுக. குறுகிய கால அலைவுகளையும் கணக்கிடுக.

ஆண்டு ...	1921	22	23	24	25	26	27	28
இரும்பு ... (மில். டன்.)	90	100	105	103	114	102	100	106
ஆண்டு ...	1929	30	31	32	33	34	35	36
இரும்பு ... (மில். டன்.)	102	100	103	99	104	103	144	96
ஆண்டு ...	1937	38	39	40	41	42	43	44
இரும்பு ... (மில். டன்.)	103	96	98	96	103	99	100	101

ஆண்டு	இரும்பு உற்பத்தி அளவு (மில் டன்)	6-ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	12 ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	6-ஆண்டு நகரும் சராசரி	குறுகிய கால அலைவு
1	2	3	4	5	6
1921	90	—	—	—	—
1922	100	—	—	—	—
1923	105	—	—	—	—
1924	103	614	1238	103	0
1925	114	624	1254	104	10
1926	102	630	1257	105	−3
1927	100	627	1251	104	—4
1928	106	624	1237	103	3
1929	102	613	1223	102	0
1930	100	610	1224	102	—2
1931	103	614	1225	102	1

1932	99	611	1264	105	—6
1933	104	653	1302	108	—4
1934	103	649	1298	108	—5
1935	144	619	1295	108	36
1936	96	646	1286	107	—11
1937	103	640	1273	106	—3
1938	96	633	1225	102	—6
1939	98	592	1187	99	—1
1940	96	595	1187	99	—3
1941	103	592	1187	99	4
1942	99	597	1189	9	—
1943	100	—	—	—	—
1944	101	—	—	—	—



படம் 31.
அமெரிக்க இரும்பு உற்பத்திக் காலம் சார் தொடரில் நீள்காலப் போக்கைக் குறிக்கும் வரைபடம்.

(ஆ) *அரைச்சராசரி முறை* (Method af Semi-averages):

காலம் சார் தொடர்களின் போக்குகளை மதிப்பிடும் முறைகளுள் மற்றொரு எளிய முறை அரைச் சராசரி முறையாகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் போக்கு நேர் கோட்டுப் போக்காக இருக்குமானால் மட்டுமே இம்முறையைப் பயன்படுத்த முடியும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களை சம எண்ணிக்கை மதிப்புக்களுடன் கூடிய இரு அரைப் பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்கள் ஒற்றை யெண்ணிக்கையிலிருந்தால் நடு மதிப்பை நீக்கி விட்டு நடு மதிப்புக்கு மேலுள்ள மதிப்புக்களை ஒரு பகுதியாகவும், நடு மதிப்புக்குக் கீழுள்ள மதிப்புக்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்விரு அரைப் பகுதிகளின் சராசரி மதிப்புக்களை தனித்தனியே கணக்கிட்டு, அச்சராசரி மதிப்புக்களை அப்பகுதிகளின் காலங்களின் மத்தியில் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். உதாரணமாக, 1931 முதல் 1950 வரையுள்ள 20 ஆண்டுகளின் மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு காலத் தொடரை 1931 முதல் 1940 வரையுள்ள 10 ஆண்டுகளின் மதிப்புக்களை முதல் அரைப்பகுதியாகவும், 1941 முதல் 1950 வரையுள்ள 10 ஆண்டுகளில் மதிப்புக்களை இரண்டாம் அரைப் பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். முதல் பகுதியிலுள்ள 10 மதிப்புக்களையும் கூட்டி 10 ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கப்பெறும் சராசரியை முதல் 10 ஆண்டுக் காலத்தில் நடுக்காலமாகிய 1935, 5ம் ஆண்டுக்கு நேராக எழுத வேண்டும்; அதாவது 1935-ஆம் ஆண்டு சூலை மாதம் முதல் தேதிக்குரியதாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இதுபோல் 1941 முதல் 1950 வரையுள்ள மதிப்புக்களின் சராசரியை 1945 ஆம் ஆண்டு சூலைமாதம் முதல் தேதிக்குரியதாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இப்பொழுது ஒரு வரைபடத் தாளில் கிடையச்சில் 1931 முதல் 1950 வரையுள்ள 20 ஆண்டுகளையும், இடது பக்க ஓரத்தில் நிலைக்குத்து அச்சில் மதிப்புக்களையும் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். 1935, ஜூலை 1-ம் தேதிக்கு எதிரே முதல் சராசரிக்குரிய புள்ளியையும், 1945 சூலை 1-ம் தேதிக்கு எதிரே இரண்டாம் சராசரிக்குரிய புள்ளியையும் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைக்கின்ற நேர்கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம் சார் தொடரின் நீள் காலப் போக்கினைக் குறிக்கின்ற நேர்கோடாகும்.

மாதிரி 117 :

கீழ்க்காணும் காலம் சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்கினை அரைச் சராசரி முறையில் காண்க.

ஆண்டு	...	1931	32	33	34	35	36	37	38
உற்பத்தி (மில், டன்)	...	60	50	50	57	52	55	52	46
ஆண்டு	...	1939	40	41	42	43	44	45	46
உற்பத்தி (மில், டன்)	...	52	52	56	60	61	64	55	61
ஆண்டு	...	1947	48	49	50				
உற்பத்தி (மில், டன்)	...	57	57	43	44				

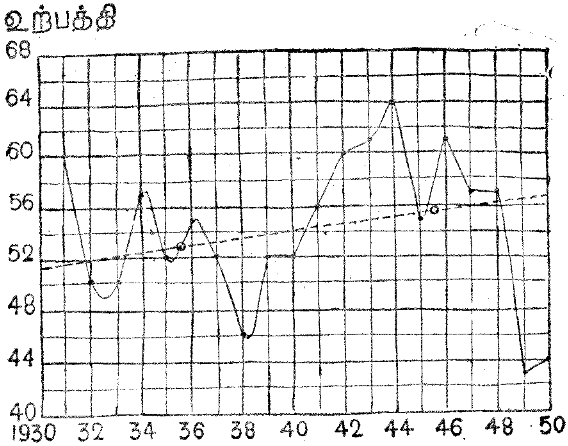
முதல் அரைப் பகுதி		இரண்டாம் அரைப் பகுதி	
ஆண்டு	உற்பத்தி	ஆண்டு	உற்பத்தி
1931	60	1941	56
1932	50	1942	60
1933	50	1943	61
1934	57	1944	64
1935	52	1945	55
1936	55	1946	61
1937	52	1947	57
1938	46	1948	57
1939	52	1949	43
1940	55	1950	44
மொத்தம்	526	மொத்தம்	528

முதல் பகுதியின் நடு ஆண்டு 1935.5 = 1935 ஜூலை 1

இரண்டாம் பகுதியின் நடு ஆண்டு 1945.5 = 1945 ஜூலை 1

முதல் பகுதியின் சராசரி 526/10 = 52.6

இரண்டாம் பகுதியின் சராசரி 558/10 = 55.8



படம் 32.

1931 முதல் 1950 வரை உண்மை உற்பத்தியும் அரைச்சராசரி முறையில் கணக்கிடப்பட்ட போக்குகளும்.

அரைச்சராசரி முறையின் குறைபாடுகள்

(1) அரைச்சராசரி முறையின் மூலம் ஒரு காலம்சார் தொடரின் போக்குகளைத் தோராயமாகவே பெற முடியும்.

(2) காலம்சார் தொடரின் நீள்காலப்போக்கு நேர் கோட்டுப் போக்காக இருந்தால் மட்டுமே அரைச்சராசரி முறையைப் பயன்படுத்த முடியும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம்சார் தொடரின் போக்கு நேர்கோட்டுப் போக்காகயிருக்கிறதென்ற தற்கோளின் அடிப்படையிலேயே இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(3) இம் முறையினைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப்பெற்ற நீள்காலப் போக்குகள் சுழல் மாறுபாடுகள் நீக்கப்பட்டவை என்று உறுதியாகக் கூற முடியாது.

(இ) *மீச்சிறு இருபடி முறை* (Least Squares Method)

ஒரு காலம் சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்கினை மீச்சிறு படிக் கொள்கை (Principle of Least Squares) யின் அடிப்படையில் கணித முறையில் நிர்ணயிக்க முடியும். கொடுக்கப்பட்ட காலம் சார் தொடர் மதிப்புக்களின் சிதறல் விளக்கப்படத்தை

(Scatter diagram) ஒரு வரை படத்தாளில் வரைந்து கொள்ள வேண்டும். சிதறல் படத்திலுள்ள புள்ளிகளுக்கேற்ற உத்தமப் பொருத்தமான நேர்கோட்டை (Line of best fit) மீச்சிறுபடி முறையில் வரைய வேண்டும். உத்தமப் பொருத்தமான நேர் கோடு என்பது, அந் நேர்கோட்டிலிருந்து சிதறல் விளக்கப் படத்திலுள்ள புள்ளிகளின் நிலைக்குத்து விலக்கங்களின் (vertical deviations) வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை மீச்சிறிதாக (minimum) யிருக்குமாறு வரையப்படும் நேர்கோடாகும். ஆகவே, காலம்சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்குக் கோடானது காலம் என்ற மாறியைச் சார்ந்த காலம்சார் தொடர் மதிப்புக்களின் தொடர்புக் கோடு (regression line of the values of time series on time) என்பது தெற்றென விளங்கும். நடைமுறையில் மாதாந்தர மதிப்புக்களை விட வருடாந்தர மதிப்புக்களுக்குரிய போக்குக் கோட்டினை நிர்ணயிக்கவே மீச்சிறுபடி முறை பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப் படுகிறது. ஏனெனில் வருடாந்திர மதிப்புக்களுக்கு முறையைப் பயன் படுத்திப் போக்குக் கோடு அமைக்கும் போது, காலம் சார் தொடரிலுள்ள பருவ கால மாறுபாடுகள் யாவும் நீக்கப்பட்டு விடுகின்றன.

N ஆண்டுகளின் மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு காலம் சார் தொடரைக் கருதுக. இத் தொடரின் மதிப்புக்களைக் y என்ற மாறியால் குறிப்பிடுக. இந்த N ஆண்டுகளிலிருந்தும், அவற் றின் சரியான நடு ஆண்டைக் கழித்துக் கிடைப்பவற்றை ஆண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளியால் வகுத்துக் கிடைக்கும் விலக்கங்களை x எனக் குறிப்பிடுக. ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டுக்குரிய x இன் மதிப்பு =

$$\left\{\frac{\text{குறிப்பிட்ட ஆண்டு} - \text{நடு ஆண்டு}}{\text{இடை வெளி}}\right\}$$

ஆகும். ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை N ஒற்றையெண்ணாக யிருந்தால், நடு ஆண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுக்குரிய x இன் மதிப்பு 0 ஆகும். நடு ஆண்டுக்கு மேலேயுள்ள ஆண்டுகளில் x மதிப்புக்கள் வரிசையாக $-1, -2, -3$……… ஆகும். கீழேயுள்ள ஆண்டுகளின் x மதிப்புக்கள் வரிசையாக 1, 2, 3 ….. ஆகும்; கீழேயுள்ள ஆண்டுகளின் x மதிப்புக்கள் வரிசையாக 1, 2, 3 …… ஆகும். ஆனால் N என்பது இரட்டை யெண்ணாக யிருந்தால் இரண்டு நடு ஆண்டுகளிருக்கும். இவற்றின் நடுமதிப்பையே சரியான நடு ஆண்டாகக் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, இச்சரியான நடுமதிப்பிற்கு மேலேயுள்ள

ஆண்டுகளின் x மதிப்புக்கள் வரிசையாக —.5, —1.5, —2.5, —3.5, ... ஆகும்; கீழேயுள்ள ஆண்டுகளின் x மதிப்புக்கள் வரிசையாக .5, 1.5, 2.5, 3.5.... ஆகும். இல்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற x, y ஆகிய மதிப்புக்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

இப்பொழுது $A = \frac{\Sigma y}{N}$, $B = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ என்ற மாறிலிகளைக் கணக்கிட்டுக் காலம்சார் தொடரின் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டை $Y = A + Bx$ என்ற சூத்திரத்திலிருந்து பெறலாம். இதில் A என்பது நடு ஆண்டுக்குரிய மதிப்பாகும். இது "மைய நிலைத்தூரம்" (Central ordinate) என்று அழைக்கப்படுகிறது. B என்பது போக்கு மதிப்புக்களின் "கூடும் தொகை வீதத்தைக்" (increment rate) காட்டுகிறது. இது நீள்காலப் போக்கில் "வளர்ச்சி வீதம்" (rate of growth) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டுகளுக்குரிய x இன் மதிப்புக்களை இச்சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு அவ்வாண்டுகளில் போக்கு மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இம்முறையினைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம்சார் தொடரின் நீள் காலப்போக்கு அடுத்து வரும் சில ஆண்டுகளிலும் நீடிக்குமென்ற தற்கோளின் அடிப்படையில் அடுத்துள்ள ஆண்டுகளின் போக்கு மதிப்புக்களை மதிப்பிட முடியும்.

மாதிரி 118:

பின்வரும் பட்டியலில் இந்தியாவில் கூட்டுறவுச் சங்கங்களுக்காகச் சில ஆண்டுகளில் ஒதுக்கப்பட்ட தொகைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மீச்சிறுபடி முறையைப் பயன்படுத்தி, கூட்டுறவுச் சங்கங்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட தொகைகளின் வளர்ச்சியைக் காட்டுகின்ற போக்குக் கோட்டினை அமைத்து, அதன் மூலம் அவ்வாண்டுக்குரிய போக்கு மதிப்புக்களைக் காண்க.

ஆண்டு	ஒதுக்கீடு (லட்சம் ரூபாயில்)
1927 — 28	612
1928 — 29	719
1929 — 30	820
1930 — 31	907
1931 — 32	1001
1932 — 33	1106
1933 — 34	1231

அமைக்கப்படும் போக்குக் கோடு அடுத்து வரும் சில ஆண்டுகளுக்கும் பொருந்தும் எனக் கருதி 1934-35, 1940-41 ஆகிய ஆண்டுகளின் ஒதுக்கீடுகளை மதிப்பிடுக.

போக்குக் கோடு அமைப்பதற்கான கணக்கீட்டு பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	ஒதுக்கீடு Y	நடு ஆண்டிலிருந்து விலக்கங்கள் X	X^2	XY
1927—28	612	—3	9	—1836
1928—29	719	—2	4	—1438
1929—30	820	—1	1	— 820
1930—31	907	0	0	0
1931—32	1001	1	1	1001
1932—33	1106	2	4	2212
1933—34	1231	3	9	3693
7	6396		28	2812

நடு ஆண்டு 1930-31 இன் போக்கு $= A = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{6396}{7}$

$= 913.7$

வளர்ச்சி வீதம் $= B = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{2812}{28} = 100.4$

$\therefore$ போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு $Y = A + BX$

அதாவது, $Y = 913.7 + 100.4\,X$

மற்ற ஆண்டுகளின் போக்குகள் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகின்றன.

ஆண்டு	X	போக்கைக் கணக்கிடல்	போக்கு
1927—28	—3	913.7+100.4 (—3)	612.5
1928—29	—2	913.7+100.4 (—2)	712.9
1929—30	—1	913.7+100.4 (—1)	813.3
1930—31	0	913.7+100.4 (0)	913.7
1931—32	1	913.7+100.4 (1)	1014.1
1932—33	2	913.7+100.4 (2)	1114.5
1933—34	3	913.7+100.4 (3)	1214.9
1934—35	4	913.7+100.4 (4)	1315.3
1940—41	10	913.7+100.4 (10)	1917.7

மாதிரி 119:

மீச்சிறுபடிக் கொள்கையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் காலம் சார் தொடரின் போக்கை நிர்ணயிக்கவும்.

ஆண்டு	கோவேறு கழுதைகள் (மில்லியன்கள்)
1935	6.0
1936	5.9
1937	5.7
1938	5.5
1939	5.3
1940	5.2
1941	5.1
1942	5.0

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

ஆண்டு	கோவேறு கழுதைகள் (மில்லியன்) Y	நடு ஆண்டு 1938.5 இலிருந்து விலக்கங்கள் X	XY	X^2
1935	6.0	—3.5	—21.00	12.25
1936	5.9	—2.5	—14.75	6.24
1937	5.7	—1.5	— 8.55	2,25
1938	5.5	— .5	— 2.75	0.25
1939	5.3	.5	2.65	0.25
1940	5.2	1.5	7.80	2.25
1941	5.1	2.5	12.75	6.25
1942	5.0	3.5	17.50	12.25
8	43.7		—6.85	42.00

நடு ஆண்டு 1938.5 இன் போக்கு $A = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{43.7}{8} = 5.46$

வளர்ச்சி வீதம் $B = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{-6.85}{42} = -0.15$

ஆகவே, போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$Y = A + Bx$$

அதாவது, $Y = 5.46 - 0.15x$.

(ஈ) மடக்கை நேர்கோட்டு முறை (Logarithmic Straight line method) :

தொழிலியலில் பெரும்பாலான விவரங்கள் ஆண்டு தோறும் குறிப்பிட்ட அளவில் மாறுவதற்குப் பதிலாக, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் மாறிக் கொண்டிருப்பதைக் காணலாம், இத்தகைய சதவீத மாறுபாட்டின் போக்கை ஒரு சாதாரண வரை படத்தாளில் பெருக்குத் தொடர் வளைவினால் (Curve of geometric progression) காட்டலாம். இவ்வளைவு "கூட்டு வட்டி வளைவு" (Compound Interest Curve) என்றும் அழைக்கப்படு

கிறது. வெவ்வேறு சதவீத மாறுபாடுகளுக்கேற்ப வளைவின் தன்மைகளும் மாறுபட்டிருக்கும். இத்தகைய காலம் சார் தொடரின் போக்குக்குக் "கூட்டு வட்டிப் போக்கு" (Compound Interest trend) என்று பெயர். ஆனால் இத்தகைய கூட்டு வட்டி வளைவுகளை ஒரு சார் மடக்கைத் தாள்களில் வரைந்தால் அவை நேர்கோடுகளாக அமைவதைக் காணலாம். இத்தன்மையின் காரணமாகக் கூட்டு வட்டி வளைவுகள் "மடக்கை நேர் கோடுகள்" (logarithmic straight lines) என்றும் அழைக்கப்படு கின்றன.

ஒரு சார் மடக்கைப்படம் (Semi logarithmic Chart) :

சதவீத மாறுதல்களைக் கொண்ட ஒரு காலம் சார் தொடர் மதிப்புக்களின் போக்கினை அளவிட ஒரு சார் மடக்கைத் தாள்கள் பயன்படுகின்றன. இதில் கிடையச்சின் மேலுள்ள அளவுகள் கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். நிலைக்குத்து அச்சின் மேல் மடக்கை அளவுகளில் அந்த மடக்கை யளவுகளுக்குரிய எண்கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் கிடையச்சில் ஆண்டுகள், அல்லது மாதங்கள் போன்ற கால அளவுகள் சம இடைவெளிகளில் குறிக்கப்படுகின்றன. காலம் சார் தொடரின் மதிப்புக்கள் நிலைக்குத்து அச்சில் குறிக்கப்படுகின்றன. காலம் சார் தொடரின் மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து இணைத்தால், சதவீத மாறுதலையுடைய காலம் சார் தொடரின் போக்கு ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு கிடைக்கப்படுகின்ற படத்தில் நிலைக்குத்து அச்சு மட்டும் மடக்கை யளவுகளுடனிருப்பதால் இப்படத்திற்கு ஒரு சார் மடக்கைப்படம் (Semi Logarithmic Chart) என்று பெயர். இப்படத்தில் சம நிலைக்குத்து உரங்கள் (Vertical distances) சம விகிதங்களைக் குறிப்பிடுவதால் கி. பி. 1917ஆம் ஆண்டில் இர்விங்ஃபிஷர் (Irving Fisher) என்பவர் இப்படத்தை விகித விளக்கப்படம் (Ratio Chart) என்று குறிப்பிட்டுள்ளார்.

10, 100, 1000...ஆகிய எண்களின் மடக்கை மதிப்புக்கள் முறையே 1, 2, 3...என்று அறிவோம். 100, 10 ஆகிய எண் களின் மடக்கை மதிப்புக்களின் வித்தியாசம் $2-1=1$ ஆகும். இது போல், 1000, 100 ஆகிய எண்களின் மடக்கை மதிப்புக் களின் வித்தியாசமும் $3-2=1$ ஆகும். ஆகவே, 10, 100, 1000...ஆகிய மதிப்புக்கள் நிலைக்குத்து அச்சில் சம தூரங்களில் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். ஆகவே 100% அதிகரிப்பு 1" தூரத் தால் குறிப்பிடப்பட்டால், 50% அதிகரிப்பு 0·5" தூரத்தாலும், 20% அதிகரிப்பு 0·2" தூரத்தாலும், 10% அதிகரிப்பு 0·1"

தூரத்தாலும் குறிப்பிடப்படும் என்று அறிந்து கொள்க. 0இன் மடக்கை மதிப்பு ∞ (கந்தழி) ஆகையால் மடக்கையளவு கோலில் 0—புள்ளியானது கிடையச்சுக்குக் கீழே கந்தழித் தூரத்தில் (infinite distance) இருக்கும். ஆகவே, ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் நிலைக்குத்து அளவு கோலில் 0—இலிருந்து தொடங்க முடியாது. 10இன் முழு எண்படி மதிப்புக்களின் மடக்கை மதிப்புக்கள் முழு எண்களாகயிருக்குமாகையால், நிலைக்குத்து அளவு கோலை 1, 10, 100 போன்ற 10இன் முழு எண்படிகளில் தொடங்கலாம்.

மடக்கைத் தாள்கள் தயாரித்தல் :

1 முதல் 100 வரையுள்ள மதிப்புக்களைக் குறிக்கின்ற நிலைக்குத்து அளவுகோலையுடைய ஒரு சார் மடக்கைத் தாள் ஒன்று தயாரிக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் 1, 2, 3...10, 30...100 ஆகிய எண்களின் மடக்கை மதிப்புக்களைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எண்	மடக்கை மதிப்பு
1	0
2	0·30
3	0·48
4	0·60
5	0·70
6	0·78
7	0·85
8	0·90
9	0·95
10	1·00
20	1·30
30	1·48
40	1·60
50	1·70
60	1·78
70	1·85
80	1·90
90	1·95
144	2·00

நிலைக்குத்து அச்சில் 1 அலகு மடக்கை மதிப்பு 1 அங்குல தூரம் என்ற அளவில் மடக்கை மதிப்புகளுக்குரிய தூரங்களில் குறிகளுக்கு அக் குறிகளுக்கு அருகே அம்மடக்கை மதிப்புகளுக்குரிய எண்களைக் குறித்துக் கொள்க. உதாரணமாக, தொடக்கப்புள்ளியில் 1 என்றும், கிடையச்சுக்கு மேலே 0·30 அங்குல தூரத்தில் 2 என்றும், 0 48'' தூரத்தில் 3 என்றும், 0·60'' தூரத்தில் 4 என்றும்......... இறுதியில் 2·00'' தூரத்தில் 100 என்றும் குறிக்க வேண்டும். இக்குறிகளின் வழியே கிடைக்கோடுகள் வரையவும் கிடையச்சில் சம அலகு இடை வெளிகளில் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றின் வழியே நிலைக்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற வரைபடத்தாள் தான் ஒரு சார் மடக்கைத் தாள் (Semi-logarithmic graph sheet) எனப்படுகிறது. நிலைக்குத்து அச்சில் மட்டுமல்லாது, கிடையச்சிலும் மடக்கை அளவுகளால் குறியிடப்பட்டால், அத்தகைய மடக்கைத் தாளுக்கு இரு சார் மடக்கைத்தாள் (Double logarithmic Paper) அல்லது மடக்கை-மடக்கைத்தாள் (Log-Log paper) என்று பெயர்.

ஒரு சார் மடக்கைப் படத்தின் பண்பியல்புகள் :

(1) ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் கூடிக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ செல்லக்கூடிய ஒரு தொடரின் வரைபடம் ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் நேர்கோடாக அமையும்.

(2) சமவிகித மாறுபாடுகள் சமமான சரிவுகளுடன் (Equal slopes) கூடிய நேர்கோடுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. ஆகவே, சமமான சதவீதத்தில் அதிகரிக்கின்ற அல்லது குறைகின்ற இரண்டு தொடர்கள் ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் இரண்டு இணைகோடுகளாக அமைகின்றன.

(3) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்களின் வளர்ச்சி வீதங்களை அத்தொடர்களுக்குரிய நேர்கோடுகளின் சரிவுகளை ஒப்பிட்டு அறியலாம். ஒரு தொடரின் வளர்ச்சி வீதம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க தொடருக்குரிய நேர்கோட்டின் சரிவும் அதிகமாக யிருக்கும்.

(4) ஒரு சார் மடக்கைப் படத்திலிருந்து சதவீத மாறுபாடுகளை நேரடியாக எளிதில் கண்டு கொள்ளலாம்.

(5) சாதாரண வரை படத்தாளில் குறிப்பிட முடியாத அளவிலான மிகப் பெரிய மதிப்புக்களையும் ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் மிகக் குறைந்த இடத்திற்குள் குறிப்பிட முடியும்.

ஒரு சார் மடக்கைப் படங்களின் பயன்கள் :

மிக அதிக வித்தியாசத்திலுள்ள மிகப் பெரிய மதிப்புக்களைக் கொண்ட இரு தொடர்கள் ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் வரையப்பட்டு ஒப்பிடப்படுகின்றன. பொருளாதாரத் துறையிலும், தொழில் துறையிலும் மற்றும் எல்லா அறிவியல் துறைகளிலும் விகித மாறுபாடுகளை அளவிடவும், பல தொடர்களின் விகித மாறுபாடுகளை ஒப்பிடவும் ஒரு சார் மடக்கைப் படங்கள் பயன் படுகின்றன. பௌதிக, இரசாயன ஆராய்ச்சியாளர்களும், பொறியியல் வல்லுநர்களும் தங்கள் துறைகளில் ஒரு சார் மடக்கைப் படங்களைப் பெரிதும் பயன்படுத்தி வருகின்றனர்.

கூட்டு வட்டி வளைவு (Compound interest curve) :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம் சார் தொடர் மதிப்புக்களின் மடக்கை மதிப்புக்களுக்கு மீச்சிறுபடி முறையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் கூட்டு வட்டி வளைவு அமைக்கப்படுகிறது. மடக்கை மதிப்புக்களுக்கு மீச்சிறுபடி முறையின் மூலம் காணப்படுகின்ற போக்கு மதிப்புக்கள் மடக்கை மதிப்புக்களாகவே இருக்கும். இம் மடக்கை மதிப்புக்களின் எதிர் மடக்கை மதிப்புக்கள் காலம் சார் தொடரின் போக்கு மதிப்புக்களாகும். இத்தகைய போக்குகளுக்குக் "கூட்டு வட்டிப் போக்கு" (Compound Interest trend) என்று பெயர்.

மாதிரி 120 :

கீழ்க்காணும் காலம் சார் தொடரின் போக்குகளை மடக்கை நேர்கோட்டு முறைப்படிக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	...	1946	1947	1948	1949	1950
விற்பனை	...	62	180	115	190	455
(ஆயிரம் ரூபாயில்)						

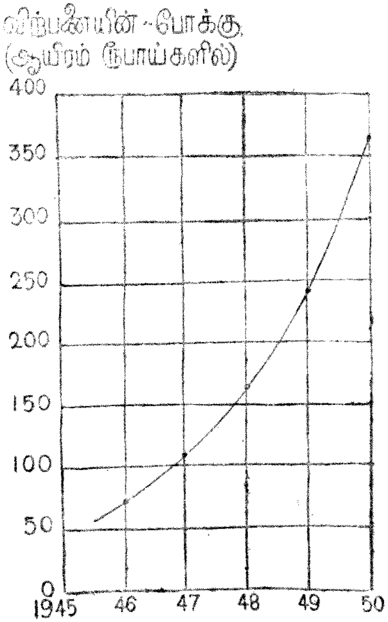
ஆண்டு	விற்பனை y	$log\ y$	நடு ஆண்டிலிருந்து விலக்கம் x	x^2	$x\ (log\ y)$	போக்குகளின் மடக்கைகள்	போக்குகள் (ஆயிரம் ரூபாயில்)
1946	62	1.7924	−2	4	−3.5848	1.8581	72
1947	180	2.2553	−1	1	−2.2553	2.0335	108
1948	115	2.0607	0	0	0	2.2090	162
1949	190	2.2787	1	1	2.2787	2.3845	242
1950	455	2.6580	2	2	5.3160	2.5600	363
N = 5		11.0451		10	1·7546		

$$A = \frac{\Sigma \log y}{N} = \frac{11.0451}{5} = 2.2090$$

$$B = \frac{\Sigma x (\log y)}{\Sigma x^2} = \frac{1.7546}{10} = 0.17546$$

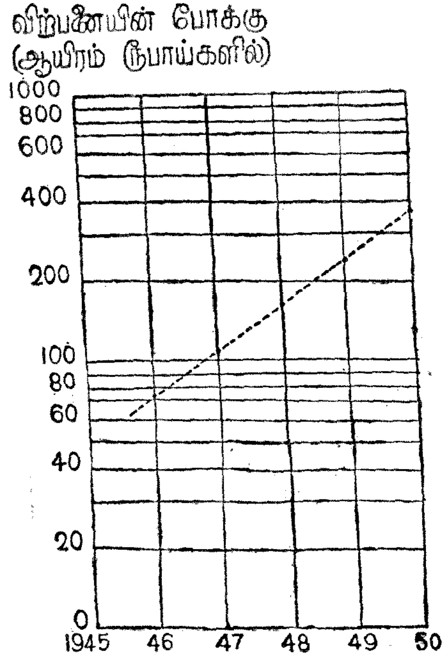
போக்குகளின் மடக்கை நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு :

$$\log y = A + Bx = 2.2090 + 0.17546\, x$$



படம் 33.

சாதாரண வரைபடத்தாளில் கூட்டு வட்டிப் போக்கின் தன்மை



படம் 34.

ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் கூட்டு வட்டிப் போக்கு

நீள்காலப் போக்கினை நிர்ணயிக்கும்போது கவனிக்கவேண்டிய விதிகள்.

ஒரு காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற மாறுபாடுகளைத் தனித்தனியே அளவிட்டறிய வேண்டுமாயின் நீள்காலப் போக்கைச் சுழல் மாறுபடுகளினின்றும் தனித்துப் பிரித்து அளவிடவேண்டியது அவசியமாகும். கீழ்க்காணும் இரு விதிகளின் அடிப்படையில் நீள் காலப் போக்கையும் சுழல் மாறுபாடுகளையும் தனித்தனியே பிரிக்க முடியும்.

(1) ஆய்வுக்குரிய விவரங்கள் நீண்ட காலத்தைச் சார்ந்ததாக இருக்கவேண்டும். குறுகிய கால விவரங்களைக் கொண்டு போக்கைச் சரியாக அளவிட முடியாது. மேலும் காலம்

குறுகியதாகயிருப்பதால் சுழல் மாறுபாடுகள் நீள்காலப் போக்கை மறைத்துவிடும்.

(2) காலம் சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற சுழல் மாறுபாடுகள் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலும் ஒரே மாதிரியான நிலையுடன் (phase) இருக்குமாறு கவனித்துக் கொள்ளவேண்டும். நடப்புக் காலத்தில் காலம் சார் தொடரின் இறுதிச்சுழல் உச்சத்தில் (peak) இருந்தால் முதற் சுழலும் உச்சத்தில் தொடங்குமாறு தொடரின் காலத்தை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

காலம் சார் தொடரிலிருந்து நீள்காலப் போக்கினை நீக்குதல் (Elimination of Secular trend from Time Series)

காலம் சார் தொடர்களில் காணப்படுகின்ற நான்கு வகை மாறுபாடுகளையும் தனித்தனியே பாகுபாடு செய்து ஒவ்வொரு வகை மாறுபாடுகளினாலும் காலம் சார் தொடர்களிலேற்படுகின்ற விளைவுகளை ஆராய்வதே காலம் சார் தொடர் பகுப்பாய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும். ஆகவே காலம் சார் தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் மாறுபாடுகள் ஆகியவற்றைத் தனித்தனியே ஆராய வேண்டுமாயின் தொடரினின்றும் நீள் காலப் போக்கின் விளைவுகளை நீக்குதல் அவசியமாகும்.

ஒரு காலம் சார் தொடரிலுள்ள ஒவ்வொரு உண்மையான மதிப்பையும் அம்மதிப்பிற்குரிய போக்கு மதிப்பால் வகுத்துக் கிடைப்பதை 100 ஆல் பெருக்கிச் சதவீதமாகக் குறிப்பிடுவதன் மூலம் அந்தொடரிலிருந்து நீள்காலப் போக்கின் விளைவுகளை நீக்கிவிட முடியும். இவ்வாறு நீள் காலப் போக்கு நீக்கப்பட்ட ஒரு காலம் சார் தொடரில் பருவகால, சுழல் மாறுபாடுகள், ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகள் ஆகியவை எவ்வித மாறுதலுமடையாமலிருக்கும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பருவகால மாறுபாடுகள் (Seasonal Variations)

ஒரு காலம் சார் தொடரில் நீள்காலப் போக்கிற்கு அடுத்தபடியாக அளவிடப்படவேண்டிய கூறு (Component) பருவகால மாறுபாடுகளாகும். காலம் சார் தொடர்களில் காணப்படுகின்ற பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடும் முறைகளையும், அவற்றை நீக்கும் முறைகளையும் இங்கு ஆராய்வோம்.

முதலில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம் சார் தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகளிருக்கின்றனவா யென்பதை நிர்ணயிக்க

வேண்டும். காலம்சார் தொடரின் வளைவை ஒரு வரைபடத் தாளில் வரைய வேண்டும். வரை படத்தில் ஆண்டு தோறும் சில குறிப்பிட்ட மாதங்களில் தொடரின் மதிப்புக்கள் ஏறுகின்ற போக்குடனும், வேறு சில குறிப்பிட்ட மாதங்களில் இறங்கு கின்ற போக்குடனும் காணப்பட்டால், அத்தொடரில் பருவ கால மாறுபாடுகளிருப்பதாக அறியலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகளிருப்பதை உறுதிபடுத்திக் கொண்ட பின் அவற்றைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறை களுள் ஏதேனுமொன்றைப் பயன்படுத்தி அளவிட வேண்டும். இவ்வாறு, பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிட்டு ஆராய்ந்தபின் மற்ற அசைவுகளை ஆராயும் பொருட்டுக் காலம்சார் தொடரி லின்றும் பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்கவேண்டும்.

காலம்சார் தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகளிருப்பதை உறுதி செய்தல் :

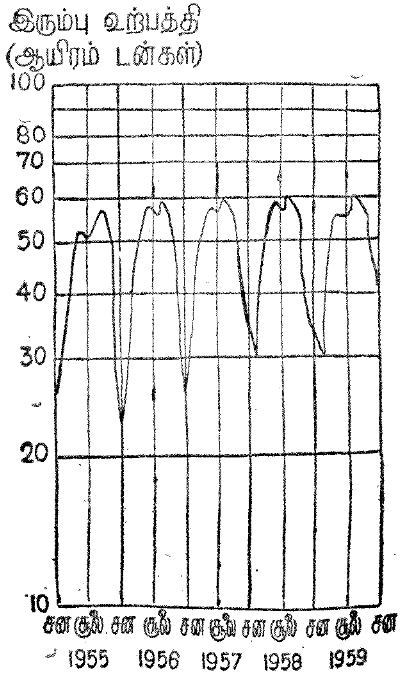
ஒரு காலம்சார் தொடரின் வளைவை ஒரு சார் மடக்கை வரை படத்தாளில் வரைவதன் மூலம் அத்தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகளிருப்பதை மிகத் தெளிவாக அறிந்துகொள்ள முடி யும். உதாரணமாக, ஒரு நாட்டின் இரும்பு உற்பத்தியைக் காட்டுகின்ற கீழ்க்காணும் காலம்சார் தொடரின் வளைவு அடுத் துள்ள பக்கத்தில் ஒரு சார் மடக்கை தாளில் வரையப்பட்டிருக் கிறது. அவ்வரை படத்திலிருந்து, ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் சூன் மாதம் முதல் செப்டம்பர் மாதம் வரை இரும்பு உற்பத்தி மிக அதிக அளவை எட்டியிருப்பதையும் அதன் பின்னுள்ள மாதங்களில் உற்பத்தி மிக வேகமாகக் குறைந்திருப்பதையும் காணலாம். மேலும், இரும்பு உற்பத்தியிலுள்ள ஏற்றத்தாழ்வு எல்லா ஆண்டுகளிலும் ஒரே மாதிரியாக யிருப்பதைக் காண லாம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம்சார் தொடரில் பருவகால மாறுபாடுகளிருக்கின்றன என்று உறுதியாக கூறலாம்.

ஒரு நாட்டின் மாதவாரி இரும்பு உற்பத்தி (ஆயிரம் டன் களில்)

மாதம்	1966	1967	1968	1969	1970
சனவரி	28	25	26	31	32
பிப்ரவரி	29	27	27	30	30
மார்ச்சு	35	38	37	38	32

ஏப்ரல்	46	41	46	45	46
மே	50	53	54	56	52
ஜூன்	51	56	57	54	56
ஜூலை	50	55	56	56	55
ஆகஸ்ட்	53	54	59	60	60
செப்டம்பர்	54	55	58	59	57
அக்டோபர்	52	53	55	56	54
நவம்பர்	45	47	48	50	47
டிசம்பர்	34	34	38	39	36

மேற்கண்ட காலம்சார் தொடரின் வளைவு கீழ்க்காணும் ஒரு சார் மடக்கை வரை படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 35.

பருவகால மாறுபாடுகளைக் காட்டும் ஒரு சார் மடக்கை வரைபடம்.

பருவகாலக் குறியீட்டெண் **(Seasonal index) :**

ஒரு மாதம் அல்லது வாரம் அல்லது கால் பருவம் (Quarter) ஆகிய ஏதாவது ஒன்றின் பருவகாலக் குறியீட்டெண் என்பது அந்த மாதம் அல்லது வாரம் அல்லது கால் பருவத்தில் எதிர் பார்க்கப்படுகின்ற மதிப்புக்கும், அந்த மாதம் அல்லது வாரம் அல்லது கால் பருவத்திற்குரிய போக்கு மதிப்புக்குமுள்ள விகித மாகும். இக்குறியீட்டெண் பொதுவாகச் சதவீதமாகவே குறிப்பிடப்படுகிறது. உதாரணமாக, சனவரி மாதத்தின் பருவ காலக் குறியீட்டெண் 115 என்றால், ஒரு இயல்பான (Normal January) மாத மதிப்பு அம்மாதத்திற்குரிய போக்கு மதிப்பைவிட 15% அதிகமாக இருக்குமென்று அறிந்து கொள்ளலாம்.

பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடும் முறைகள் :

பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடப் பல முறைகள் உள்ளன. அவற்றுள் சில மிகச் சரியான அளவுகளைக் கொடுப்பவை. மற்றும் சிலவற்றின் மூலம் பருவகால மாறுபாடு களின் தோராய மதிப்புக்களையே பெற முடியும். பலவகையான தொழில்களைச் சார்ந்த காலம்சார் தொடர்களின் பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிட நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படு கின்ற சில முறைகள் மட்டும் இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ளன.

(அ) *மாதந்தரக் கூட்டல் முறைகள்* (Method of monthly totals)

ஒரு காலம்சார் தொடரின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடப் பயன்படும் முறைகளுள் மாதாந்தரக் கூட்டல்முறை மிகவும் எளிமையான தொன்றாகும். மாதங்களை முதல் நிரலி லும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளுக்குரிய மதிப்புக்களை அடுத்துள்ள நிரல்களில் ஆண்டுகளின் வரிசைப்படியும் கொண்ட ஒரு பட்டியலமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர், இந்நிரல்களுக்கடுத்து ஒரு நிரலில் ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் எதிரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளின் அம்மாதத்திய மதிப்புக்களைக் கூட்டி எழுத வேண்டும். இந் நிரலிலுள்ள மதிப்புக்களின் மொத்தத்தை 12 ஆல் வகுத்துச் சராசரி மாதாந் தர மொத்தத்தைப் (Average monthly total) பெறலாம். இந் நிரலிலுள்ள மாதந்தர மொத்தங்களைச் சராசரி மாதாந்தர மொத்தத்தால் வகுத்து கிடைப்பவற்றை 100 ஆல் பெருக்கிச் சதவீதங்களாக மாற்றி இதற்கு அடுத்த இறுதி நிரலில் எழுத வேண்டும். இச்சதவீதங்கள் யாவும் அவற்றிற்குரிய மாதங்

களின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் (Seasonal Indexes) ஆகும்.

பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்குதல் (Elimination of Seasonal variations) :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு மாத உண்மையான மதிப்பையும் அம்மாதத்திற்குரிய பருவகாலக் குறியீட்டெண்ணால் வகுத்துப் பருவகால மாறுபாடுகளின் விளைவுகளை நீக்கி விட முடியும்.

மாதிரி 121 ;

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரு நாட்டின் மாதாந்தர இரும்பு உற்பத்தியின் அளவுகள் (ஆயிரம் டன்களில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாதாந்தரக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றின் மூலம் 1970 ஆம் ஆண்டில் பருவகால மாறுபாடுகளின் விளைவுகளை நீக்குக.

மாதம்	1966	1967	1968	1969	1970
சனவரி	28	25	26	31	32
பிப்ரவரி	29	27	27	30	30
மார்ச்சு	35	33	37	33	32
ஏப்ரல்	46	41	46	45	46
மே	50	53	54	56	52
சூன்	51	56	57	58	56
சூலை	50	55	56	56	55
ஆகஸ்ட்	53	54	59	60	60
செப்டம்பர்	54	55	58	59	57
அக்டோபர்	52	53	55	56	54
நவம்பர்	45	47	48	50	47
டிசம்பர்	34	34	38	39	36

பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன.

மாதம்	மாதாந்தர இரும்பு உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்) 1966	67	68	69	70	மாத மொத்தம்	பருவகாலக் குறியீட்டெண் மாத மொத்தம் / சராசரி மொத்தம்	100
சனவரி	28	25	26	31	32	142	$\frac{142}{229.25}$ =	61.94
பிப்ரவரி	29	27	27	30	30	143	$\frac{143}{229.25}$ =	62.37
மார்ச்	35	33	37	33	32	170		74.15
ஏப்ரல்	46	41	46	45	46	224		97.70
மே	50	53	54	56	52	265		115.50
ஜூன்	51	56	57	58	56	278		121.30
ஜூலை	50	55	56	56	55	272		118.70
ஆகஸ்ட்	53	54	59	60	60	286		124.70
செப்டம்பர்	54	55	58	59	57	283		123.40
அக்டோபர்	52	53	55	56	54	270		117.80
நவம்பர்	45	47	48	50	47	237		103.40
டிசம்பர்	34	34	38	39	36	181		78.96
					மொத்தம்	2781		

சராசரி மாத மொத்தம் 2781/12 = 229.25

1970 ஆம் ஆண்டில் பருவகால மாறுபாடுகளின் விளைவுகள் நீக்கப்பட்டுத் திருத்தப்பட்ட உற்பத்தி அளவுகள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதம்	1970 இல் உற்பத்தி	பருவகாலக் குறியீட்டெண்	பருவகால மாறுபாடுகளுக்குத் திருத்தப்பட்ட உற்பத்தி அளவு
சனவரி	32	61.94	$\frac{32}{61.94} \times 100 = 51.6$
பிப்ரவரி	30	62.37	$\frac{30}{62.37} \times 100 = 48.1$
மார்ச்	32	74.15	43.1
ஏப்ரல்	46	97.70	47.1
மே	52	115.50	45.0
ஜூன்	56	121.30	46.1
ஜூலை	55	118.70	46.5
ஆகஸ்ட்	60	124.70	48.1
செப்டம்பர்	57	123.40	46.2
அக்டோபர்	54	117.80	45.8
நவம்பர்	47	103.40	45.4
டிசம்பர்	36	78.96	45.6

(ஆ) போக்கு விகித முறை (Ratio to trend Method)

காலம்சார் தொடரின் மதிப்புக்கள் ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் நான்கு காலாண்டுகளில் (four quarters) மதிப்புக்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றிப் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றின் மூலம் பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்கலாம்.

மாதிரி 122:

இந்தியாவிலுள்ள ஒரு நிறுவனத்தில் விற்பனை மதிப்புக்கள் (ஆயிரம் ரூபாயில்) கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. போக்கு விகித முறையைப் பயன்படுத்திக் குறியீட்

டெண்களைக் கணக்கிட்டு 1964 ஆம் ஆண்டில் பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்குக.

ஆண்டு	காலாண்டுகளில் விற்பனை (ஆயிரம் ரூபாயில்)			
	1	2	3	4
1960	30	40	36	34
1961	34	52	50	44
1962	40	58	54	48
1963	54	76	68	62
1964	80	92	86	82

தீர்வு :

ஆண்டு	காலாண்டு விற்பனை (ஆயிரம் ரூபாய்) 1	2	3	4	ஆண்டு மொத்த விற்பனை (y)	ஆண்டுச் சராசரி (y)	நடு ஆண்டு 1962 இலிருந்து விலக்கங்கள் (x)	x^2	xy
1960	30	40	36	34	140	35	−2	4	−70
1961	34	52	50	44	180	45	−1	1	−45
1962	40	58	54	48	200	50	0	0	0
1963	54	76	68	62	260	65	1	1	65
1964	80	92	86	82	340	85	2	4	170
N = 5					மொத்தம்	280		10	120

போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டை $y = A + Bx$ எனக் கொள்க.

A = நடு ஆண்டு 1962 இன் போக்கு மதிப்பு

$$= \frac{\Sigma y}{N} = \frac{280}{5} = 56$$

$$\text{ஆண்டு வளர்ச்சி} = \frac{\Sigma\, xv}{\Sigma\, x^2} = \frac{120}{10} = 12$$

$$\text{ஆகவே காலாண்டு வளர்ச்சி} = \frac{12}{4} = 3$$

1962 ஆம் ஆண்டின் போக்கு மதிப்பு = 56

அதாவது, 1962 ஆம் ஆண்டின் நடுக் காலாண்டாகிய 2.5 ஆவது காலாண்டின் போக்கு மதிப்பு 56 ஆகும்.

ஒரு காலாண்டு விற்பனை வளர்ச்சி 3 ஆகும்.

ஆகவே, $1\frac{1}{2}$ காலாண்டுகளுக்கு விற்பனை வளர்ச்சி 4.5

ஆகவே 1962 ம் ஆண்டு 1வது காலாண்டு மதிப்பு

= 56 − 4.5 = 51.5

,, 2 ,, = 51.5 + 3 = 54.5

,, 3 ,, = 54.5 + 3 = 57.5

,, 4 ,, = 57.5 + 3 = 60.5

இவ்வாறு எல்லா ஆண்டுகளிலுமுள்ள எல்லாக் காலாண்டு மதிப்புக்களையும் கணக்கிட்டுக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஆண்டு	காலாண்டுகளின் போக்கு மதிப்புக்கள்			
	1	2	3	4
1960	27.5	30.5	33.5	36.5
1961	39.5	42.5	45.5	48.5
1962	51.5	54.5	57.5	60.5
1963	63.5	66.5	69.5	72.5
1964	75.5	78.5	81.5	84.5

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலாண்டு மதிப்புக்களை, அவற்றிற்குரிய போக்கு மதிப்புக்களின் சதவீதங்களாக மாற்றி, ஒவ்வொரு காலாண்டிற்கும் சராசரிச் சதவீதத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். இவ்வாறு நான்கு காலாண்டுகட்கும் கணக்கிடப்பட்ட நான்கு சராசரிச் சதவீதங்களுக்கும் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும். பின்னர் ஒவ்வொரு காலாண்டின் சராசரிச்

சதவீதத்தைச் சராசரிச் சதவீதங்களின் சராசரியால் வகுத்து 100 ஆல் பெருக்கினால் அக்காலாண்டிற்குரிய பருவகாலக் குறியீட்டெண்ணைப் பெறலாம்.

ஆண்டு	காலாண்டு	கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு	போக்கு மதிப்பு	போக்கு மதிப்பில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பின் சதவீதம் $\frac{(3)}{(4)} \times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1960	1	30	27.5	110.0
	2	40	30.5	131.1
	3	36	33.5	107.5
	4	34	36.5	93.1
1961	1	34	39.5	86.1
	2	52	42.5	122.4
	3	50	45.5	109.9
	4	44	48.5	90.7
1962	1	40	51.5	77.7
	2	58	54.5	106.4
	3	54	57.5	93.9
	4	48	60.5	79.3
1963	1	54	63.5	85.0
	2	76	66.5	114.3
	3	68	69.5	97.8
	4	62	72.5	85.5
1964	1	80	75.5	106.0
	2	92	78.5	117.2
	3	86	81.5	105.5
	4	82	84.5	97.0

(5) ஆவது நிரலிலுள்ள சதவீத மதிப்புக்களைக் கீழ்கண்டவாறு பட்டியலமைத்துச் சராசரிச் சதவீத மதிப்புக்களையும், பருவகாலக் குறியீட்டெண்களையும் கணக்கிடலாம்

ஆண்டு	காலாண்டுகளின் சதவீத மதிப்புக்கள் 1	2	3	4	
1960	110.1	131.1	107.5	93.1	
1961	86.1	122.4	109.9	90.7	
1962	77.7	106.4	93.9	79.3	
1963	85.0	114.3	97.8	85.5	
1964	106.0	117.2	105.1	97.0	
சதவீதங்களின் மொத்தம்	464.8	591.4	514.6	445.6	மொத்தம்
காலாண்டுகளின் சராசரிச் சதவீதம்	92.96	118.28	102.92	89.12	403 28
சராசரிச் சதவீதங்களின் சராசரி	100.82	100.82	100.82	100.82	$\frac{403.28}{4}$
பருவகாலக் குறியீட்டெண்	$\frac{92.96}{100.82}\times 100$	$\frac{118.28}{100.82}\times 100$	$\frac{102.92}{100.82}\times 100$	$\frac{89.12}{100.82}\times 100$	
	92.2	117.3	102.1	88.4	

கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலாண்டு விற்பனை மதிப்புக்களி லிருந்து பருவகால மாறுபாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு நீக்கப்படு கின்றன.

ஆண்டு	காலாண்டு	சதவீத மதிப்பு	பருவ காலக் குறியீட் டெண்	திருத்தப் பட்ட சதவீத விலக்கம்	பருவகால மாறு பாடுகள் நீக்கப் பட்ட சதவீத மதிப்பு
1	2	3	4	5	6
1960	1	110.0	92.2	17.8	$\frac{110.2}{92.2} \times 100 = 119.3$
	2	131.1	117.3	13.8	$\frac{131.1}{117.3} \times 100 = 111.7$
	3	107.5	102.1	5.4	105.2
	4	93.1	88.4	4.7	105.3
1961	1	86.1	92.2	— 6.1	93.4
	2	122.4	117.3	5.1	104 4
	3	109.9	102.1	7.8	107.6
	4	90.7	88.4	2.3	102.6
1962	1	77.7	92.2	—14.5	84.3
	2	106.4	117.3	—10.9	90.7
	3	93.9	102.1	— 8.2	92.0
	4	79.4	88.4	— 9.1	89.7
1963	1	85.0	92.2	— 7.2	92.2
	2	114.3	117.3	— 3.0	97.4
	3	97.8	102.1	— 4.3	95.8
	4	85.5	88.4	— 2.9	96.7
1964	1	106.0	92.2	13.8	114.9
	2	117.2	117.3	— 0.1	99.9
	3	105.5	102.1	3.4	103.3
	4	97.0	88.4	8.6	109.7

(இ) *மூல மதிப்புக்களின் சராசரி காணும் முறை*
(Method of averaging the original values)

ஒரு காலம்சார் தொடர் வரிசையில் பருவகால மாறுபாடு கள் ஒழுங்காகவும், போக்கு, சுழல் ஆகியவற்றின் விளைவுகள் புறக்கணிக்கத் தக்கனவாயு மிருந்தால் மூல மதிப்புக்களின் சரா சரிகளிலிருந்து பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட

லாம். ஆனால் பெரும்பாலான காலம்சார் தொடர்களில் நீள் காலப் போக்குகளும் சுழல் மாறுபாடுகளும் செங்குத்தான ஏற்ற, இறக்கஞடன் காணப்படுவதால், அத்தகைய தொடர்களுக்கு இம்முறையைத் திருப்திகரமாகப் பயன்படுத்த முடியாது.

மாதிரி 123 :

கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து காலாண்டுப் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு, 1950 ஆம் ஆண்டு விவரங்களில் பருவகால அசைவுகளின் விளைவுகளை நீக்குக.

காலாண்டு	காலாண்டுகளில் இரும்பு உற்பத்தி (1000 டன்) 1950	1951	1952	1953	1954
1	31	42	49	47	51
2	39	44	53	51	44
3	45	57	65	62	66
4	36	45	55	50	58

தீர்வு :

பட்டியலைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றியமைத்து ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	காலாண்டு உற்பத்தி (1000 டன்) 1	2	3	4	ஆண்டு மொத்தம்	ஆண்டுச் சராசரி
1950	31	39	45	36	151	38
1951	42	44	57	45	188	47
1952	49	53	65	55	222	55.5
1953	47	51	62	50	210	52.5
1954	51	54	56	58	229	57
மொத்தம்	220	241	295	244		250
காலாண்டுகளின் சராசரி	$\frac{220}{5}$	$\frac{241}{5}$	$\frac{295}{5}$	$\frac{244}{5}$		
	44	48	59	49		50

காலாண்டுகளின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் கீழ்க் கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகின்றன.

காலாண்டு 1. $\frac{44}{50} \times 100 = 88$

2. $\frac{48}{50} \times 100 = 96$

3. $\frac{59}{50} \times 100 = 118$

4. $\frac{49}{50} \times 100 = 98$

காலாண்டுகளின் மூல மதிப்புக்களை அவற்றிற்குரிய குறியீட்டெண்களால் வகுத்து, மூல மதிப்புக்களிலிருந்து பருவகால அசைவுகளின் விளைவுகளை நீக்கலாம். 1950 ஆம் ஆண்டின் காலாண்டு மூல மதிப்புக்களிலிருந்து பருவகால அசைவுகளின் விளைவுகள் நீக்கப்பட்ட மதிப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1950 ஆம் ஆண்டின் காலாண்டு	மூல மதிப்பு	குறியீட்டெண்	திருத்தப்பட்ட மதிப்பு
1	31	88	$\frac{31}{88} \times 100 = 35.29$
2	39	96	$\frac{39}{96} \times 100 = 40.62$
3	45	118	$\frac{45}{118} \times 100 = 38.14$
4	36	98	$\frac{36}{98} \times 100 = 36.74$

(ஈ) காலாண்டு நகரும் சராசரி முறை (Method of Quarterly moving averages)

காலம்சார் தொடரின் மதிப்புக்கள் காலாண்டுகளின் மதிப்புக்களாக கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடவும், மூல மதிப்புக்களிலிருந்து பருவகால அசைவுகளின் விளைவுகளை நீக்கவும் மிகச் சிறந்த முறை காலாண்டு நகரும் சராசரி முறையாகும். இம்முறையில், 4 காலாண்டு நகரும் சராசரிகளின் மூலம் காலாண்டுகளின் போக்கு மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு, அதன் பின்னர் காலாண்டுகளின் மூல மதிப்புக்களை அவற்றிற்குரிய போக்கு மதிப்புக்களின் (நகரும் சராசரிகளின்) சதவீதங்களாக மாற்றி, ஒவ்வொரு காலாண்டின் சதவீத மதிப்புக்களில் சராசரியிலிருந்து அக்காலாண்டின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்தி, முன்னர் கூறப்பட்ட முறையில் பருவகால அசைவுகளின் விளைவுகளை மூல மதிப்புக்களிலிருந்து நீக்கலாம்.

மாதிரி 124 :

கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கண்க்கிடவும்.

ஆண்டு	காலாண்டு மதிப்புக்கள் 1	2	3	4
1956	68	62	61	63
1957	65	58	56	61
1958	68	63	63	67
1959	70	59	56	62
1960	60	55	51	58

ஆண்டு	கால் ஆண்டு	மூல மதிப்பு	4 கால் ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	மையமிடப் பட்ட 8 கால் ஆண்டு நகரும் சதவீதம்	(போக்கு) 4 கால் ஆண்டு நகரும் சராசரி	4 கால் ஆண்டு சராசரியில் மூல மதிப்பின் சதவீதம்
1	2	3	4	5	6	(7) $\frac{3}{6} \times 100$
1956	1	68	—	—	—	—
	2	62	254	—	—	—
	3	61	251	505	63.125	90.6
	4	63	247	498	62.250	101.3
1957	1	65	242	489	61.125	106.4
	2	58	240	482	60.250	96.3
	3	56	243	483	60.375	92.7
	4	61	248	491	61.375	99.4
1958	1	68	255	503	62.875	108.2
	2	63	261	516	64.500	97.7
	3	63	263	524	65.500	90.2
	4	67	259	522	65.250	102.8
1959	1	70	252	511	63.875	109.5
	2	59	247	499	62.375	94.6
	3	56	237	484	60.500	92.6
	4	62	233	470	58.750	105.4
1960	1	60	228	461	57.625	104.2
	2	55	224	452	56.500	97.3
	3	51	—	—	—	—
	4	58	—	—	—	—

மேற்கண்ட பட்டியலில் (7) ஆவது நிரலில் கணக்கிடப் பட்டுள்ள சதவீத மதிப்புக்களைக் காலாண்டு வாரியாகப் பின்

வருமாறு பட்டியலில் அமைத்துப் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

ஆண்டு	காலாண்டுகளின் சதவீத மதிப்புக்கள் 1	2	3	4
1956	—	—	96.6	101.3
1957	106.4	96.3	92.7	99.4
1958	108.2	97.7	96.2	102.8
1959	109.5	94 6	92.6	105.4
1960	104.2	97.3	—	—
மொத்தம்	428.3	385.9	378.1	408.9
சராசரி	$\frac{428.3}{4}$	$\frac{385.9}{4}$	$\frac{378.1}{4}$	$\frac{408.9}{4}$
	107.075	96.475	94.525	102.225

சராசரிகளின் மொத்தம் $= 107.075 + 96.475 + 94.525 + 102.225$

$= 400.3$

சராசரிகளின் சராசரி $= \frac{400.3}{4} = 100.075$

சராசரிகளின் சராசரியை ஆதாரமாகக் கொண்டு நான்கு காலாண்டுகளின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகின்றன.

கால் ஆண்டு	காலாண்டுச் சராசரி	சராசரிகளின் சராசரி	பருவகாலக் குறியீட்டெண்
1	107.075	100.075	$\frac{107.075}{100.075} \times 100 = 107$
2	96.475	100.075	$\frac{96.475}{100.075} \times 100 = 96.4$
3	94.525	100.075	$\frac{94.525}{100.075} \times 100 = 94.5$
4	102.225	100.075	$\frac{102.225}{100.075} \times 100 = 102.1$

தொழிற்சுழல்களை அளவிடல் (Measuring business Cycles)

ஒரு காலம்சார் தொடரில் காணப்படுகின்ற சுழல்மாறுபாடுகளும், ஒழுங்கற்ற ஏற்ற விறக்கங்களும் கலந்த சுழல்களே

தொழில் சுழல்கள் எனப்படுகின்றன. தொழிற் சுழல்களில் காணப்படுகின்ற சுழல் மாறுபாடுகளையும் ஒழுங்கற்ற ஏற்ற விறக்கங்களையும் தனித்தனியே பிரித்து அளவிடுவது மிகவும் கடினமாகையால் அவற்றைத் தனித்தனியே அளவிட முயற்சிகள் செய்யப்படுவதில்லை. ஒரு காலம்சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்கும், பருவகால மாறுபாடுகளும் இணைந்த நிலையானது இயல்நிலை (normal) எனப்படுகிறது. ஆகவே, இயல்நிலை என்பது, சுழல் மாறுபாடுகள், ஒழுங்கற்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் ஆகியவற்றால் பாதிக்கப்படாமல் நீள்காலப் போக்கும், பருவ கால மாறுபாடுகளும் மட்டுமே கொண்டமைந்த ஒரு தொழிலின் நிலையைக் குறிக்கும். இத்தகைய இயல்நிலையிலிருந்து ஒரு தொழிலில் காணப்படுகின்ற விலக்கங்களிலிருந்து (deviations from the normal) தொழிற் சுழல்கள் அளவிடப்படுகின்றன. ஆகவே, சுழல் மாறுபாடுகளும், ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கங்களும் கலந்த தொழிற் சுழல்கள் தொழிலின் இயல்நிலையிலிருந்து அத்தொழிலின் விலக்கங்களாகவோ அல்லது சதவீத விலக்கங்களாகவோ அளவிடப்படுகின்ற முறையானது நீள்காலப் போக்கையும், பருவகால மாறுபாடுகளையும் நீக்கும் முறையென்று அழைக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து நீள்காலப்போக்கு மதிப்புக்களையும், பருவகாலக் குறியீட்டெண்களையும் கணக்கிட்டு, அவற்றை மூல மதிப்புக்களுக்கு அடுத்துள்ள நிரல்களில் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர், போக்கு மதிப்புக்களையும், அவற்றிற்குரிய (சதவீத) பருவகாலக் குறியீட்டெண்களையும் பெருக்கிக் கிடைக்கின்ற இயல்நிலை (normal) மதிப்புக்களை அடுத்துள்ள நிரலில் எழுத வேண்டும். இப்பொழுது மூல மதிப்புக்களை இயல்நிலை மதிப்புக்களின் சதவீதங்களாக மாற்றி,

$$\left(\text{அதாவது, } \frac{\text{மூலமதிப்பு}}{\text{இயல்நிலை}} \times 100\right) \text{ அச்சதவீதங்களிலிருந்து}$$

100ஐக் கழித்து அடுத்த நிரலில் எழுத வேண்டும். இவைகள் யாவும் இயல்நிலையிலிருந்து சதவீத விலக்கங்களாகும். இச்சதவீத விலக்கங்களை அவற்றின் திட்ட விலக்கத்தால் (Standard deviation) வகுத்து தொழிற்சுழல்களைப் பெறலாம்.

மாதிரி 125 :

மாதிரி 122இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து சுழல்களைக் கணக்கிடுக ; போக்கு மதிப்புக்களும், பருவகாலக் குறியீட்டெண்களும் மாதிரி 122இல் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. சுழல் அளவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகின்றன.

ஆண்டு	கால் ஆண்டு	மூல மதிப்பு	போக்கு	சதவீதப் பருவகால குருயீட்டெண்	இயல்நிலை (D×E)	இயல்நிலையிலிருந்து சதவீத விலக்கங்கள் (C÷F)—100	சதவீத விலக்கங்களின் வர்க்கம் (G^2)	சுழல் (G÷σ) σ=28·1
A	B	C	D	E	F	G	H	I
1960	1	30	27·5	92·2	25·4	18·1	327·61	0·64
	2	40	30·5	117·3	35·8	11·7	136·90	0·41
	3	36	33·5	102·1	34·2	5·3	28·09	0·19
	4	34	36·5	88·4	32·3	5·3	28·09	0·19
1961	1	34	39·5	92·2	36·4	—6·6	43·56	—0·23
	2	52	42·5	117·3	49·8	4·4	19·36	0·15
	3	50	45·5	102·1	46·5	7·5	56·25	0·26
	4	44	48·5	88·4	42·9	2·6	6·76	0·09
1962	1	40	51·5	92·2	47·5	—15·8	249·60	—0·53
	2	58	54·5	117·3	63·9	—9·2	84·64	—0·33
	3	54	57·5	102·1	58·7	—8·0	64·00	—0·28
	4	48	60·5	88·4	53·5	—10·3	106·10	—0·36
1963	1	54	63·5	92·2	58·5	—7·7	59·29	—0·27
	2	76	66·5	117·3	78·0	—2·5	6·25	—0·08
	3	68	69·5	102.1	70·9	—4·1	16·81	—0·14
	4	62	72·5	88·4	64·1	—3·3	10·89	—0·12
1964	1	80	75·5	92·2	69·6	14·9	222·00	0·53
	2	92	78·5	117·3	92·1	—0·1	0·01	—0·00
	3	86	81·5	102·1	83·2	3·4	21·56	0·12
	4	82	84.5	88·4	74·5	10·1	102·00	0·36
					மொத்தம்	15·7	1579·76	

$$\bar{G} = \frac{15.7}{20} = 0{\cdot}785$$

$$(\text{G-யின் திட்ட விளக்கம்}) = \sqrt{\frac{\Sigma G^2}{N} - \bar{G}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1579{\cdot}76}{20} - (0{\cdot}785)^2}$$

$$= \sqrt{789{\cdot}88 - 0{\cdot}6162}$$

$$= \sqrt{789{\cdot}2638}$$

$$= 28.1$$

தொழில் முன் கணிப்பு (Business Forecasting)

தொழில்களின் வருங்கால நிலைமைகளின் சரியான மதிப்பீடுகளை முறையான அடிப்படையில் செய்கின்ற முறைக்கு தொழில் முன்கணிப்புச் செய்தல் (Business Forecasting) என்று பெயர். வருங்கால நிலைமை பற்றிய மதிப்பீட்டிற்கு முன் கணிப்பு (forecast) என்று பெயர். தொழில் முன் கணிப்பானது, தொழில்களின் தற்கால, கடந்த கால நிலைமைகளைப் பற்றிய பகுப்பாய்வையே பெரிதும் சார்ந்திருக்கிறது. ஒரு தொழிலின் தற்கால, கடந்த கால சூழல்களின் நிலைமைகள் எவ்வளவு சரியாக நிர்ணயிக்கப்படுகின்றனவோ, அவற்றிற்குத் தக்கவாறு அத் தொழிலின் வருங்கால நிலைமைகள் பற்றிய தெளிவு ஏற்படும். உற்பத்தியைப் பெருக்குவது, உற்பத்தி முறைகளில் பல புதுமைகளைக் கையாள்வது, புதிய கட்டிடங்கள் கட்டுவது, நிலங்கள் வாங்குவது, கடன் வழங்குவது, அல்லது கடன் வழங்காமலிருப்பது, வட்டி வீதத்தைக் குறைப்பது அல்லது கூட்டுவது. விலைகளைக் கூட்டுவது, புதிய அங்காடிகளை நிர்மாணித்தல், இவை போன்ற பல்வேறு முக்கிய தொழில் பிரச்சினைகளிலும் வருங்கால நிலைமைகள் பற்றிய தற்காலிகக் குறிப்புக்களின் அடிப்படைகளிலேயே முடிவுகளெடுக்க முடியும். தொழில் துறைகளில் நீண்ட கால முன்கணிப்புக்களும், குறுகிய கால முன்கணிப்புக்களும் செய்வதுண்டு. பெரும்பாலான பிரச்சினைகளில் 1 முதல் 18 மாத முன்கணிப்புக்களே செய்யப்படுகின்றன.

தொழில்முன் கணிப்புக்களுக்கு தொழில்களின் வருங்காலச் சூழல்கள் பற்றித் தெரிந்துகொள்ளவேண்டியது இன்றியமையாததாகும். சிலதொழில்களின் வருங்கால நிலைமைகள் அத் தொழில்கள் இயங்கி வருகின்ற உள்ளூர் நிலைமைகளை மட்டும்

சார்ந்திருக்கும். வேறு சில தொழில்கள் வெளியூர், வெளிநாட்டு நிலைமைகளுக்கேற்றவாறு அமைவதாகயிருக்கின்றன. இன்னும் சில தொழில்கள் உள்ளூர், வெளியூர், வெளிநாட்டு நிலைமைகள் எல்லாவற்றிற்கும் ஏற்ப அமைவதாகவுமிருக்கும். ஆகவே, ஒரு தொழில் பற்றிய முன்கணிப்புச் செய்யும் போது, உள்நாட்டுத் தொழிற் சூழல்கள், வெளிநாட்டுத் தொழிற்சூழல்கள் ஆகிய யாவற்றையும் ஆராய்தல் அவசியமாகும். உள்நாட்டுத் தொழில் சூழலும், வெளிநாட்டுத் தொழிற் சூழலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்குமென்பதில்லை. இரண்டும் நேர்மாறான நிலைகளிலுமிருக்கலாம், ஆகவே. இரண்டு வகைத் தொழிற் சூழல்களும் தனித்தனியே ஆராயப்படவேண்டும். மேலும், உள்நாட்டுத் தொழிற்சூழலை ஆராயும் போது, உள்நாட்டுப் பரப்பளவைப் பல சிறு பரப்புக்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பரப்பிற்கும் தனித் தனியே தொழிற்சூழல்களை ஆராய்தல் சரியான முன்கணிப்பிற்கு வழிகோலுவதாக அமையும்.

முன் கணிப்பு முறைகளை இரண்டு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். கடந்த கால நிலைமைகளின் வரலாற்றுப் பகுப்பாய்வு (Historical analysis) செய்தல் முதல் பிரிவாகும். தற்கால சூழ்நிலைகளின் குறுக்கு வெட்டுப்பகுப்பாய்வு (cross section analysis) செய்தல் இரண்டாவது பிரிவாகும். முதல் பிரிவைச் சார்ந்த முன்கணிப்பு முறைகள் இரண்டு சீரிய கொள்கைகளின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளன. ஒரு தொழிலானது வீக்கமாகவோ (inflation) அல்லது மந்தமாகவோ (depression) இருந்தால் அது மீண்டும் இயல் நிலையை நோக்கிச் செல்ல முயலும் என்பது முதல் கொள்கையாகும். வெவ்வேறு வகையான தொழில் துறைகளுக்கிடையே திட்டவட்டமான சுழல் தொடர்ச்சிகளிருக்குமென்பது இரண்டாவது கொள்கையாகும். ஒரு தொழிலானது இயல்நிலையிலேயே யிருப்பதற்கான காரணங்களையும், இயல்நிலையினின்றும் மாறுபடுவதற்கான காரணங்களையும், நிர்ணயிப்பதைச் சார்ந்து முதல் கொள்கை அமைந்துள்ளது. பல்வேறு தொழில் துறைகளுக்கிடையேயுள்ள சுழல் தொடர்ச்சிகளை நிர்ணயிப்பதைச் சார்ந்து இரண்டாவது கொள்கை அமைந்துள்ளது. இவ்வாறு, நிர்ணயிக்கப்பட்ட வெவ்வேறு துறைகளுக்கிடையேயுள்ள சுழல் தொடர்ச்சியின் மூலம் ஒரு துறையிலுள்ள அசைவுகளுக்கு முன் ஏற்படுகின்ற மாறுதல்களைக் கொண்டு மற்றொரு துறையில் ஏற்படயிருக்கின்ற அசைவுகளை (movements) முன்கணிக்க முடியும். ஒரு தொழிலில் ஒரு குறிப்பிட்ட சூழ்நிலையில் எப்படிப்பட்ட விசைகள் செயல்பட்டு வருகின்றன என்பதைக் கண்டுபிடித்து, அவற்றின்

தன்மைகளை அளவிட்டு அவற்றின் மொத்த விளைவை நிர்ணயித்து அதன் மூலம் முன்கணிப்புச் செய்கின்ற முறைகள் இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்தவையாகும்.

ஒரு தொழிற் பற்றிய முன்கணிப்புச் செய்யுமுன் அத் தொழிலின் கடந்த கால விவரங்களடங்கிய காலம்சார் தொடரை புள்ளியியல் முறையில் ஆராய்தல் வேண்டும். அக் காலம் சார்தொடரின் நீள்காலப்போக்கு, பருவகால மாறுபாடுகள், தொழிற்சூழல்கள் ஆகியவற்றை மிகவும் கவனமாக ஆராய்தல் வேண்டும். அத்தொடரினின்றும், பருவ கால மாறுபாடுகளையும், தொழிற் சூழல்களையும் நீக்கி, நீள்காலப் போக்கைத் தனிமைப்படுத்தி அதன் வரை படத்தை வரைய வேண்டும். நீள்காலப் போக்கின் வரைபடத்திலிருந்து அத் தொடரின் வருங்காலப்போக்கு எவ்வாறு இருக்குமென்பதைக் கணிக்கமுடியும். பல்வேறு சராசரிகளும், பரவுகை அளவைகளும் (measures of dispersion) வருங்கால மதிப்புக்களைக் கணிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. தேவை (demand)க்கும் விலைக்குமிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு (correlation) மழையளவுக்கும் உற்பத்திக்குமிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு இது போன்ற பல்வேறு ஒட்டுறவுகளும் ஒரு மாறியின் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்குரியமற்ற மாறியின் மதிப்பைக் கணிக்கப்பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இது போன்ற மதிப்பீடுகள் மாறிகளின் தொடர்புகளைம் (regression equations) பயன்படுத்தியும் மதிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறு பல முறைகளைப் பயன்படுத்தி முன்கணிப்புக்கள் செய்யப்பட்ட போதிலும், இம் முறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் மட்டுமே முன்கணிப்புச் செய்வதில் வெற்றி காண முடியாது. தொழில் துறையில் சம்பந்தப்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள காரண விளைவுத் தொடர்புகளை நிர்ணயிப்பதிலும், பாகுபாடு செய்து விளக்கம் செய்வதிலும் நன்ருக ஆழ்ந்து சிந்தித்துச் செயல்படுவதன் மூலமே முன்கணிப்பில் வெற்றி காண முடியுமென்பதைக் கருத்திற் கொள்ள வேண்டும்.

தொழில் முன்கணிப்பின் பயன்கள்

தொழில்களில் பெரும்பாலும் தீய விளைவுகளைக் கொடுக்கின்ற தொழிற் சூழல்களினுலேற்படுகின்ற ஆபத்துக்களைக் குறைக்க முன்கணிப்புக்கள் பயன்படுகின்றன. பொருளாதார மந்தம் பற்றிய முன்கணிப்பு தொழில்களிலேற்படுகின்ற சீரழிவுகளைக் குறைக்க உதவுகிறது. முன்கணிப்பின் உதவியால் தொழிலின் வருங்கால நிலைமைகளை அறிந்து அவற்றிற்கேற்ப தொழில்களில் மாறுதல்கள் பல செய்து பெருவாரியான லாப

மடைய வழியேற்படுகிறது. வியாபாரிகள், தொழில் நிறுவனத்தினர், சாலைப்போக்குவரத்து அதிகாரிகள், பாங்கு நிர்வாகிகள், காப்புறுதிக் கழக நிர்வாகத்தினர் முதலானோர் தொழில் முன்கணிப்பினால் மிகுந்த பலனடைகின்றனர். ஒரு நாட்டின் தொழிற் சுழல்களைக் கட்டுப்படுத்த அரசாங்கத்திற்குப் பெரிதும் உதவியாக இருப்பது தொழில் முன்கணிப்பேயாகும்.

வரலாற்று விளக்கப்படம் (Historigram)

ஒரு காலம்சார் தொடரின் வரைபடம், கால அளவுகளைக் கிடையச்சிலும், அக்காலம் சார் தொடர் மதிப்புக்களை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு வரையப்படுகிறது. நிலைக்குத்து அச்சில் காலம் சார் தொடரின் தனி மதிப்புக்கள் (absolute values) குறியிடப்பட்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து ஒரு மெல்லிய வளைவினால் சேர்த்துக் கிடைக்கப்படும் வரைபடத்திற்குத் ''தனி வரலாற்று விளக்கப்படம்'' (absolute historigram) என்று பெயர். மாறாக, தனி மதிப்புக்களுக்குப் பதிலாக அவற்றைக் குறியீட்டெண்களாக மாற்றி அக்குறியீட்டெண்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து மெல்லிய வளைவினால் இணைத்துக் கிடைக்கப்படும் வரை படத்திற்குக் "குறியீட்டெண்வரலாற்று விளக்கப்படம்" (index historigram) என்று பெயர். தனி வரலாற்று விளக்கப் படங்கள் தனிமாறுதல்களையும் (absolute changes)குறியீட் டெண் வரலாற்று சதவீத மாறுதல்களையும் குறிக்கின்றன. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட காலம் சார் தொடர்களின் வரலாற்று விளக்கப் படங்களை ஒரே வரை படத்தாளில் ஒரு பொதுவான கிடையச்சின் மேல் வரைந்து அத்தொடர்களின் தன்மைகளை ஒப்பிடலாம்.

Z-வரைபடம்

Z-வரை படம் என்பது ஒரே அச்சுக்களில் வரையப்பட்ட மூன்று வளைவுகளைக் கொண்டு அமைந்த வரைபடமாகும். இதிலுள்ள மூன்று வளைவுகளும் சேர்ந்து Z என்ற ஆங்கில எழுத்தின் வடிவத்தில் அமைவதால் இவ்வரைபடம் Z வரை படம் என்றே அழைக்கப்படுகிறது. பொதுவாக, ஒரு ஆண்டிலுள்ள 12 மாதங்களில் மதிப்புக்களைக் கொண்டு இப்படம் வரையப்படுகிறது.

இதிலுள்ள மூன்று வளைவுகள் வருமாறு :

(1) மூல மாதாந்தர மதிப்புகளைக்கொண்டு வரையப்பட்ட வளைவு. இது Z என்ற எழுத்தின் அடிக்கோடாக அமைகிறது.

(2) மாதாந்தர மதிப்புக்களின் வளர்நிகழ்வெண்களைக் கொண்டு வரையப்பட்ட வளர்நிகழ்வெண்வரை (Cumulative Curve). இது Z என்ற எழுத்தின் குறுக்குக் கோடாக அமைகிறது.

(3) ஒவ்வொரு மாதத்துடனும் முடிவு பெறுகின்ற 12 மாத நகரும் மொத்தங்களைக் கொண்டு வரையப்படுகின்ற நகரும் வருடாந்தர மொத்த வளைவு (moving annual total curve). நகரும் வருடாந்தர மொத்தங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப் படுகின்றன. முந்திய ஆண்டின் பிப்பரவரி மாதத்திலிருந்து இந்த ஆண்டின் சனவரி மாதம் முடிய 12 மாதங்களின் மொத்த மதிப்பு இந்த ஆண்டின் சனவரி மாத நகரும் மொத்தமாகும். இது போன்று, சென்ற ஆண்டு மார்ச் முதல் இந்த ஆண்டு பிப்ரவரி மாதம் முடிய 12 மாதங்களின் மொத்த மதிப்பு இந்த ஆண்டு பிப்ரவரி மாத நகரும் மொத்தமாகும். இவ்வாறு நடப்பு ஆண்டின் 12 மாதங்களுக்கும் நகரும் மொத்தங்கள் கணக்கிடப் படுகின்றன. இந்த நகரும் மொத்தங்களின் வளைவு Z என்ற எழுத்தின் மேல் கோடாக அமைகின்றது.

வளர்நிகழ்வெண்வரையானது காலம் சார் தொடரின் மாதந்தர அபிவிருத்தியைக் காட்டுகிறது. நகரும் வருடாந்தர மொத்த வளைவு பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்கி விடுவதால் காலம் சார் தொடரின் போக்கை மிகத் தெளிவாக அறிந்து கொள்ள முடிகிறது. பல்வேறு தொழில்களிலும் மாதந்தர உற்பத்தி, விற்பனை ஆகியவை பற்றிய ஆய்வுக்கு Z வரைபடம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

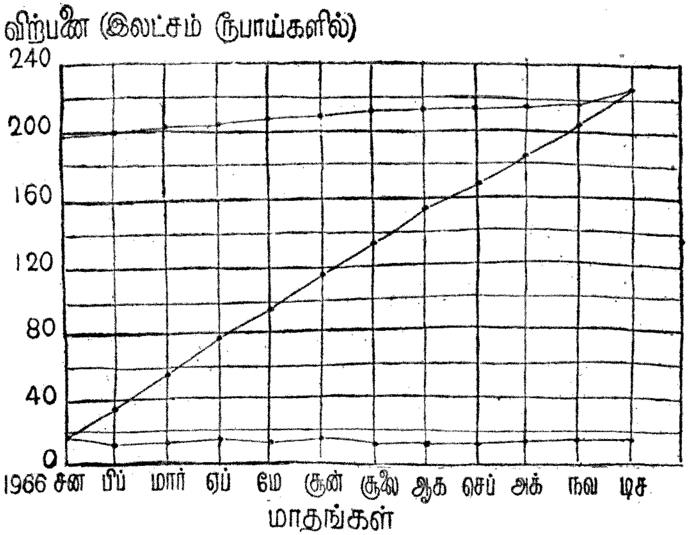
மாதிரி 126 :

ஒரு நிறுவனத்தின் 1965, 66ஆம் ஆண்டுகளின் விற்பனை மதிப்புக்கள் (இலட்சம் ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு Z வரைபடம் வரைக.

மாதம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1965 விற்பனை —	15	17	16	14	17	19	13	16	15	19	20	
1966	16	18	20	21	19	19	21	17	18	18	20	22

தீர்வு :

மாதம்	விற்பனை 1965	விற்பனை 1966	வளர்நிகழ் விற்பனை	நகரும் வருடாந்தர மொத்தம் 1966
1	—	16	16	197 (181+16
2	15	18	34	200
3	17	20	54	203
4	16	21	75	208
5	14	19	94	213
6	17	19	113	215
7	19	21	134	217
8	13	17	151	221
9	16	18	169	223
10	15	18	187	226
11	19	20	207	227
12	20	22	229	229
மொத்தம் 181				



படம் 86.

1966ஆம் ஆண்டு விற்பனை மதிப்புக்களின் Z வரை படம்

வினுத்தாள் 13.

1. காலம்சார் தொடர் வரிசை என்றால் என்ன ?
(சென்னை பி.காம் 1968 ஏப்.)

2. காலம்சார் தொடர் வரிசைப்பகுப்பாய்வு என்பதன் பொருள்பற்றி விளக்கமாக விவரிக்கவும். தொழில் களில் இத்தகைய பகுப்பாய்வின் முக்கியத்துவத்தைக் குறிப்பிடுக. (சென்னை பி.காம் 1961 செப், '66 செப்.)

3. ஒரு காலம் சார் தொடர் வரிசையின் பல்வேறு கூறுகளை விவரிக்கவும்.
(மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 செப்.)

4. ஒரு காலம் சார் தொடர் எவ்வாறு (அ) போக்கு, (2) பருவகால மாறுபாடுகள் (3) ஒழுங்கற்ற ஏற்ற விறக்கங்கள் என்ற மூன்று கூறுகளாகப் பகுப்பாய்வு செய்யப்படுகின்றன என்று விளக்குக.
(சென்னை பி.காம் 1965 ஏப்.)

5. காலம்சார் தொடர் வரிசையையொட்டி (1) நீள்காலப் போக்கு (2) பருவகால ஏற்றத்தாழ்வுகள் என்பன வற்றை பொருத்தமான ஏற்றத் தாழ்வுகளுடன் விளக்குக. (மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்)

6. பருவகால மாறுபாடுகளுக்கும் சுழல் மாறுபாடுகளுக் கும் இடையேயுள்ள வேறு பாடுகளைக் கூறுக.
(சென்னை பி.காம். 1965 ஏப்.)

7. பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் மாறுபாடுகள், நீள்காலப் போக்கு ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேற்றுமைகளைக் கூறுக : (மதுரை பி.காம் 1969 ஏப்.)

8. காலம் சார் தொடர் வரிசைப் பகுப்பாய்வில் நீள்காலப் போக்கை நிர்ணயிக்கும் ஒரு முறையினை விவரிக்கவும்.
(சென்னை பி.காம் 1962 ஏப்.)

9. நீள்காலப்போக்கு, பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் மாறுபாடுகள் ஆகியவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களில் நீள்காலப் போக்கை நீவிர் எவ்வாறு அளவிடுவீர் ?
(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்.)

10. நீள்காலப் போக்கு என்றால் என்ன ? போக்கை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுத்தப் படுகின்ற பல்வேறு முறைகளை விவரிக்கவும். (சென்னை பி.காம். 1963 செப்.

11. காலம் சார் தொடர்களில் நீள்காலப் போக்கை அளவிடும் பல்வேறு முறைகளின் மதிப்பை விவரிக்கவும்.
(மதுரை பி.காம் 1970 செப்.)

12. "நகரும் சராசரிகள்" என்ற கருத்தினை விளக்குக. ஒரு காலம் சார் தொடரின் நீள்காலப் போக்கினை அளவிட அவை எவ்வாறு உதவுகின்றன ?
(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

13. போக்கை நிர்ணயிப்பதற்கு நகரும் சராசரி முறையை விளக்குக. (மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 செப்.)

14. ஒரு காலம் சார் தொடருக்கு நேர்கோட்டுப் போக்கினை அமைப்பதற்கான மீச்சிறுபடி முறையைப்பற்றி ஒரு குறிப்பு தருக. (மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

15. பருவகால மாறுபாடுகள் என்றால் என்ன ?
(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

16. பருவகாலக் குறியீட்டெண்களை நிர்ணயிக்கும் முறையொன்றினை ஒரு பொருத்தமான உதாரணத்துடன் விளக்குக. (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

17. காலம்சார் தொடர் விவரங்களிலிருந்து பருவகால அசைவுகளை நீக்கும் முறையொன்றை விளக்குக.

18. போக்கு என்பதிலிருந்து அறியப்படுவது யாது ? ஒரு காலம்சார் தொடரின் நீண்ட கால அசைவுகளில் பருவ கால, சுழல் காரணிகளின் விளைவுகளை எவ்வாறு நீக்கு வாய் ? (சென்னை பி.காம். 1962 செப்.)

19. "தொழிற் சுழற்சிகள்" என்றாலென்ன ? காலம்சார் தொடர் வரிசைகளை ஆய்ந்து அவை எவ்வாறு கணிக்கப்படுகின்றன ? எவ்வகையில் அவை பருவகால ஏற்றத் தாழ்வுகளினின்றும் வேறுபட்டு நிற்கின்றன ? எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு அவ்வேறு பாடுகளை விளக்குக : (மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

20. தொழிற் சுழற்சியின் நான்கு நிலைகள் யாவை? ஒவ்வொன்றையும் விவரிக்கவும்.

21. இயல்நிலை தொழில் நிலைமைகள் என்றுலென்ன? கணித முறையில் இயல்நிலை எவ்வாறு அளவிடப்படுகிறது?

22. தொழில் முன்கணிப்பு என்றுல் என்ன என்பது பற்றி விளக்கவும்,

23. தொழில் முன்கணிப்பில் காலம்சார் தொடர்பகுப்பாய் வின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

(மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

24. முன்கணிப்பின் தொடர்பாக வரலாற்றுப் பகுப்பாய்வு, குறுக்கு வெட்டுப்பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றை விளக்குக.

25. ஒழுங்கற்ற அசைவுகளுக்கும் சுழல் அசைவுகளுக்கு முள்ள தொடர்பினை விவாதிக்கவும். அவைகள் பொது வாகத் தனித்தனியே அளவிடப்படுகின்றனவா? அவை சாதாரணமாக எவ்வாறு அளவிடப்படு கின்றன?

26. பருவகால, சுழல், ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகளை வேறு படுத்திக் காட்டுக. அவைகளை நீக்குகின்ற ஏதாவது ஒரு முறையினை விவரிக்கவும்.

(சென்னை பி.காம் 1968 ஏப்.)

27. சிறு குறிப்பு வரைக:

(அ) காலம்சார் தொடர்பகுப்பாய்வு.

(பி.காம். சென்னை 1967 செப். '68 செப். மதுரை, 71 செப்.)

(ஆ) காலம்சார் தொடரில் போக்கு.

(சென்னை பி.ஏ. 1966 ஏப்.)

(இ) நீள்காலப் போக்கு. (சென்னை பி காம். 1960 ஏப்.)

(ஈ) நகரும் சராசரிகள்.

(பி.காம். சென்னை 1964 ஏப். 65 செப். 67 ஏப். மதுரை 69 ஏப். 70 ஏப்.)

(ஊ) தொழில் முன்கணிப்பு.
(மதுரை பி.காம். 1970 செப்.)

(ஊ) தொழிற் சுழற்சிகள்.

(எ) குறுகிய கால அலைவுகள்.
(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

(ஏ) வரலாற்று விளக்கப்படம்.
(சென்னை பி.காம் 1966 செப், பி.எஸ்ஸி. 64 ஏப், 67 செப்.)

(ஐ) Z வரை படம்.
(சென்னை பி.காம். 1965 செப், 66 செப்.)

(ஒ) ஒரு சார் மடக்கைப்படம்.
(பி.காம் சென்னை 1968 ஏப், பி.எஸ்ஸி. மதுரை 1970 செப்.)

(ஓ) மடக்கை - மடக்கைத்தாள்.
(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(ஔ) மடக்கை வரைபடங்கள்.
(மதுரை பி காம் 1971 செப். பி. எஸ்ஸி. 70 ஏப்.)

28. நீள்காலப் போக்கு எவ்வாறு மதிப்பிடப்படுகின்றது? எவ்வாறு நீக்கப்படுகின்றது? என்று காட்டுக.
(மதுரை எம். ஏ. 1972)

29. (அ) (1) போக்கு, (2) பருவகால மாறுபாடு ஆகியவற்றை விளக்குக.

(ஆ) கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு காலம்சார் தொடர் வரிசையில் போக்கை நிர்ணயிக்கின்ற நகரும் சராசரி முறையை விளக்குக. (மதுரை பி.பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

30. காலம்சார் தொடர் பகுப்பாய்வின் பயன்களையும் வரம்புகளையும் பற்றி விவாதிக்கவும்.
(மதுரை பி,பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

31 ஒரு குறிப்பிட்ட காலஞ்சார் தொடர் வரிசைக்கு மீச்சிறு இருபடி முறையின் அடிப்படையில் ஒரு பொருத்தமான

வளைவரையைப் பொருத்தி அதன் நீள்காலப் போக்கினை யெப்படி அறியலாமென்பதை விளக்குக.

50 ஆண்டு காலத்திற்கு, ஆண்டு வாரியாக இந்தியாவின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதிப் பொருள்களின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்வரிசையில் மடங்கி வரும் பகுதியைப் (cyclical component) பிரிக்கக் கூடிய முறையினை விளக்குக.

(மதுரை பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

பயிற்சி 14.

(1) கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் 1934ஆம் ஆண்டு அடிப்படையில் 1942 முதல் 1965 வரையுள்ள ஆண்டுகளில் ஒரு நாட்டின் குறியிட்டெண்களைக் குறிப்பிடுகின்றன. ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரிகளின் உதவியால் இத் தொடரின் போக்கை மதிப்பிடுக. மூல மதிப்புக்களையும், போக்கு மதிப்புக்களையும் ஒரே வரை படத்தாளில் குறிக்கவும்.

ஆண்டு	குறியீடு	ஆண்டு	குறியீடு	ஆண்டு	குறியீடு
1942	183	1950	158	1958	156
1943	174	1951	147	1959	158
1944	175	1952	144	1960	184
1945	176	1953	140	1961	189
1946	172	1954	140	1962	200
1947	168	1957	143	1963	199
1948	166	1956	147	1964	201
1949	164	1957	154	1965	206

(2) ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரிகளின் மூலம் கீழ்க்காணும் காலம்சார் தொடரில் குறுகிய கால அலைவுகளைக் காண்க. காலம்சார் தொடரின் வரை படத்தை வரைக. குறுகிய கால அலைவுகளை வரை படத்தின் மூலம் காட்டு.

ஆண்டு	மதிப்பு	ஆண்டு	மதிப்பு	ஆண்டு	மதிப்பு
1906	155	1914	200	1922	315
1907	168	1915	227	1923	356
1908	226	1916	193	1924	346
1909	203	1917	205	1925	294
1910	170	1918	270	1926	281
1911	153	1919	341	1927	267
1912	170	1920	301	1928	264
1913	177	1921	360	1929	262

(3) கீழ்க்காணும் பட்டியலில் இங்கிலாந்து நாட்டின் குழந்தை இறப்பு வீதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 6-ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் கணக்கிட்டு, குறுகிய கால அலைவுகளை வரைபடமூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	இறப்பு வீதம்	ஆண்டு	இறப்பு வீதம்	ஆண்டு	இறப்பு வீதம்
1922	77	1930	60	1938	53
1923	69	1931	66	1939	51
1924	75	1932	65	1940	57
1925	75	1933	64	1941	60
1926	70	1934	59	1942	61
1927	70	1935	57	1943	49
1928	65	1936	59	1944	45
1929	74	1937	58	1945	46
				1946	46

(4) கீழ்க்காணும் விவரங்கள் ஒரு சர்க்கரை ஆலையில் உற்பத்தியான சர்க்கரை உற்பத்தி அளவைக் (ஆயிரம் டன்களில்) காட்டுகிறது.

ஆண்டு	1941	1942	1943	1944	194	1946	1947
சர்க்கரை உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)	80	90	92	83	94	99	92

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டுப் போக்கு அமைத்து 1941 முதல் 1947 முடிய எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்கு மதிப்புக்களைக் காண்க.

(1) கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டுப் போக்கு அமைக்கவும்.

ஆண்டு	இந்தியாவின் உணவு தானிய உற்பத்தி (மில்லியன் டன்கள்)
1952-53	58·2
1953—54	68·6
1954—55	66·9
1955—56	65·7
1956—57	68·7
1957—58	62·5
1958—59	73·5

அடுத்த விச ஆண்டுகளுக்கும் இந்த போக்குக் கோடு பொருந்துமெனக் கருதி 1960—61, 1962—63 ஆண்டுகளின் உற்பத்தியை மதிப்பிடுக.

(6) உந்துவண்டி எரி பொருட்களில் வீட்டுத் தேவை பற்றிய கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு போக்கு நேர்கோடு அமைக்கவும்.

ஆண்டு	மாதாந்தர சராசரித் தேவை (மில்லியன் பீப்பாய்கள்)
1946	61
1947	66
1948	72
1949	76
1950	82
1951	90
1952	96
1953	100
1954	103
1955	110
1956	114

(மதுரை பி.ஏ. 1970 ஏப்.)

(7) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மீச்சிறுபடி முறையில் ஒரு போக்கு நேர்கோடு அமைக்கவும்.

ஆண்டு	1950	1951	1952	1953	1954	55	56	57
பால் நுகர்வு (மில்லியன் காலன்கள்)	102	102	106	112	115	119	125	107

அடுத்த சில ஆண்டுகட்கு இந்தப் போக்குக் கோடு நன்ருகப் பொருந்துமெனக்கருதி 1958, 1960 ஆகிய ஆண்டுகளில் பால் நுகர்வின் மதிப்பைக் காண்க.

(8) மீச்சிறுபடிக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி கீழ்க் காணும் காலம்சார் தொடரின் நேர்கோட்டுப் போக்கைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	'42
கோவேறு கழுதைகள் (மில்லியன்கள்)	6	5 9	5·7	5·5	5·3	5·2	5·1	5·0

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்)

(9) 1955 முதல் 1964 வரை ஒரு நகரத்திலுள்ள தொழிற் சாலைகள் வேலை செய்வோர் பற்றிய கீழ்க்காணும் விவரங்களின் போக்கை காண்க.

ஆண்டு	வேலையிலிருப்போர் எண்ணிக்கை (இலட்சங்கள்)
1955	3.2
1956	3.3
1957	3.7
1958	3.9
1959	3.6
1960	4.3
1961	4.8
1962	4.8
1963	5.4
1964	6.3

(மதுரை பி.காம். 1969 ஏப்.)

(10) 15 ஆண்டுகளில் இந்தியாவிலிருந்து ஏற்றுமதியான ஒரு பண்டத்தைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அரைச் சராசரி முறையில் அவற்றின் போக்கைக் கணித்து வரைபடம் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	ஏற்றுமதி (டன்களில்)	ஆண்டு	ஏற்றுமதி (டன்களில்)
1947	28	1955	33
1948	26	1956	39
1949	23	1957	36
1950	24	1958	35
1951	32	1959	32
1952	31	1960	38
1953	29	1961	44
1954	27		

(11) கீழ்க்காணும் பட்டியலில் இந்தியாவின் குறியீட்டெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அரைச் சராசரி முறையில் அவற்றின் போக்கை வரைபட மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	குறியீட்டெண்	ஆண்டு	குறியீட்டெண்
1939	100	1946	229.2
1940	138 0	1947	191.6
1941	187.0	1948	250.9
1942	221.8	1949	181.6
1943	245.0	1950	240.6
1944	238.9	1951	310.2
1945	233.6	1952	190.6

(12) ஒரு மின்சார கம்பெனியில் மாதச் சராசரி மின்சார விநியோக அளவுகள் (மில்லியின் கிலோவாட் மணிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மின் விநியோகத்தின் போக்கை மடக்கை நேர்கோட்டு முறைப்படிக் கணக்கிட்டு வரைபடம் மூலம் காட்டுக.

ஆண்டு	மாதச் சராசரி மின் விநியோகம் (மில். கி. வாட்)	ஆண்டு	மாதச் சராசரியின் மின் விநியோகம் (மில். கி. வாட்)
1913	3.35	1925	11.40
1914	3.47	1926	12.10
1915	4.28	1927	14.00
1916	5.19	1928	18.32
1917	5.89	1929	17.82
1918	6.60	1930	17.36
1919	6.42	1931	16.22
1920	6.94	1932	16.48
1921	6.57	1933	17.71
1922	7.60	1934	19.65
1923	8.50	1935	
1924	8.92		

(13) கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் மாதாந்தர விற்பனைகள் (ஆயிரம் ரூபாய்களில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாதாந்தரக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றின் மூலம் 1968 ஆம் ஆண்டில் பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்குக:

மாதம்	1968	1969	1970
சனவரி	132	172	207
பிப்ரவரி	104	141	167
மார்ச்	96	103	203
ஏப்ரல்	86	110	182
மே	91	160	170
சூன்	100	155	216
சூலை	112	186	220
ஆகஸ்ட்	113	189	261
செப்டம்பர்	106	178	274
அக்டோபர்	117	168	289
நவம்பர்	131	209	312
டிசம்பர்	146	232	324

(14) கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு போக்கு விகித முறையில் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	காலாண்டுப் பருவங்கள்			
	1	2	3	4
1951	68	62	61	63
1952	65	58	56	61
1953	68	63	63	67
1954	70	50	56	62
1955	60	55	51	58

(15) கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து காலாண்டு நகரும் சராசரி முறையில் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களை கணக்கிட்டு பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்கவும்.

ஆண்டு	காலாண்டுகளின் உற்பத்தி			
	1	2	3	4
1927	68.3	62.6	61.1	63.3
1928	65.4	57.9	56.4	61.5
1929	68.1	62.7	62.8	67.0
1930	70.1	59.1	56.3	61.6
1931	59.5	54.8	51.1	58.0

(16) கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்குக.

ஆண்டு	காலாண்டுப் பருவங்கள்			
	1	2	3	4
1961	30	81	62	119
1962	33	104	86	171
1963	42	153	90	221
1964	56	172	129	235
1965	67	201	136	302

(17) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து சுழற்சிகளை நிர்ணயிக்கவும்.

ஆண்டு	காலாண்டுப் பருவங்கள் 1	2	3	4
1956	283	258	244	260
1957	210	208	204	241
1958	194	168	150	188
1959	150	162	168	189

இந்தியாவில் ஒவ்வொருவருக்கும் ஒரு மாதத்திற்கு கிடைக்கக்கூடிய சீனியின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. போக்கு நேர்கோடு அமைத்து 1971-72 இல் ஒவ்வொருவருக்கும் கிடைக்கக்கூடிய சீனியின் அளவை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	சீனி (கிலோ கிராம்)
1960 — 61	4.7
1961 — 62	5.8
1962 — 63	5.4
1963 — 64	4.9
1964 — 65	5.0
1965 — 66	5.6
1966 — 67	5.1
1967 — 68	4.2
1968 — 69	4.9
1969 — 70	6.1

இந்தியாவின் ஏற்றுமதி மதிப்புக்கள் (மாதவாரியாக) பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாதாந்தரக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றின் மூலம் 1971-ஆம் ஆண்டின் பருவகால மாறுபாடுகளை நீக்குக.

மாதம்	ஏற்றுமதி மதிப்பு (கோடி ரூபாய்) 1968—69	1969—70	1970—71
ஏப்ரல்	103	126	128
மே	110	110	118
ஜூன்	98	114	94
ஜூலை	113	105	92
ஆகஸ்ட்	133	126	130
செப்டம்பர்	119	119	134
அக்டோபர்	124	118	156
நவம்பர்	112	105	146
டிசம்பர்	110	119	152
சனவரி	116	145	144
பிப்ரவரி	102	97	102
மார்ச்	116	128	139

14. குறியீட்டெண்கள்

(INDEX NUMBERS)

விலைவாசி பற்றிய ஆய்வு

பொருளாதாரக் காலம் சார் தொடர் வரிசைகள் பற்றிய ஆய்வுகளில் பண்டங்களின் விலைவாசிகளைப் பற்றிய ஆய்வே மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது. இதற்கு மூன்று முக்கிய காரணங்களைக் கூறலாம். முதலாவதாக வாழ்க்கைச் செலவிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களை அளவிடுவதன் மூலம் சராசரி மனிதனின் வருமானத்திற்கேற்ப அவனுடைய செலவினங்களிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களைத் தெரிந்துகொள்ள முடிவதால் வாழ்க்கைச் செலவு மாறுதல்களின் அளவீடுகள் பொது மக்களின் கவனத்தைக் கவர்ந்துள்ளன. இத்தகைய அளவீடுகளைக் கணக்கிட, சராசரி மனிதனுக்குத் தேவையான முக்கிய பண்டங்களின் விலை வாசிக்கும், முக்கியப் பணிகளுக்காகின்ற செலவு விவரங்களும் இன்றியமையாதவையாகின்றன. இரண்டாவதாக, மனித வாழ்க்கைக்குப் பல வகையான பண்டங்கள் தேவைப்பட்ட போதிலும், சில குறிப்பிட்ட பண்டங்களின் விலைகளிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் மொத்தப் பண்டங்களின் விலைகளில் பெரும் மாறுதலையேற்படுத்திவிடக் கூடுமாகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட பண்டத்தின் விலையிலேற்படுகின்ற மாறுதல் பொதுவாக மற்றப் பண்டங்களின் விலைகளில் எத்தகைய மாறுதல்களை விளைவிக்கிறதென்பதை நிர்ணயிக்க வேண்டியது மிகவும் அவசியமாகிறது. மேலும், பண்டங்களின் பொதுவான விலைகளில் குறிப்பிடத்தக்க மாறுதல்களில்லாத போதும் கூட ஒன்று அல்லது பல குறிப்பிட்ட பண்டங்களின் விலைகளில் மிக அதிக மாறுதல் ஏற்படலாம். இவ்வாறு ஒரு சில குறிப்பிட்ட பண்டங்களின் விலைகள் மொத்தப் பண்டங்களின் இயல்பான விலையினின்றும் அதிகமாக விலகிச் செல்லும் தன்மைக்கு "ஒழுங்கற்ற முறையில் விலைச்

சரிக்கட்டல்'' (Price mal adjustment) என்று பெயர். இத்தகைய ஒழுங்கற்ற முறை விலைச் சரிக்கட்டினால் மொத்தப் பண்டங்களின் விலை இயல் நிலையிலிருந்தபோதிலும், வாழ்க்கைக்கு இன்றியமையாத ஒரு சில பண்டங்களின் விலைகள் மட்டும் இயல்பான விலையினின்று மிக அதிகமாகயிருக்கக் கூடுமாகையால் சராசரி மனிதனின் வாழ்க்கைச் செலவு எவ்வாறு பாதிக்கப்பட்டுள்ளதென்பதை எளிதில் அறிந்து கொள்ள முடியாது. மேலும் இத்தகைய ஒழுங்கற்ற விலைச் சரிக்கட்டினால் சமுதாயத்தில் வருமானப் பங்கீடுகள் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதோடு பொருளாதார மந்தம் (economic depression) ஏற்படவும் ஏதுவாகிறது. ஆகவே, பண்டங்களின் ஒழுங்கற்ற விலைச் சரிக்காட்டுதலை ஆராய வேண்டியது பொருளாதார ஆய்வுகளில் இன்றியமையாத ஒன்று என்பதை அறியலாம். மூன்றாவதாக விலைவாசிகள் பற்றிய ஆய்வின் மூலம் பணத்தின் வாங்கும் சக்தியை (purchasing power of money) நிர்ணயிக்க முடிகிறது. மேற் கூறப்பட்ட மூன்று முக்கிய காரணங்களால் பொருளாதாரக் காலம்சார் தொடர்கள் பற்றிய ஆய்வுகளில் விலைவாசிகள் பற்றிய ஆய்வே முக்கிய இடத்தைப் பெறுகிறது.

குறியீட்டெண்களின் வளர்ச்சி

முதன் முதலில் கி. பி. 18ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் விலைவாசிகளின் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்காகக் குறியீட்டெண் முறை கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. கொலம்பஸ் அமெரிக்காவைக் கண்டுபிடித்த சில நாட்களில் ஏராளமான தங்கமும், வெள்ளியும் அமெரிக்காவிலிருந்து ஐரோப்பாவிற்குக் கொண்டு வரப்பட்டன. இதன் விளைவாக ஐரோப்பாவில் எல்லாப் பண்டங்களின் விலைகளிலும் குறிப்பிடத்தக்க ஏற்றம் காணப்பட்டது. இத்தாலி நாட்டைச் சேர்ந்த கார்லி (Carly) என்பவர் அமெரிக்கா கண்டுபிடிக்கப்பட்டதன் விளைவாக இத்தாலியில் ஏற்பட்டுள்ள விலைவாசி மாற்றங்களை அளவிட விரும்பினார். அவர் தானியம், எண்ணெய், ஒயின் ஆகிய மூன்று பண்டங்களை இத்தாலி நாட்டுப் பண்டங்களின் பிரதிநிதித்துவப் பண்டங்களாகத் (representative commodities) தெரிவு செய்து, அப்பண்டங்களின் 1500, 1750 ஆகிய ஆண்டு விலைகளைச் சேகரித்து, 1750ஆம் ஆண்டு விலைகளை 1500ஆம் ஆண்டு விலைகளின் அடிப்படையில் சதவீதங்களாக மாற்றி, அச்சதவீதங்களின் கூட்டுச் சராசரியை அவ்வாண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள விலைவாசிக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட்டார். அதன் பின்னர், பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் பொருளாதார வல்லு

நர்கள் பலர் ஏராளமான பண்டங்களின் விலைகளைக் கொண்டு பல வகையான குறியீட்டெண்களைத் தயாரித்தனர். பின்னர், முதலாம் உலகப் போரின் விளைவாக ஏற்பட்ட விலைவாசியேற்றத்தின் காரணமாக பல புதிய குறியீட்டெண் முறைகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டன. பின்னர், இரண்டாம் உலகப் போரின் போது ஏற்பட்ட பொருளாதார, அரசியல் நிர்ப்பந்தங்களின் காரணமாக வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் (cost of living index numbers) கணக்கிடப்பட்டன. இரண்டாம் உலகப் போர் முடிந்த பின்னரும் பண்டங்களின் விலைகள் தொடர்த்து ஏறிக் கொண்டேயிருந்ததால், வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும் முறைகளில் சிறந்த பல முன்னேற்றங்கள் செய்யப்பட்டன. மேலும் பண்டங்களின் உற்பத்தியளவுகளிலேற்பட்ட மாறுதல்களை எளிதில் அளவிடும் பொருட்டுக் கணியக் குறியீட்டெண்களும் (quantity index numbers) கணிக்கப்பட்டன. இவ்வாறு கார்லியின் முதல் குறியீட்டெண்ணைத் தொடர்ந்து குறியீட்டெண்களின் பயன்பாடுகள் நாளுக்கு நாள் மிக வேகமாக அதிகரித்து இன்று பொருளாதாரத் துறையில் குறியீட்டெண்கள் முக்கிய இடத்தைப் பெற்றுத் திகழ்கின்றன.

குறியீட்டெண்ணின் பொருளும் முக்கியத்துவமும்

சராசரி மனிதரின் தினசரி வாழ்க்கையில் நூற்றுக்கணக்கான பண்டங்களும் (commodities) பணிகளும் (services) பயன்படுத்தப்படுகின்றன இந்த நூற்றுக்கணக்கான பண்டங்களின் விலைகளும் பணிகளுக்கான செலவுகளும் எப்பொழுதும் எல்லா இடங்களிலும் ஒரே சீராக இருப்பதில்லை. நாளுக்கு நாள், இடத்துக்கு இடம் பண்டங்களின் விலைகளும், பணிகளுக்கான செலவுகளும் மாறிக் கொண்டே யிருக்கின்றன. இந்த மாற்றங்கள் கூட ஒரே சீராகயிருப்பதில்லை. ஒரு சில பண்டங்களின் விலைகள் இயல்பாகயிருக்கும்போது, ஒரு சில பண்டங்களின் விலைகள் மிக அதிகமாக ஏறுவதையும், இன்னும் சிலவற்றின் விலைகள் வெகுவாகக் குறைவதையும், காண்கிறோம். அன்றாட வாழ்க்கைக்கு அத்தியாவசியமான பொருட்களின் விலையேற்றம் சராசரி மனிதனின் வாங்கும் சக்தியை வெகுவாகப் பாதிக்கிறது. வாழ்க்கைக்குத் தேவையான ஒவ்வொரு பண்டத்தின் விலை மாற்றத்திற்கேற்ப சராசரி மனிதனின் வாழ்க்கைச் செலவிலும் மாறுதலேற்படுகிறது. ஆகவே, சராசரி மனிதனின் பொதுவான வாழ்க்கைச் செலவின் மாற்றத்தை அளவிட வேண்டுமாயின் இந்த நூற்றுக்கணக்கான பண்டங்களின் விலைகளிலேற்படுகின்ற மாற்றங்களையும், பணிகளுக்கான செலவுகளி

லேற்படுகின்ற மாற்றங்களையும் சேர்த்து அளவிட வேண்டும். இந்த நூற்றுக்கணக்கான மாற்றங்களைத் தனித் தனியே அளவிடுதல் எளிது. ஆனால் எல்லா மாற்றங்களின் மொத்த விளைவை அளவிடுவதன் மூலமே வாழ்க்கைச் செலவின் உண்மையான மாற்றத்தை அளவிட முடியும். இத்த மொத்த விளைவை அளவிடுவதே குறியீட்டெண்களின் நோக்கமாகும். ஆகவே, குறியீட்டெண் என்பது, பல்வேறு பண்டங்களின் விலைகளிலும் பணிகளுக்காகின்ற செலவுகளிலும் ஏற்படுகின்ற மாற்றங்களின் மொத்த விளைவைச் சுருக்கிக் கூறுகின்ற ஒரு புள்ளியியல் முறையாகும். இக்குறியீட்டெண் பல்வேறு மாற்றங்களின் மொத்த விளைவை மட்டுமல்லாது, ஒன்று அல்லது பல பண்டங்களின் விலைமாற்றங்களினால் ஏற்படுகின்ற வளைவுகளையும் கூடப் பிரதிபலிக்கும் தன்மை வாய்ந்தது, இக்குறியீட்டெண் புள்ளியியல் முறையில் கணக்கிடப்படுவதால் இதைப் பயன்படுத்தி மேலும் சில கணக்கீடுகளின் மூலம் சில பிரச்சினைகளுக்கான முடிவுகளை எளிதில் காண முடிகிறது. உதாரணமாக, வாழ்க்கைச் செலவுக்குரிய பண்டங்களின் விலையேற்றத்திற்கேற்ப தொழிலாளர்களின் கூலிகள் அதிகரிக்கப்படுகின்றன. வாழ்க்கைச் செலவு 20 சதவீதம் அதிகரித்துள்ள போது, 10 சதவீதம் கூலி உயர்வு செய்தால் தொழிலாளர்களின் வாங்கும் சக்தி குறைந்து, வாழ்க்கைத் தரம் குறைகிறது. ஆகவே, வாழ்க்கைச் செலவின் மாற்றத்திற்கேற்ப கூலிகள் சரிக்கட்டப்படுகின்றன. வாழ்க்கைச் செலவின் மாற்றங்கள் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களினால் (cost of living index number) அளவிடப்படுகின்றன.

விலை விகிதங்கள் (Price relatives)

விலை விகிதம் என்பது ஒரு பண்டத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திய விலையை அப்பண்டத்தின் பிரிதோர் காலத்திய விலையுடன் ஒப்பிடப் பயன்படுகின்றது. அக்குறிப்பிட்ட காலம் பொதுவாக நடப்பு ஆண்டாக (current year) யிருக்குமாதலால் அக்குறிப்பிட்ட காலத்திய விலையானது நடப்பு விலை (current price) என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. ஒரு பண்டத்தின் நடப்பு விலை பொதுவாக P_1 என்று குறிக்கப்படுகிறது. ஒரு பண்டத்தின் நடப்பு விலையானது அப்பண்டத்தின் இயல்பான விலையுடன் (normal price) ஒப்பிடப்படுகிறது. இந்த இயல்பான விலையானது அடிப்படை விலை (base price) என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. அப்பண்டத்தின் அடிப்படை விலையிருந்த காலமானது அடிப்படைக்காலம் (base price) எனப்படும். அடிப்படைக்காலம் ஒரு வாரமாகவோ, ஒரு மாதமாகவோ ஒரு

ஆண்டாகவோ அல்லது பல ஆண்டுகளடங்கிய காலமாகவோ யிருக்கலாம். பொதுவாக ஒரு பண்டத்தின் அடிப்படை விலை P_0 என்று குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே, விலை விகிதம் என்பது நடப்பு விலை (P_1)க்கும் அடிப்படை விலை (P_0)க்குமுள்ள விகிதமாகும். இவ்விலை விகிதம் பெரும்பாலும் 100ஆல் பெருக்கப்பட்டுச் சதவீதமாகவே குறிப்பிடப்படுகிறது. ஆகவே, விலை விகிதம் $= \frac{P_1}{P_0} \times 100$ ஆகும். குறியீட்டெண் கணக்கீட்டில் சேர்த்துக்கொள்ளப்படுகின்ற எல்லாப் பண்டங்கள், பணிகள் ஆகியவற்றின் சதவீத விலை விகிதங்களின் சராசரியே குறியீட்டெண்ணாகும். சதவீதவிலைவிகிதங்களின் தனிச்சராசரி (simple average) மூலம் பெறப்படுகின்ற குறியீட்டெண் "தனிக்குறியீட்டெண்" (simple index numbers) என்று அழைக்கப்படுகிறது. பண்டங்கள், பணிகள் ஆகியவற்றின் நடப்புவிலைகளுக்கும் அடிப்படை விலைகளுக்குமுள்ள சதவீத விலைவிகிதங்களின் நிறையிட்ட சராசரி (weighted average) மூலம் பெறப்படுகின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கு "நிறையிட்ட குறியீட்டெண்" (weighted-index number) என்று பெயர்.

குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கும்போது கவனிக்க வேண்டிய குறிப்புகள்

பொதுவாக, குறியீட்டெண்கள் குறிப்பிட்ட நோக்கங்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றன. ஒழுங்கான விதிமுறைகளுக்கிணங்க குறியீட்டெண்களின் மதிப்பு அளவிடமுடியாததாகும். ஆனால், ஒழுங்கற்ற முறைகளில் தயாரிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்கள் முற்றிலும் தவறான முடிவுகளைத் தருமாகையால் மிகவும் ஆபத்தானவையாகக் கருதப்பட வேண்டும். குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் கவனிக்கவேண்டிய முக்கிய குறிப்புகள் வருமாறு :

(1) குறியீட்டெண்ணின் நோக்கத்தை நிர்ணயித்தல்

(2) குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்படவேண்டிய பண்டங்களைத் தெரிவு செய்தல்.

(3) தெரிவு செய்யப்பட்ட பண்டங்களுக்கு நிறைகளை (weights) நிர்ணயித்தல்.

(4) சேகரிக்கப்பட வேண்டிய விவரங்களின் அலகுகளை நிர்ணயித்தல்

(5) அடிப்படைக் காலத்தை நிர்ணயித்தல்

(6) பண்டங்களின் விலைகளைச் சேகரிக்கும் முறைகளை நிர்ணயித்தல்

(7) குறியீட்டெண் கணிப்பில் பயன்படுத்தப்பட வேண்டிய சராசரியை நிர்ணயித்தல்.

(8) குறியீட்டெண் கணிப்பு முறையை நிர்ணயித்தல்.

குறியீட்டெண்ணின் நோக்கம்

குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்காக விவரங்களைச் சேகரிக்கத் தொடங்குமுன் குறியீட்டெண்ணின் நோக்கத்தை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். பேராசிரியர் இர்விங் பிஷர் (Prof. Irving Fisher) இன் கூற்றுப்படி, பணத்தின் வாங்கும் சக்தியிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களை அளவிடுதலே குறியீட்டெண்கள் தயாரிப்பின் பொதுவான நோக்கமாயிருந்தாலும், பல்வேறு குறியீட்டெண்களின் நோக்கங்களும் பலவாறாக மாறுபட்டிருக்குமென்பதை புள்ளியியல், பொருளாதார வல்லுநர்கள் பலரும் ஒப்புக்கொள்கின்றனர். குறியீட்டெண்ணின் நோக்கத்திற்குத்தக்கவாறுதான் தயாரிப்பு முறையும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்குத் தேவையான பண்டங்களைத் தெரிவு செய்தல், அடிப்படைக்காலத்தை நிர்ணயித்தல், பண்டங்களின் நிறைகளை நிர்ணயித்தல் ஆகிய பணிகள் யாவும் குறியீட்டெண்ணின் நோக்கத்திற்குத் தக்கவாறு மாறுபடுகின்றன. விவசாய உற்பத்திச் செலவிலேற்பட்டுள்ள மாறுதலை அளவிடும் குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்கு விவசாய சாதனங்கள், விதை, உரம் ஆகிய பண்டங்களின் விலைகளையும், விவசாய பணிச்செலவு விவரங்களையும் சேகரிக்க வேண்டும். கட்டடக் கட்டுமானச் செலவு மாறுபாடுகளை அளவிட கட்டுமானத்திற்குத் தேவையான மரம், இரும்பு, கற்கள், செங்கற்கள், சிமெண்ட், சுண்ணம்பு முதலான பொருட்களின் விலைகளையும், பணியாட்களின் கூலி விவரங்களையும் சேகரிக்க வேண்டும். மேலும், கட்டுமானத்திற்குத் தேவையான பொருட்களின் முக்கியத்துவங்களுக்கேற்ப அவற்றின் நிறைகளையும் நிர்ணயிக்கவேண்டும். சராசரிக் குடும்பத்திற்குத் தேவையான துணிச்செலவின் மாறுதல்களை அளவிட துணிகளின் மொத்த விற்பனை விலைகளைக் கணக்கிடக் கூடாது. ஆகவே குறியீட்டெண் தயாரிப்பின் நோக்கத்தைத் திட்டமாக நிர்ணயித்தாலன்றி, தயாரிப்பில் சேர்க்கப்பட வேண்டிய பண்டங்கள், பண்டங்களின் எண்ணிக்கை, பண்டங்களின் விலைகள் சேகரிக்கப்பட வேண்டிய முறைகள், அடிப்படைக் காலம் முதலியவற்றைச் சரியாக நிர்ணயிக்க முடியாது.

பண்டங்களைத் தெரிவு செய்தல்

குறியீட்டெண்ணின் நோக்கம் நிர்ணயிக்கப்பட்டதும், குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்பட வேண்டிய பண்டங்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். குறியீட்டெண் மிகவும் நுட்பமானதாகயிருக்க வேண்டுமானால் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்படக்கூடிய நூற்றுக்கணக்கான பண்டங்களையும் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும். ஆனால், எல்லாப்பண்டங்களின் விலைகளையும் சேகரிப்பது அவ்வளவு எளிதன்று. உதாரணமாக, முழுவிலைக் குறியீட்டெண் (wholesale price index) தயாரிப்பில் முழு விலைகளில் விற்பனை செய்யப்படுகின்ற எல்லாவகைப் பண்டங்களையும் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும். ஆனால் எல்லா முழு விலைப் பண்டங்களின் விலைகளையும் சேகரிப்பது சாத்தியமற்றது என்று கூற முடியாவிடினும் அதிகச் சிரமம் வாய்ந்தது என்று கூறலாம். ஆகவே, இந்த நூற்றுக்கணக்கான பண்டங்களின் மொத்த விலைகளின் போக்கைப் பெறக்கூடிய சில பண்டங்களை மட்டும் தெரிவு செய்து அவற்றைக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்த்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படுகின்ற பண்டங்களின் விலைகளில் காணப்படுகின்ற அசைவுகள் (movement) மொத்தப் பண்டங்களின் விலைகளிலேற்படுகின்ற அசைவுகளைப் பிரதிபலிப்பவையாகயிருக்க வேண்டும். ஏனெனில், மூலப்பொருட்களின் விலைகளில் காணப்படுகின்ற அசைவுகளும், அம் மூலப் பொருட்களில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருட்களின் விலைகளில் காணப்படுகின்ற அசைவுகளும் முற்றிலும் மாறுபட்டிருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு தொழிலாளி, தன் குடும்பத்தினரின ஆடைகளுக்காகச் செலவிடும் தொகையைப் பருத்தியின் விலையிலிருந்து பெற முடியாது. ஆகவே, குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்படக்கூடிய எல்லாப் பண்டங்களின் விலைகளின் போக்கைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய வகையில் முக்கியமான சில பண்டங்களடங்கிய கூறு (sample) ஒன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறு பிரதிநிதித்துவக் கூறு (representative sample) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பண்டங்களின் நிறைகளை நிர்ணயித்தல்

குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்காகத் தெரிவு செய்யப்பட்ட பண்டங்களின் விலை விகிதங்களைக் கணக்கிட அவ்விலை விகிதங்களின் தனிச்சராசரி (simple average) மூலம் தனிக்குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கலாம். ஆனால் இத்தகைய குறியீட்டெண்களில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள எல்லாப்பண்டங்களும் சம

முக்கியத்துவமுடையவையாகக் கருதப்படுகின்றன. அதாவது, குறைந்தவிலைப் பொருட்களும், அதிகவிலைப் பொருட்களும் சமமாக நுகரப்படுவதாகக் கருதப்படுவதன் விளைவாக, கிடைக்கப் படுகின்ற குறியீட்டெண் உண்மை நிலையைப் பிரதிபலிக்காது. உதாரணமாக, வாழ்க்கை செலவுக் குறியீட்டெண் கணிப்பில் உணவு, உடை, வீட்டு வாடகை, எரிபொருள், கல்வி, மருத்துவம், பொழுதுபோக்கு, இதர அம்சங்கள் என்று பல பிரிவுகளாக வாழ்க்கைச் செலவினங்கள் பிரிக்கப்படுகின்றன. இச்செலவின் உறுப்புக்கள் யாவும் சமமாக நுகரப்படுவதில்லை. உணவுக்காகச் செலவிடப்படும் தொகையும், சமமாக யிருக்காது. ஆகவே, இவ்வுறுப்புக்களின் விலைவிகிதங்களைக் கணக்கிட்டு அவற்றின் தனிச் சராசரியைக் குறியீட்டெண்ணாகக் கொண்டால் வாழ்க்கைச் செலவின் உண்மை நிலையை அறிந்துகொள்ள முடியாது. பொதுவாக, குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்படுகின்ற பண்டங்கள் யாவும் சமமுக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாகயிருப்பதில்லை. ஆகவே, பண்டங்களின் நுகர்வு விகிதங்களுக்கேற்ப அவைகளுக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படவேண்டியது அவசியமாகும். ஆகவே, பண்டங்களின் முக்கியத்துவங்களுக்கேற்ப அவைகளுக்கு நிறைகளை (weights) வழங்கி, அந்நிறைகளைக்கொண்டு அப்பண்டங்களின் விலைவிகிதங்களின் நிறையிட்ட சராசரியைக் (weighted average) கணக்கிட்டுக் குறியீட்டெண்ணைப் பெறலாம். நிறைகளை எத்தனைத் தசமயிடங்களுக்கும் எடுத்துக் கொள்ளலாமாகையால் அவற்றின் மூலம் பண்டங்களின் முக்கியத்துவங்களைத் துல்லியமாகக் குறிப்பிட இயலும்.

நிறைகளை நிர்ணயித்தல்

குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்காகத் தெரிவு செய்யப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பண்டத்தின் முக்கியத்துவத்தையும் அப்பண்டத்தின் நாணயமாற்று மதிப்பின் (exchange value) மூலம் மதிப்பிடலாம். உதாரணமாக, மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் ஒவ்வொரு பண்டத்தின் விற்பனை அளவையும் (quantity sold) அப்பண்டத்தில் சராசரி விலையால் (average price) பெருக்கிக் கிடைக்கின்ற விற்பனை மதிப்பை அப்பண்டத்தின் நிறையாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, ஒரு பண்டத்தின் விற்பனை அளவு q என்றும், சராசரி விற்பனை விலை p என்றும் கொண்டால், அப்பண்டத்தில் விற்பனை மதிப்பு pq ஆகும். இவ்விற்பனை மதிப்பையே அப்பண்டத்தின் நிறையாகக் கொள்ளலாம். பொதுவாக, குறியீட்டெண்கள் யாவும் பண்டங்களின் நடப்பு

ஆண்டு விலைகளை ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டு விலைகளுடன் ஒப்பிடும் நோக்கத்துடனேயே தயாரிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் பண்டங்களின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றை நிறைகளாகக் கொண்டு கணிக்கப்படுகின்ற நடப்பு ஆண்டு விலை விகிதங்களின் நிறையிட்ட சராசரியைக் குறியீட்டெண்ணாகக் கொள்ளலாம். பல ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களை ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டின் பண்ட மதிப்புக்களை நிலையான நிறைகளாகக் கொண்டும் தயாரிக்கலாம். இவ்வாறு ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டின் பண்ட மதிப்புக்களை நிலையான நிறைகளாகக் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிக்கும் முறைக்கு நிலைத்த நிறையீட்டு முறை (method of fixed weighting) என்று பெயர். குறிப்பாக, அடிப்படை ஆண்டின் பண்ட மதிப்புக்களையே நிலைத்த நிறைகளாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்களுக்கு நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள் (fixed base index numbers) என்று பெயர். நடப்பு ஆண்டின் பண்ட மதிப்புக்களை நிறைகளாகக் கொள்வது மற்றொரு முறையாகும். நடப்பு ஆண்டானது, மாறிக் கொண்டேயிருக்குமாதலால் ஒவ்வொரு ஆண்டுக்குரிய குறியீட்டெண் தயாரிப்பிலும் நிறைகள் மாறுகின்றன. ஆகவே, நடப்பு ஆண்டு நிறைகளைக் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிக்கும் முறைக்கு மாறும் நிறையீட்டு முறை (method of variable weighting) என்று பெயர். ஆனால் பண்டங்களின் உண்மையான மதிப்புக்களையே நிறைகளாகக் கொள்ள வேண்டுமென்பதில்லை. அம்மதிப்புக்களுக்கு விகித சமமான (proportional) எண்களையும் பண்டங்களின் நிறைகளாகக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக அரிசி, கோதுமை, சீனி ஆகிய பண்டங்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டின் மதிப்புக்கள் முறையே ரூ. 40, ரூ. 16, ரூ. 4 என்று கொள்வோம். இப்பண்டங்களின் நிறைகளை முறையே 40, 16, 4 என்றும் கொள்ளலாம்; 10, 4, 1 என்றும் கொள்ளலாம். குறியீட்டெண்ணின் துல்லியத்தன்மை அதில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள பண்டங்களின் நிறைகளையே பெரிதும் சார்ந்திருப்பதால், பண்டங்களின் நிறைகளை மிகவும் கவனமாக நிர்ணயிக்க வேண்டும். குறியீட்டெண் பண்டங்களின் நிறைகள் கீழ்க்காணும் தன்மைகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

(1) பண்டங்களின் நிறைகள் அப்பண்டங்களின் முக்கியத்துவங்களைப் பிரதிபலிப்பவையாக யிருத்தல் வேண்டும்.

(2) பண்டங்களின் நிறைகள் கூட்டலுக்கு ஏற்றவையாயிருத்தல் வேண்டும்.

பண்டங்களின் அடிப்படை ஆண்டு அளவுகளையோ (base year quantities) அல்லது நடப்பு ஆண்டு அளவுகளையோ (current year quantities) அல்லது அடிப்படை ஆண்டு, நடப்பு ஆண்டு அளவுகளின் சராசரிகளையோ நிறைகளாகக்கொள்வது மற்றொரு முறையாகும். இம்முறையைப் பயன்படுத்தி நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (weighted arithmetic average) காண்பதன் மூலம் கீழ்க்கண்ட பல்வேறு குறியீட்டெண் சூத்திரங்கள் கிடைக்கின்றன.

(1) அடிப்படைக்கால அளவுகளை நிறைகளாகக் கொள்ளல்

(லாஸ்பியர் குறியீட்டுச் சூத்திரம்) - Laspsyre's index formula)

குறியீட்டெண்ணின் அடிப்படைக் காலத்தில் நுகரப்பட்ட பண்டங்களின் அளவுகளை (quantities consumed during base period) அடிப்படைக் காலத்திற்கும், நடப்புக் காலத்திற்கும் பொதுவான நிறைகளாகக் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிப்பது ஒரு முறையாகும். P_0, P_1 என்பன முறையே அடிப்படைக் காலத்திலும், நடப்புக் காலத்திலும் அப்பண்டத்தின் விலைகளையும் q_0 என்பது அடிப்படைக் காலத்தில் அப்பண்டத்தின் நுகரப்பட்ட அளவையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொண்டால் p_0q_0 என்பது அப்பண்டத்தின் அடிப்படைக் கால நுகர்வு மதிப்பாகும். $p_1 q_0$ என்பது அதே அளவு பண்டத்தின் நடப்புக்கால மதிப்பாகும், இதே முறையில் எல்லாப் பண்டங்களுக்கும் அடிப்படைக்கால மதிப்புக்களையும் நடப்புக்கால மதிப்புக்களையும் பெறலாம். இவ்வாறு கணிக்கப்பட்ட எல்லாப் பண்டங்களின் அடிப்படைக்கால மொத்த மதிப்பை Σp_0q_8 என்றும், நடப்புக் கால மொத்த மதிப்பை Σp_1q_0 என்றும் குறிப்பிடலாம். நடப்புக் கால மொத்த மதிப்பை அடிப்படைக்கால மொத்த மதிப்பால் வகுத்து அதைச் சதவீதமாக்கி நடப்புக்காலக் குறியீட்டெண்ணைப் பெறலாம், பொதுவாக, நடப்புக்காலக் குறியீட்டெண் P_{01} என்று குறிக்கப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே,} \quad P_{01} = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$$

என்ற குறியீட்டுச் சூத்திரம் கிடைக்கிறது. இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கு "லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண்" (Laspeyre's index number) என்று பெயர். பண்டங்களின் அடிப்படைக்கால விலைக்கும், நடப்புக்கால விலைக்கும் எவ்வளவு ஏற்ற, இறக்கம் இருந்த

போதிலும், அடிப்படைக்காலத்தில் நுகர்வு செய்யப்பட்ட அளவுகளிலேயே நடப்புக்காலத்திலும் பண்டங்கள் நுகர்வு செய்யப்படும் என்ற தற்கோளின் அடிப்படையிலேயே இச் சூத்திரம் அமைந்துள்ளது. ஆனால் உண்மையில் விலை குறைந்த பண்டங்களில் நுகர்வு அளவுகள் அதிகமாகவும், விலை கூடிய பண்டங்களின் நுகர்வு அளவுகள் குறைவாகவும் இருக்கும். ஆகவே, லாஸ்பியரின் குறியீட்டுச் சூத்திரத்தின் விலை கூடிய பண்டங்களுக்கு அதிக முக்கியத்துவமும், விலை குறைந்த பண்டங்களுக்குக் குறைந்த முக்கியத்துவமும் கொடுக்கப்படுகின்றன. எனவே, லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண்கள் ஏறும் ஒரு தலைச் சார்பு (upward bias) கொண்டவையாக யிருக்கின்றன. ஆனாலும், லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் பண்டங்களின் அடிப்படைக்கால மொத்த நுகர்வு மதிப்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கிடப்படுவதால் பல்வேறு காலத்திய குறியீட்டெண்களை ஒப்பிட்டறிய லாஸ்பியரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

(2) நடப்புக்கால அளவுகளை நிறைகளாகக் கொள்ளல்

(பாச்சியின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் - Passche's index formula)

நடப்புக்காலத்தில் நுகரப்படும் பண்டங்களின் அளவுகளை அடிப்படைக் காலத்திற்கும், நடப்புக்காலத்திற்கும் பொதுவான நிறைகளாகக் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிப்பது மற்றொரு முறையாகும். p_0, p_1 என்பன ஒரு பண்டத்தின் அடிப்படைக் கால, நடப்பு விலைகளையும், q, என்பது நடப்புக் காலத்தில் நுகரப்படும் அப்பண்டத்தின் அளவையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். எனவே, p_1q_1 என்பது அப்பண்டத்தின் நடப்புக் கால நுகர்வு மதிப்பையும், p_0q_1 என்பது அதே அளவு பண்டத்தின் அடிப்படைக்கால மதிப்பையும் குறிப்பிடுகின்றன. இதே முறையில் எல்லாப் பண்டங்களின் நடப்புக்கால, அடிப்படைக் கால மதிப்புக்களையும் கணக்கிட்டு, எல்லாப் பண்டங்களின் நடப்புக்கால, அடிப்படைக்கால மொத்த மதிப்பு Σp_1q_1-ஐயும் அடிப்படைக்கால மொத்த மதிப்பு Σp_0q_1-ஐயும் கணிக்க வேண்டும். நடப்புக்கால மொத்த மதிப்பை அடிப்படைக்கால மொத்த மதிப்பின் விகித மாற்றி நடப்புக்காலக் குறியீட்டெண்ணைப் பெறலாம்.

ஆகவே, $$P_{01} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}$$

என்று குறியீட்டுச் சூத்திரம் கிடைக்கிறது. இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கு

" பாச்சியன் குறியீட்டெண் " (Paasche's index numbers) என்று பெயர். இச்சூத்திரத்தில் நடப்புக்கால அளவுகள் நிறைகளாகப் பயன்படுத்தப்படுவதால் குறியீட்டெண் தயாரிக்கப் படுகின்ற ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் புதிய புதிய நிறைகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியிருக்கிறது. சில சந்தர்ப்பங்களில் நடப்புக் காலத்தின் நுகர்வு அளவுகளைப் பெறுவது மிகவும் சிரமமானதாகயிருக்கலாம். ஆகவே, இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, தொடர்ந்து பல ஆண்டுகளுக்குரிய குறியீட்டெண்களைக் கணிப்பது மிகவும் சிரமமாக யிருக்கும். மேலும் இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பெறப்படுகின்ற பல்வேறு ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களில் வேறுபட்ட அளவுகள் நிறைகளாகப் பயன்படுத்தப்படுவதால், இக்குறியீட்டெண் களை ஒன்றோடொன்று ஒப்பிட முடியாது. மேலும், இச்சூத்திரத்தில் நடப்புக்கால நிறைகளே அடிப்படைக்கால நிறைகளாகக் கொள்ளப்படுகின்றன. நடப்புக்கால விலையைவிட அடிப்படைக்கால விலை குறைவாக யிருந்தால் அடிப்படைக் காலத்தில் பண்டத்தின் நுகர்வு அளவு கூடுதலாகவும், அடிப்படைக்கால விலை அதிகமாக யிருந்தால் அடிப்படைக் காலத்தில் பண்டத்தின் நுகர்வு அளவு குறைவாகவும் இருந்திருக்கக் கூடும். எனவே, நடப்புக்கால நுகர்வு அளவுகளையே அடிப் படைக்கால நுகர்வு அளவுகளாகக் கொள்வதன் மூலம் அடிப் படைக்கால நுகர்வுப் பண்டங்களுள் அதிக விலைப் பண்டங் களுக்கு குறைந்த முக்கியத்துவமும் அளிக்கப்படுகின்றன. இதன் காரணமாக, அடிப்படைக் காலத்தில் பண்டங்களின் மொத்த நுகர்வு மதிப்பு ($\Sigma p_0 q_1$) அடிப்படைக் காலத்தில் உண்மையான மொத்த நுகர்வு மதிப்பை விடவும் அதிகமாகிறது. அதாவது, பாச்சியன் குறியீட்டுச் சூத்திரத்தில் பகுதியின் மதிப்பு உண்மையான மதிப்பைவிட அதிகப்படுத்தப்படுவதால், இச்சூத்திரத்தின் மூலம் கிடைக்கப்படும் குறியீட்டெண் உண்மையான குறியீட்டெண்ணைவிடக் குறைவான மதிப்பையே தருகிறது. ஆகவே பாச்சியன் குறியீட்டெண்கள் இறங்கும் ஒரு தலைச் சார்பு (downward bias) கொண்டவையாக யிருக்கின்றன. லாஸ்பியரின் குறியீட்டிலுள்ள ஏறும் ஒருதலைச் சார்பும், பாச்சியின் குறியீட்டிலுள்ள இறங்கும் ஒரு தலைச் சார்பும் நிறையின் காரணமாக ஏற்படுவதால் அவை நின்ற ஒரு தலைச்சார்புகள் (weight biases) எனப்படுகின்றன.

(3) ஃபிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் (Fisher's index formula)

லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் ஏறும் ஒரு தலைப்பட்சமுடையதாகவும், பாச்சியன் குறியீட்டெண் இறங்கும் ஒரு தலைப்பட்ச

முடையதாகவுமிருப்பதால், உண்மையான குறியீட்டெண்ணின் மதிப்பு மேற்கூறப்பட்ட இரண்டு குறியீட்டெண்களின் மதிப்புக் களுக்குமிடையே யிருக்க வேண்டுமென்று பேராசிரியர் இர்விங் பிஷர் கருதினர். அதாவது, உண்மையான குறியீட்டெண் லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண், பாச்சியின் குறியீட்டெண் ஆகிய வற்றின் சராசரியாயிருக்குமென்று அவர் கருதினர். கூட்டுச் சராசரியானது (arithmetic mean) மிக உயர்ந்த மதிப்புக்களை யும் மிகத் தாழ்ந்த மதிப்புக்களையும் அளவுக்கதிகமாக நிறை யிடுவதால், அவர் லாஷ்பியரின் குறியீட்டெண், பாச்சியின் குறியீட்டெண் ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியை (geometric mean) உண்மையான குறியீட்டெண்ணுகக் கொண்டார்.

ஆகவே, $$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

என்பது பிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரமாகும். இச்சூத்திரத்தில் அடிப்படைக் காலத்தின் பண்ட நுகர்வு அளவுகளும், நடப்புக் காலத்தின் பண்ட நுகர்வு அளவுகளும் பயன்படுத்தப்படுவதால் தயாரிப்பு முறையில் சிறிது சிரமமேற்படலாம். மேலும் வெவ் வேறு ஆண்டுகளின் விலைவாசி நிலைமைகளை ஃ பிஷரின் குறியீட்டெண்களைக்கொண்டு லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் களைப் போல் அவ்வளவு எளிதில் தெளிவாக ஒப்பிட்டறிய முடியாது. இருப்பினும், ∴ பிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் எவ்வித ஒருதலைச் சார்புமின்றி, உண்மையான குறியீட் டெண்ணைத் தருவதால், இதுவே மிகச்சிறந்த குறியீட்டுச் சூத்திரமாகக் கருதப்படுகிறது.

(4) *மார்ஷல் — எட்ஜ்வொர்க் — இன் குறியீட்டுச் சூத்திரம்* (Marshall — Edgeworth index formula)

லாஸ்பியரின் குறியீட்டுச் சூத்திரத்திலுள்ள ஏறும் ஒரு தலைச் சார்பையும், பாச்சியின் குறியீட்டுச் சூத்திரத்திலுள்ள இறங்கும் ஒருதலைச் சார்பையும், அடிப்படைக்காலத்தின் பண்ட நுகர்வு அளவு q_0, நடப்புக்காலத்தின் பண்ட நுகர்வு அளவு q_1 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரியாகிய $\frac{q_0+q_1}{2}$ ஐ நிறை யாகக் கொள்ளுவதன் மூலமும் நீக்கமுடியும். ஆகவே, நடப் புக்காலத்தின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1\left(\frac{q_0+q_1}{2}\right)}{\Sigma P_1\left(\frac{q_0+q_1}{2}\right)} = \frac{\Sigma P_1 (q_0+q_1)}{\Sigma P_0 (q_0+q_1)} = \frac{\Sigma P_1 q_0 + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0 + \Sigma P_0 q_1}$$

இச்சூத்திரம் "மார்ஷல்-எட்ஸ்வொர்த்"—இன் குறியீட்டுச் சூத்திரம் (Marshall-Edgeworth index formula) என்று அழைக்கப் படுகிறது. இச்சூத்திரம் ஒருதலைச்சார்பாக இல்லாவிடினும், அடிப்படைக்கால, நடப்புக்கால, அளவுகளைக் கொண்டு அமைந்திருப்பதால் இதைக்கணிப்பதும் சிரமமாகவேயிருப்ப தோடு, இதன் மூலம் பெறப்படுகின்ற குறியீட்டெண்களும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப் பயனற்றவையாகயிருக்கின்றன.

(5) நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டுச்சூத்திரம் (Weighted aggregative index formula)

நடப்புக்காலத்தில் நுகரப்படும் பண்டங்களின் அளவுகளை (q_1) நடப்புக் கால நிறைகளாகவும், அடிப்படைக்காலத்தில் நுகரப்பட்ட பண்டங்களின் அளவுகளை (q_0) அடிப்படைக்கால நிறைகளாகவும் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிக்கலாம். இக் குறியீட்டுச் சூத்திரம் $P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$ ஆகும். இது நிறை யிட்ட மொத்தக் குறியீட்டுச் சூத்திரம் என்று அழைக்கப் படுகிறது. இச்சூத்திரத்தின் தொகுதியாகிய $\Sigma P_1 q_1$ நடப்புக் காலத்தில் மொத்த நுகர்வு மதிப்பையும், $\Sigma P_0 q_0$ அடிப்படைக் காலத்தில் மொத்த நுகர்வு மதிப்பையும் குறிப்பிடுவதால் இச் சூத்திரமானது மதிப்பு விகிதம் (value ratio) என்றும் அழைக்கப் படுகிறது.

அலகுகளை நிர்ணயித்தல்

குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்படவேண்டிய பண் டங்களைத் தெரிவு செய்து, நிறைகளை நிர்ணயித்தபின் நடப் புக்கால, அடிப்படைக்கால விலைகளைச் சேகரிக்குமுன் பண் டங்களின் அலகுகளை நிர்ணயித்துக்கொள்ள வேண்டும். இவ் வாறு நிர்ணயிக்கப்பட்ட அலகுகளின் அடிப்படையிலேயே பண்டங்களின் விலைகள் சேகரிக்கப்பட வேண்டும். பண்டங் களின் அலகுகள் அவற்றின் தன்மைகளுக்கேற்ப, டசன் (dozen), குரோஸ் (groos), ராத்தல் (pound), கிலோகிராம் (kilo gram), டன் (ton), லிட்டர் (litre), பட்டணம்படி (Madras measure) என்று எப்படி வேண்டுமானாலுமிருக்கலாம். அடிப்படைக்காலத் திலும், நடப்புக்காலத்திலும் வெவ்வேறு அலகுகள் நடைமுறை

யில் பயன்படுத்தப் பட்டிருக்கலாம். உதாரணமாக 15 ஆண்டு களுக்கு முன்னர் பலம் (Palam), ராத்தல் (pound), வீசை (viss), மணங்கு (Maund), பட்டணம்படி (Madras measure) போன்ற அலகுகள் பழக்கத்திலிருந்தன. இவை மட்டுமன்று; ரூபாய்-அணு-பைசா என்ற நாணய முறைகள் பழக்கத்திலிருந்தன. ஆனால் இன்று இவையாவும் மறைந்து மெட்ரிக் முறைகள் பின் பற்றப்பட்டு வருகின்றன என்றாலும் அடிப்படைக்கால விலை களும் நடப்புக்கால விலைகளும் ஒரே மாதிரியான அலகுகளின் அடிப்படையிலேயே சேகரிக்கப்பட வேண்டும். ஆகவே, விலைகளைச் சேகரிக்கத் தொடங்கு முன்னர், அடிப்படைக்கால அலகுகள், நடப்புக்கால அலகுகள், ஆகியவற்றின் எந்த அலகுகளின் அடிப்படையில் விலைகள் சேகரிக்கப்பட வேண்டு மென்பதை நிர்ணயித்துக்கொள்ள வேண்டும். நடப்புக்கால அலகுகளின் அடிப்படையிலேயே விலைகளைச் சேகரிக்க முடிவு செய்தால், அடிப்படைக்கால விலைகளை அடிப்படைக்கால அலகுகளுக்கே சேகரித்துப் பின்னர் நடப்புக்கால அலகுகளில் மாற்றிக்கொள்ளலாம்.

அடிப்படைக் காலத்தைத் தெரிவு செய்தல்

நடப்புக்கால விலைவாசி நிலைமையை ஏதாவது ஒரு அடிப் படைக்கால விலைவாசி நிலைமையுடன் ஒப்பிடுவதே குறியீட் டெண் தயாரிப்பின் முக்கிய நோக்கமாகும். ஆகவே, அடிப் படைக்காலத்தை நிர்ணயிப்பது மிகவும் முக்கியமான பணி யாகும். அடிப்படைக்காலமானது ஒருவாரமாகவே, ஒரு மாதமாகவோ, ஒரு ஆண்டாகவோ அல்லது பல ஆண்டுகளின் தொகுப்பாகவோயிருக்கலாம். ஆனால் ஒரு வாரம் அல்லது ஒரு மாதம் என்பது எதிர்பாராத விளைவுகளாலும், பருவகால அலைவுகளாலும் பாதிக்கப்படக்கூடிய அளவில் குறுகிய கால மாகயிருப்பதால் அடிப்படைக்காலமாகத் தெரிவு செய்யப் படத்தக்கதன்று. ஒரு ஆண்டுக்காலத்தை அடிப்படைக்கால மாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். ஆனால் அடிப்படைக் காலமாகத் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற ஆண்டு மிகவும் இயல்பானதாக (normal) யிருக்க வேண்டும். மேலும் ஒப்புமைக்கேற்றதாகவு மிருக்க வேண்டும். போர் நடைபெற்ற ஆண்டில் மற்ற ஆண்டுகளைவிட விலைகள் அதிகமாகயிருந்திருக்குமாதலால் அடிப்படைக்காலமாகத் தெரிவு செய்யத் தகுதியற்றதாகி விடுகிறது. இதுபோல், பொருளாதார மந்தத்தால் பாதிக்கப் பட்ட ஒரு ஆண்டில் விலைகள் யாவும் ஏனைய ஆண்டுகளின் விலைகளைவிட மிகவும் குறைவாகயிருக்குமாதலால், இத்தகைய ஆண்டுகளும், அடிப்படைக்காலத்திற்கு ஏற்றதன்று. ஆகவே,

பொருளாதார நிலைத்தன்மை பெற்ற ஒரு ஆண்டையே அடிப் படைக்காலமாகக் கொள்ள வேண்டும். அடிப்படைக் கால மானது நடப்புக்காலத்தை நெருங்கியதாகயிருந்தால், தெரிவு செய்யப்பட்ட பண்டங்களின் விலை விகிதங்களின் பரவல் இயல் நிலைப்பரவலின் (normal distribution) தன்மைகளையொட்டியிருப் பதைக் காணலாம். ஆகவே, இவ்விலைவிகிதங்களின் பரவலின் திட்ட விலக்கம் மிகக்குறைவாகயிருக்கும். எனவே, அப் பண்டங்களின் விலைவாசிகளில் காணப்படுகின்ற அசைவுகளின் சராசரி அசைவானது எல்லாப் பண்டங்களின் விலைகளின் மொத்த அசைவைப் பிரதிபலிப்பதாகும். அதாவது அடிப்படைக் காலமானது நடப்புக் காலத்தை எவ்வளவு அருகில் நெருங்கி யிருக்கிறதோ அதற்கேற்ப பண்டங்களின் விலை விகிதப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் மிகக் குறைவாகயிருப்பதோடு, விலை விகிதங்களின் சராசரி எல்லாப்பண்டங்களின் மொத்த விலை விகிதத்தைத் துல்லியமாகப் பிரதிபலிப்பதாகயிருக்கும். இதற்கு மாறாக, அடிப்படைக்காலம் நடப்புக்காலத்தினின்றும் வெகு தூரத்திலிருந்தால், விலை விகிதத்தைப் பிரதிபலிப்பதாகவுமிருக் காது. ஆகவே, நடப்புக்காலத்தை மிக நெருங்கியிருக்குமாறு அடிப்படைக்காலத்தைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

தொடர்ச்சியாகப் பல ஆண்டுகட்கும் குறியீட்டெண்கள் கணக்கிடப்பட்டால் அவ்வப்போது அடிப்படை ஆண்டை நெருங்கியிருக்குமாறு மாற்றிக் கொள்வது நல்லது. இத்தகைய அடிப்படைக்கால மாற்றம் 10 முதல் 16 ஆண்டுகட்கு ஒரு முறை செய்யப்பட வேண்டும். அப்போதுதான் விலைவிகிதங் களின் சராசரியானது மொத்தப் பண்டங்களின் விலையிலேற் படும் மாற்றத்தைப் பிரதி பலிப்பதாகயிருக்கும். மேலும், அடிப் படைக் காலத்திற்கும் நடபுக்காலத்திற்குமிடையே இடைவெளி அதிகமாகயிருந்தால் சமூக, பொருளாதார, அரசியல் மாறுதல் களின் காரணமாகவும், மக்கட் பெருக்கம், தொழில் நுட்ப வளர்ச்சி, நாகரிக வளர்ச்சி, நாணய மதிப்புக் குறைவு, மக்களின் பழக்க வழக்கங்கள், சுவை ஆகியவற்றிலேற்படும் மாறுதல் கள் ஆகியவற்றின் காரணமாகவும் நடப்பு ஆண்டில் நுகரப்படும் பண்டங்கள் அடிப்படை ஆண்டில் நுகரப்பட்ட பண்டங் களினின்றும் பெரிதும் மாறுபட்டுவிடவும் கூடும். நடப்பு ஆண்டிலும், அடிப்படை ஆண்டிலும் பொதுவான நுகர்வுப் பண்டங்களில்லாவிடில் விலைவிகிதங்களைக் கணக்கிட முடி யாது. இதன்காரணமாகவும் அடிப்படைக்காலம் நடப்புக் காலத்தை நெருங்கியிருக்கவேண்டியதன் அவசியத்தை உணர்ந்து கொள்ளலாம்.

பண்டங்களின் விலைகளைச் சேகரித்தல்

சந்தைக்குச் சந்தை பண்டங்களின் விலைகள் வித்தியாசப் படலாம். இதுபோல் ஊருக்கு ஊர், இடத்துக்கு இடம் பண்டங்களின் விலைகள் வித்தியாசப்படுவதுண்டு. ஆகவே, பல நகரங்கள், சிற்றூர்களடங்கிய கூறுகளைத் தெரிவு செய்து, ஒவ்வொரு ஊரிலும், நகரத்திலும் நம்பகமான கடைகளிலிருந்து விலைகளைக் கேட்டுப் பெறவேண்டும். சில்லறை விலைகளைக் கூட்டுறவு அங்காடிகளிலிருந்தும், தனியார் பண்டக சாலைகளிலிருந்தும், கடைகளிலிருந்தும் பெறலாம். இவ்வாறு பெறப்படுகின்ற விலைகளின் சராசரியை அப்பண்டத்தின் விலையாகக் கொள்ள வேண்டும். தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைச் செலவு பற்றிய குறியீட்டெண் தயாரிப்பில், தொழிலாளர்களுக்குப் பண்டங்கள் எந்த விலைகளில் எளிதாகக் கிடைக்கிறதோ அந்த விலைகளை அப்பண்டங்களின் விலைகளாகக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட மாதத்தில் ஒரு பண்டத்தின் விலையைப் பெற வேண்டுமாயின் அம்மாதத்தின் முதல் நாள் விலையை ஏற்றுக்கொள்வதா அல்லது, மாதத்தின் 15ஆம் நாள் விலையை ஏற்றுக்கொள்வதா அல்லது மாத இறுதி நாள் விலையை ஏற்றுக்கொள்வதா அல்லது மாதத்தின் எல்லா நாட்களின் விலைகளையும் சேகரிந்து அவற்றின் சராசரியை ஏற்றுக் கொள்வதா என்பதை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். இதுபோன்று, திரைப்படம், நாடகம் போன்ற பொழுது போக்குச் செலவுகள், கல்வி, மருத்துவம், போக்குவரத்து போன்ற பணிகளுக்கான செலவுகளையும் எந்த அடிப்படைகளில் சேகரிக்க வேண்டுமென்பதை முன்னதாகவே வரையறுந்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பொருத்தமான சராசரியைத் தெரிவு செய்தல்

குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள பண்டங்களின் நிறையிட்ட விலை விகிதங்களின் சராசரியே குறியீட்டெண்ணாகும். ஆகவே, குறியீட்டெண் கணிப்பில் பயன்படுத்த வேண்டிய சராசரியைத் தெரிவு செய்தல் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் முக்கிய பணியாகக் கருதப்படுகிறது. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகிய சராசரிகளுள் பொருத்தமான சராசரியை மிகவும் கவனமாகத் தெரிவு செய்யவேண்டும்.

நிறையிட்ட விலை விகிதங்களின் இடைநிலையளவு, முகட்டளவு ஆகியவற்றை எளிதில் கணக்கிட முடிந்த

போதிலும் அவற்றின் மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்கள் விலைவாசி அசைவின் உண்மை நிலையைக் காட்டுவதாக அமையாதாகையால் நடைமுறையில் இடைநிலையளவும், முகட்டளவும் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தொடரின் கூட்டுச் சராசரியானது பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகமாகவும், பெருக்குச் சராசரியானது இசைச் சராசரியைவிட அதிகமாகவுமிருக்குமென்பதை நாம் அறிவோம் பெரும்பாலும். குறியீட்டெண்ணின் நோக்கத்திற்கேற்ப சராசரிகளின் மேற்கூறப்பட்ட தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டு பொருத்தமான சராசரி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் திருப்திப்படுத்த வேண்டிய சோதனைகளுள் கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையும் (Time-reversal test) ஒன்று. (இவ்வத்தியாயத்தின் இறுதியில் காண்க). இச்சோதனையின்படி, அடிப்படைக்காலத்தை அடிப்படையாகக்கொண்ட நடப்புக்காலக் குறியீட்டெண்ணையும், நடப்புக் காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட அடிப்படைக்காலக் குறியீட்டெண்ணையும் பெருக்கினால் 1 கிடைக்க வேண்டும்.

இச்சோதனை ஒரேயொரு பண்டத்திற்குப் பொருந்துவதாக உள்ளது. ஏனெனில்,

$$\text{நடப்புக்காலக் குறியீடு} = \frac{p_1}{p_0}$$

$$\text{அடிப்படைக்கால குறியீடு} = \frac{p_0}{d_1}$$

ஆகவே, நடப்புக்காலக் குறியீடு ×

$$\text{அடிப்படைக்காலக் குறியீடு} = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{p_0}{p_1} = 1$$

ஆனால், நிறையிட்ட விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றின் மூலம் கணிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்கள் இச்சோதனையைத் திருப்தி செய்வதில்லை. ஆகவே, இவ்விருவகைக் குறியீட்டெண்களும் சராசரி ஒரு தலைச்சார்பு (type bias) கொண்டவையெனக் கூறப்படுகின்றன. பெருக்குச் சராசரியைவிடக் கூட்டுச் சராசரி அதிகமாகயிருப்பதால், கூட்டுச் சராசரி மூலம் கணிக்கப்படுகின்ற குறியீட்

டெண்கள் ஏறும் ஒருதலைச் சார்பு கொண்டவையெனவும், இது போன்று இசைச் சராசரி மூலம் கணிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்கள் இறங்கும் ஒருதலைச் சார்பு கொண்டவையெனவும் கூறப்படுகின்றன. உண்மையான குறியீட்டெண் எவ்வித ஒரு தலைச்சார்புமின்றியிருக்க வேண்டுமாகையால் கூட்டுச் சராசரி முறைக்கும், இசைச் சராசரி முறைக்கும் இடைப்பட்ட ஒரு முறையில் உண்மையான குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்க வேண்டும். ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கும் இசை சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கும் இடைமதிப்பாகவே உண்மையான குறியீட்டெண்ணிருக்குமென்று தெரிகிறது. இவ்விடை மதிப்பை, கூட்டுச் சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண், இசை சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண் ஆகிய வற்றின் கூட்டுச் சராசரி மூலமாகவோ, பெருக்குச் சராசரி மூலமாகவோ காணலாம். கூட்டுச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவற்றின் மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்களின் ஏறும் ஒரு தலைச்சார்பும், இறங்கும் ஒரு தலைச்சார்பும் ஏறத்தாழ சமமான அளவில் ஆனால் எதிர் அடையாளங்களுடனிருந்தால் அவ்விரு குறியீட்டெண்களின் கூட்டுச் சராசரி மூலம் உண்மை யான குறியீட்டெண்ணைக் காணலாம். ஆனால், ஏறும் ஒரு தலைச்சார்பு வீதமும், இறங்கும் ஒருதலைச் சார்பு வீதமும் சம அளவில் எதிர் அடையாளங்களுடனிருந்தால் அவ்விரு குறியீட் டெண்களின் பெருக்குச் சராசரி மூலம் உண்மையான குறியீட் டெண்ணைக் காணலாம்.

பொதுவாக, நிறையிட்ட விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணின் ஏறும் ஒருதலைச் சார்பு வீதமும், இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணின் இறங்கும் ஒருதலைச் சார்பு வீதமும் தோராயமாகச் சமமாகவும் எதிரடையாளங் களுடனுமிருப்பதால், அவ்விரு குறியீட்டெண்களின் பெருக்குச் சராசரியே பொருத்தமானதாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. ஆனால், நிறையிட்ட விலை விகிதங்களின் தனிக் கூட்டுச் சராசரி, இசைச்சராசரி ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரி யானது அவ்விலை விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரிக்குச் சம மாகும். ஆகவே, பெருக்குச் சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்ணிலிருந்து சராசரி ஒருதலைச் சார்பு நீக்கப்பட்டு விடுகிறது. ஆயினும் அக்குறியீட்டெண்ணில் நிறை ஒருதலைச் சார்பு இருப்பதைக் காணலாம். ஆனால் கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண், இசைச்சராசரிக் குறியீட்டெண் ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி மூலம் கிடைக்கின்ற குறியீட்டெண்ணில் நிறை

ஒருதலைச் சார்புடன் சராசரி ஒருதலைச் சார்புமிருக்குமாகையால் குறியீட்டெண் கணிப்புக்குப் பெருக்குச் சராசரியே சிறந்ததாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. ஆனாலும் பெருக்குச் சராசரியின் கணக்கீட்டிலுள்ள சிரமங்களின் காரணமாகவும், கூட்டுச் சராசரியை எளிதாகக் கணக்கிட முடியுமென்ற காரணத்தாலும் நடைமுறையில் கூட்டுச் சராசரியே குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பெரும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

குறியீட்டெண் கணிப்பு முறையை நிர்ணயித்தல்

மேலே கூறப்பட்ட பணிகள் யாவும் மிகவும் கவனமாகச் செய்து முடிக்கப்பட்டபின், கீழ்க்காணும் குறியீட்டுக் கணிப்பு முறைகளுள் ஒன்றைத் தெரிவு செய்து, அதன் மூலம் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட வேண்டும்.

1. தனிக் குறியீட்டெண்கள் (Simple index numbers)

2. நிறையிட்ட குறியீட்டெண்கள் (Weighted index numbers)

தனிக்குறியீட்டெண் கணிப்பு முறைகள்

1. நிறையிடப்படாத மொத்த மதிப்பின் விகிதம்.

2. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி.

3. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரி.

4. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் இசைச் சராசரி.

நிறையிட்ட குறியீட்டெண் கணிப்பு முறைகள்

1. நிறையிட்ட மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதம்

2. நிறையிட்ட சதவீத விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி

3. நிறையிட்ட சதவீத விலை விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரி

4. லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண்

5. பாச்சியின் குறியீட்டெண்

6. ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்

7. மார்ஷல் - எட்ஜ் வொர்த் - இன் குறியீட்டெண்

8. நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்

தனிக் குறியீட்டெண்கள் (Simple index numbers)

1. நிறையிடப்படாத மொத்த விலைகளின் விகிதம் (Ratio of unweighted totals of prices)

நடப்பு ஆண்டில் எல்லாப் பண்டங்களின் ஒரு அலகு விலைகளைக் கூட்டிக் கிடைக்கின்ற நடப்பு ஆண்டு மொத்த மதிப்பை அடிப்படை ஆண்டில் எல்லாப் பண்டங்களின் ஒரு அலகு விலைகளைக் கூட்டிக் கிடைக்கின்ற அடிப்படை ஆண்டு மொத்த மதிப்பால் வகுத்து 100ஆல் பெருக்கிக் குறியீட்டெண்ணைப் பெறலாம்.

பின்வரும் மாதிரிக் கணக்கைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

பண்டம்	அலகு	1960 விலை ரூபாய்	1970 விலை ரூபாய்
அரிசி	கிலோ	1-00	2 50
உளுந்து	,,	0-75	2-80
பருப்பு	,,	0-80	2-75
சீனி	,,	1-20	2-85
எண்ணெய்	லிட்டர்	2-25	6-25
காய்கறி	கிலோ	0-50	1-05
மொத்தம்		6-50	18-20

1970 இன் தனி குறியீட்டெண்

$$= \frac{1970 \text{ இன் மொத்த மதிப்பு}}{1960 \text{ இன் மொத்த மதிப்பு}} \times 100$$

$$= \frac{18.20}{6.50} \times 100$$

$$= 280$$

2. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி.

(Arithmetic mean of unweighted percentage price relatives)

பண்டம்	1960 விலை ரூபாய் P_0	1970 விலை ரூபாய் P_1	சதவீத விலை விகிதம் $I = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) 100$
அரிசி	1.00	2.50	250.00
உளுந்து	0.75	2.80	373.33
பருப்பு	0.80	2.75	343.75
சீனி	1.20	2.85	237.50
எண்ணெய்	2.25	6.25	277.78
காய்கறி	0.50	1.05	210.00
			1692.36

N = பண்டங்களின் எண்ணிக்கை = 6

சதவீத விலை விகிதங்களின் மொத்தம் = 1692.36

$$\text{தனிக் குறியீட்டெண்} = \frac{\text{சதவீத விலை விகிதங்களின் மொத்தம்}}{\text{பண்டங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1692.36}{6}$$

$$= 282.06$$

3. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரி

(Geometric mean of unweighted percentage price relatives)

பண்டம்	1960 விலை P_0	1970 விலை P_1	சதவீத விலை விகிதம் $I = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) 100$	சதவீத விலை விகிதங்களின் மடக்கை $\log I$
அரிசி	1.00	2.50	250.00	2.39794
உளுந்து	0.75	2.80	373.33	2.57206
பருப்பு	0.80	2.75	343.75	2.53630
சீனி	1.20	2.85	237.50	2.37568
எண்ணெய்	2.25	6.25	277,78	2.44390
காய்கறி	0.50	1.05	210.00	2.32222
			மொத்தம்	14.64810

தனிக் குறியீட்டெண்ணின் மடக்கை

$$= \frac{\text{மடக்கைகளின் மொத்தம்}}{\text{பண்டங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{14.64810}{6}$$

$$= 2.44135$$

ஆகவே தனிக் குறியீட்டெண் = எதிர் மடக்கை (2.44135)

$$= 276.32$$

4. நிறையிடப்படாத சதவீத விலை விகிதங்களின் இசைச் சராசரி.

(Harmonic mean of unweighted percentage price relatives)

பண்டம்	1960 விலை P_0	1970 விலை P_1	$\frac{1}{P_1 / P_0}$	$= \frac{P_0}{P_1}$
அரிசி	1.00	2.50	1.00/2.50	0.4000
உளுந்து	0.75	2.80	0.75/2.80	0.2679
பருப்பு	0.80	2.75	0.80/2.75	0.2909
சீனி	1.20	2.85	1.20/2.85	0.4210
எண்ணெய்	2.25	6.25	2.25/6.25	0.3600
காய்கறி	0.50	1.05	0.50/1.05	0.4762
			மொத்தம்	2.2160

$$\text{இசைச் சராசரியின் தலைகீழ் விகிதம்} = \frac{2.2160}{6}$$

$$\text{இசைச் சராசரி} = \frac{6}{2.2160} = 2.707$$

$$\text{தனிக் குறியீட்டெண்} = 2.707 \times 100 = 270.7$$

குறிப்பு. மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி இசைச் சராசரி ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் கணிக்கப்பட்ட தனிக் குறியீட்டெண்கள் முறையே 282.06, 276.32, 270.7 என்று காணலாம். அதாவது கூட்டுச் சராசரி குறியீட்டெண் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணைவிட அதிகமாகவும், பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண் இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணைவிட அதிகமாகவுமிருப்பதைக் காணலாம்.

நிறையிட்ட குறியீட்டெண்கள் (Weighted index number)

(1) நிறையிட்ட மொத்த மதிப்புக்களின் விகிதம் (Ratio of weighted total values)

மாதிரி: 127

பின்வரும் பட்டியல் விவரங்களைக் கொண்டு நிறையிட்ட மொத்த மதிப்புக்களின் விகித முறையில் நிறையிட்ட குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

பண்டம்	அலகு	1960 விலை ரூபாய்	1970 விலை ரூபாய்	நிறை
அரிசி	படி	1-00	2-50	24
உளுந்து	லிட்டர்	0-75	2-80	8
பருப்பு	,,	0-80	2-75	6
சீனி	கிலோ	1-20	2-85	5
எண்ணெய்	லிட்டர்	2-25	6-25	4
காய்கறி	கிலோ	50-0	1-05	10

தீர்வு

குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்கான கணக்கீடுகள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பண்டம்	நிறை q	1960 விலை P_0	1970 விலை P_1	1960 இல் மதிப்பு $P_0 q$	1970 இல் மதிப்பு $P_1 q$
அரிசி	24	1-00	2-50	24-00	60-00
உளுந்து	8	0-75	2-80	6-00	22-00
பருப்பு	6	0-80	2-75	4-80	16-50
சீனி	5	1-20	2-85	6-00	14-25
எண்ணெய்	4	2-25	6-25	9-00	25-00
காய்கறி	10	0-50	1-05	5-00	10-50
			மொத்தம்	54-80	148-65

$$\text{நிறையிட்ட குறியீட்டெண்} = \frac{\text{1970இன் மொத்த மதிப்பு}}{\text{1960இன் மொத்த மதிப்பு}} \times 100$$

$$= \frac{148.65}{54.80} \times 100$$

$$= 271.2$$

(2) நிறையிட்ட சதவீத விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி
(A. M. of weighted percentage price relatives)

மாதிரி ; 128

மாதிரி 127இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு நிறையிட்ட சதவீத விலை விகிதங்களின் கூட்டுச் சராசரி முறையில் நிறையிட்ட குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

தீர்வு

பண்டம்	நிறை W	1960 விலை p_0	1970 விலை p_1	சதவீதவிலை விகிதம் $(I = \frac{p_1}{p_0} \times 100)$	நிறையிட்ட சதவீத விலைவிகிதம் IW
அரிசி	24	1-00	2-50	250-00	6000-00
உளுந்து	8	0-75	2-80	373-33	2986-64
பருப்பு	6	0-80	2-75	343-75	2062-50
சீனி	5	1-20	2-85	237-50	1187-50
எண்ணெய்	4	2-25	6-25	277-78	1111-12
காய்கறி	10	0-50	1-05	210-00	2100-00
மொத்தம்	57				15447-76

நிறையிட்ட குறியீட்டெண்

$$= \frac{\text{நிறையிட்ட சதவீதவிலை விகித மொத்தம்}}{\text{நிறைகளின் மொத்தம்}}$$

$$= \frac{15447 \cdot 76}{57} = 271 \cdot 01$$

=

நிறையிட்ட சதவீத விலைவிகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரி
(G. M. of weighted percentage price relatives)

மாதிரி : 129

மாதிரி 127இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு நிறையிட்ட சதவீத விலை விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரி முறையில் நிறையிட்ட குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

தீர்வு :

பண்டம்	நிறை W	1960 விலை p_0	1970 விலை p_1	சதவீத விலை விகிதம் I	log I	W log I
அரிசி	24	1-00	2-50	250·00	2·3979	57·5496
உளுந்து	8	0-75	2-80	373·33	2·5721	20·5768
பருப்பு	6	0-80	2-75	343·75	2·5363	15 2178
சீனி	5	1-20	2-85	237·50	2·3757	11·8785
எண்ணெய்	4	2·25	6-25	277·78	2·4439	9·7756
காய்கறி	10	0-50	1-05	210·10	2·3222	23·2220
மொத்தம்	57					138·2208

நிறையிட்ட குறியீட்டெண்ணின் மடக்கை $= \dfrac{\Sigma W\ log}{\Sigma W}$

$= \dfrac{138\cdot2208}{57}$

$= 2\cdot4249$

ஆகவே, நிறையிட்ட குறியீட்டெண் எதிர்மடக்கை (2·4249)

$= 259\cdot96$

மாதிரி : 130

கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் கொண்டு 1939ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1953ஆம் ஆண்டின் பல்வேறு குறியீட்டெண்களையும் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	அ		ஆ		இ		ஈ	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1939	4	1	1	10	20	2	10	5
1953	10	2	4	25	90	3	15	20

(பண்டங்கள்)

(சென்னை பி. ஏ. (ஆனர்சு) 1956

தீர்வு :

பண்டம்	1939 p_0	1939 q_0	1953 p_1	1953 q_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	p_1q_0
அ	4	1	10	2	4	20	8	10
ஆ	1	10	4	25	10	100	25	40
இ	20	2	90	3	40	270	60	180
ஈ	10	5	15	20	50	300	200	75
மொத்தம்					104	690	293	305

(1) லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{305}{104} \times 100 = 293{\cdot}3$$

(2) பாச்சியின் குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

$$= \frac{690}{293} \times 100 = 235 \cdot 5$$

(3) ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்

$= \sqrt{\text{லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் X பாச்சியின் குறியீட்டெண்}}$

$= 293 \cdot 3 \text{ X } 235 \cdot 5$

$= 262 \cdot 8$

அல்லது

பிஷரின் குறியீட்டெண் $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{305}{104} \cdot \frac{690}{293}} \times 100$$

$$= 262 \cdot 8$$

(4) மார்ஷல் - எட்ஜ்வொர்த் - இன் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_8 q_1} \times 100$$

$$= \frac{805 + 690}{104 + 293} \times 100$$

$$= \frac{995}{397} \times 100 = 250 \cdot 6$$

(5) நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma p_1 q_2}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{690}{104} \times 100$$

$$= 663 \cdot 4$$

மாதிரி : 131

கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு குறியீட்டெண் தயாரிக்கவும்.

உறுப்பு எண்	ஒரு அலகு அளவின் விலை		அளவுகள் — அலகுகளின் எண்ணிக்கை	
	1960	1965	1960	1365
	ரூ. பை.	ரூ. பை.		
1	9-20	15-00	5	5
2	8-00	12-00	10	11
3	4-00	5-00	6	6
4	1-00	1-25	4	8

(பி.காம். சென்னை 1967 செப்., மதுரை 1969 செப்.)

தீர்வு :

	1960		1965					
	P_0	q_0	P_1	q_1	$P_0 q_0$	$P_1 q_1$	$P_0 q_1$	$P_1 q_0$
1	9.20	5	15.00	5	46	75	46	75
2	8.00	10	12.00	11	80	132	88	120
3	4.00	6	5.00	6	24	30	24	30
4	1.00	4	1.25	8	8	10	8	5
	மொத்தம்				154	247	166	230

(1) லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{230}{154} \times 100 = 149.4$$

(2) பாச்சியின் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times 100$

$$= \frac{247}{166} \times 100 = 148.8$$

(3) பிஷரின் குறியீட்டெண்

$= \sqrt{\text{லாஸ்பியரின் குறியீடு} \times \text{பாச்சியின் குறியீடு}}$

$= \sqrt{149.4 \times 148.8} = 149.0$

(4) மார்ஷல்—எட்ஜ்வொர்த்- இன் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma P_1 q_0 + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0 + \Sigma P_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{230 + 247}{154 + 166} \times 100$$

$$= \frac{477}{320} \times 100 = 149.0$$

(5) நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{247}{154} \times 100 = 160.4$$

குறிப்பு. மேற்கண்ட ஐந்து வகைக் குறியீட்டெண்களுள்
ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்ணே மிகவும் சிறந்ததாகும். (இதன்
காரணங்கள் பின்னால் விளக்கப்பட்டுள்ளன). ஆகவே, எதா
வது ஒரு குறியீட்டெண் மட்டும் கணக்கிட வேண்டுமாயின்
ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்ணையே கணக்கிடவேண்டுமென்ப
தைக் கருத்திற் கொள்க.

மாதிரி : 132

மார்ஷல்—எட்ஜ்வொர்த் முறைப்படி தானிய மதிப்புகளின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பயிர்	உற்பத்தி (1000 டன்களில்)		டன்னுக்கு விலை (ரூபாயில்)	
	1941-42	1951-52	1941-42	1951-52
அரிசி	4000	5010	102	154
சோளம்	1200	1230	60	90
வரகு	650	700	70	80

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

பயிர்	P_0	q_0	P_1	q_1	$P_0 q_0$	$P_1 q_1$	$P_0 q_1$	$P_1 q_0$
அரிசி	102	4000	154	5010	408000	771540	510020	616000
சோளம்	60	1200	90	1230	73000	110700	73800	108000
வரகு	70	650	80	709	45500	56000	4900	52000
மொத்தம்					525500	938240	588720	776000

மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் — இன் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma P_1 q_0 + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0 + \Sigma P_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{776000 + 938240}{525500 + 588720} \times 100$$

$$= \frac{1714240}{1114220} \times 100$$

$$= 153.85$$

மாதிரி : 133

கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் கொண்டு ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பண்டம்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அ	6	50	10	56
ஆ	2	100	2	120
இ	4	60	6	60
ஈ	10	30	12	24
உ	8	40	12	36

(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்.)

தீர்வு

பண்டம்	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_1q_1	P_0q_1	P_1q_0
அ	6	50	10	56	300	560	336	500
ஆ	2	100	2	120	200	240	240	200
இ	4	60	6	60	240	360	240	360
ஈ	10	30	12	24	300	288	240	360
உ	8	40	12	36	320	432	288	480
				மொத்தம்	1360	1880	1344	1900

ஃபிஷரின் குறியீட்டெண் $= \sqrt{\dfrac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \cdot \dfrac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\dfrac{1900}{1360} \cdot \dfrac{1880}{1344}} \times 100$

$= 189.8.$

நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களும், தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களும்.
(Fixed base index numbers and chain base index numbers)

ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டைப் பொதுவான அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்களுக்கு நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள் (Fixed base index numbers) என்று பெயர். இத்தகைய குறியீட்டெண்களைக் கொண்டு விலைவாசிகளின் ஏற்றவிறக்கங்களை நேரடியாக ஒப்பிட்டு அறிய முடியும். உதாரணமாக, 1949-ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1969–70, 1970–71 ஆகிய ஆண்டுகளில் இந்தியாவின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் முறையே 212, 215 ஆகும், இவ்விரு குறியீட்டெண்களும் ஒரே அடிப்படையில் கணிக்கப்பட்டுள்ளனவாகையால் 1970–71ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவு, 1969–70ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவைவிட 1949ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 13 சதவீதம் அதிகம் என்று எளிதில் அறிந்து கொள்ளலாம். ஆனல் 1949ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவு முறைகளுக்கும் 1971ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவு முறைகளுக்கும் மிகுந்த வித்தியாசங்களிருப்பதை நாம் அறிவோம். நாகரிகம், பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றிலேற்பட்டுள்ள மாறுதல்களின் காரணமாக மக்களின் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற பொருட்களிலும் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன, மண் பாண்டங்களுக்குப் பதிலாக அலுமினியப் பாத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டு, இப்பொழுது அலுமினியப் பாத்திரங்களுக்கும் பதிலாக "எவர்சில்வர்" பாத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. 1949ஆம் ஆண்டில் காபி, தேநீர் அருந்துவோர் மிகவும் குறைவு. இப்பொழுது பெரும்பாலும் யாவரும் காபி, தேநீர் அருந்துவதை நாம் காண்கிறோம். 1949ஆம் ஆண்டில் பெரும்பாலும் வேட்டி, சட்டைகளையே அணிந்தனர். இப்போது "டெரிலின்" என்ற துணிகளில் நீண்ட கால் சட்டைகளும், சட்டைகளும் அணிவது நாகரிகமெனக் கருதப்படுகிறது. உண்ணும் உணவுப் பொருட்களிலும் மாற்றங்கள் காணப்படுகின்றன. 1949 ஆம் ஆண்டில் அரிசியுடன் சோளம், கேழ்வரகு, கம்பு மற்ற தானியங்களும் பயன்படுத்தப்பட்டன. ஆனல் இப்போது அரிசி, கோதுமை ஆகியவற்றையே பெரும்பாலானோர் உணவுப் பொருட்களாகப் பயன்படுத்துகின்றனர். இது போன்று எல்லாத் துறைகளிலும் மாற்றங்களைக் காணலாம். மேலும் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற பொருட்களும், நாகரிக, பழக்க வழக்க மாறுதல்களுக்கேற்ப

புது மாதிரிகளில் தயாரிக்கப்படுகின்றன. தவிர, 1949இல் பண்டங்களின் விலைகளை நிர்ணயித்து வந்த சந்தைகளுக்குப் பதிலாக புதிய சந்தைகள் புதிய இடங்களிலேற்பட்டுப் புதிய விலைகளை நிர்ணயிக்கின்றன. ஆகவே, மிகப் பழைய காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு குறியீட்டெண் தயாரிப்பது பொருத்தமற்றதென்பதை உணரலாம், மேலும், நடப்புக்கால விலைவாசி நிலைமையைப் பல ஆண்டுகளுக்கு முன்னுள்ள நிலைமையுடன் ஒப்பிடுவதைவிட முந்திய ஆண்டு விலைவாசி நிலைமையுடன் ஒப்பிடுதல் மிகவும் பயனுள்ளதாகயிருக்கும். ஆகவே, ஒவ்வொரு ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணையும் அதற்கு முந்திய ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு அடுத்தடுத்த பல ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களைத் தயாரிப்பதன் மூலம், ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் விலை வாசிகளில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றங்களை மிகத் தெளிவாக அறிந்துகொள்ள முடியும். இவ்வாறு, ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் அதற்கு முந்திய ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட அடுத்தடுத்த பல ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களுக்குத் "தொடர் அடிப்படை குறியீட்டெண்கள்" (chain base index numbers) என்று பெயர்.

p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 என்பன முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது, ஐந்தாவது, ஆண்டுகளில் ஒரு பணத்தின் விலைகளெனக் கொள்க. முதலாவது ஆண்டின் அடிப்படையில் இரண்டாவது ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணை

p_{12} எனக் குறிப்பிட்டால், $p_{12} = \dfrac{p_2}{p_1}$ ஆகும்.

இதுபோல் $p_{23} = \dfrac{p_3}{p_2}$, $p_{34} = \dfrac{p_4}{p_3}$, $p_{45} = \dfrac{p_5}{p_4}$ ஆகும்.

ஆகவே, $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{45}$ ஆகியவை தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களாகும். இத்தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களின் தொடர் பெருக்கலின்மூலம் முதலாவது ஆண்டின் அடிப்படையில் இறுதியாண்டின் (ஐந்தாவது ஆண்டின்) குறியீட்டெண்ணைப் பெற முடியும்.

$$p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{34} \cdot p_{45} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_5}{p_4}$$

$$= \frac{p_5}{p_1}$$

= முதலாண்டின் அடிப்படையில் ஐந்தாவது ஆண்டின் குறியீட்டெண்.

தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்

(1) குறியீட்டெண் கணிப்பில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள எந்தப் பண்டமும் நடப்பு ஆண்டில் தேவையற்றதெனக் கருதப் பட்டால் அதனை உடனடியாக நீக்கிவிட முடியும்.

(2) நடப்பு ஆண்டில் புதிதாக ஏதாவது பண்டங்கள் சேர்த்துக் கொள்ளப்படவேண்டுமென்று கருதப்பட்டால் குறியீட்டெண் கணிப்பில் சேர்த்துக்கொள்ள முடியும்.

(3) நடப்பு ஆண்டின் நிலைமைக்கேற்ப, பண்டங்களின் நிறைகளை மாற்றிக்கொள்ள முடியும்.

(4) உற்பத்தி, நுகர்வு, பங்கீடு பழக்க வழக்கங்கள், பண்டங்களின் தரம் ஆகியவற்றில் காணப்படுகின்ற அடிப்படை மாறுதல்களைத் தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள் மூலம் அறிந்து கொள்ள முடியும்.

(5) விலைவாசிகளில் அவ்வப்போது ஏற்படுகின்ற மாறுதல்களை மிகவும் தெளிவாக அறிந்து கொள்ள முடியும்.

(6) ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்படுகின்ற மாறுதல்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வியாபாரிகளும், தொழில் துறையினரும் தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

இத்தனைச் சிறப்பியல்புகளிலிருந்த போதிலும் நீண்டகால இடைவெளிகளிலுள்ள நிலைமைகளை ஒப்பிட தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்த முடியாதென்பதை அறியவும்.

மாதிரி

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைத் தயாரிக்கவும்

ஆண்டு............	1940	1941	1942	1943	1944
நிலைத்த குறியீடு	267	275	280	290	320

(சென்னை பி. காம். 1962 ஏப்.)

தீர்வு :

ஆண்டு	நிலைத்த குறியீடு	மாற்றம்	தொடர் குறியீடு
1940	267		100
1941	275	$\frac{275}{267} \times 100 = 103$	103
1942	280	$\frac{280}{275} \times 100 = 101.8$	101.8
1943	290	$\frac{290}{280} \times 100 = 103.6$	103.6
1944	320	$\frac{320}{290} \times 100 = 110.3$	110.3

மாதிரி :

பின்வரும் தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடவும்.

ஆண்டு………	1935	1936	1937	1938	1939	1940
தொடர்குறியீடு	94	108	104	98	108	102

தீர்வு :

ஆண்டு	தொடர்குறியீடு	மாற்றம்	நிலைத்தகுறியீடு
1935	94		94
1936	104	$\frac{94}{100}.104 = \dots \quad \dots \quad \dots$	97.7
1937	104	$\frac{94}{100}.\frac{104}{100}.104 = \frac{97.7}{100}.104$ $= 101.7$	
1938	98	$\frac{94}{100}.\frac{104}{100}.\frac{104}{100}.98 = \frac{101.7}{100}\ 98$ $= 94.5$	
1939	108	$\frac{94}{100}.\frac{104}{100}.\frac{104}{100}\ \frac{.98}{100}.108$ $= \frac{94.5}{100}.108 = 97.4$	
		$\frac{94}{100}.\frac{104}{100}.\frac{104}{100}.\frac{98}{100}\ \frac{108}{100}.102$ $= \frac{97.4}{100}.102$	99.2

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்
(Cost of living index number)

பொதுமக்களிடமிருக்கும் பணத்தின் வாங்கும் சக்தியிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களை அளவிட வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. பொதுமக்களில் ஒரு குறிப்பிட்ட சாராரின் வாழ்க்கைத் தரம் பற்றி அறிந்து கொள்ள இத்தகைய குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன. பொதுவாக, குறியீட்டெண் தயாரிப்புப் பணிகள் எட்டுப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படலாமென்றும், ஒவ்வொரு பிரிவும் எந்த முறையில் கவனமாகச் செயல்படுத்தப்பட வேண்டுமென்றும் முன்னர் குறிப்பிடப்பட்டிருந்தன. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பிலும் அந்த எட்டுவகைப் பணிகளையும் மிகவும் கவனமாகச் செய்ய வேண்டியது அவசியமாகும். வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்பட வேண்டிய நிறைகளின் மதிப்புக்களையும் எந்தப் பிரிவு மக்களின் வாழ்க்கைத் தரத்தை அளவிட அக்குறியீட்டெண் தயாரிக்கப்படுகிறதோ அப்பிரிவைச் சார்ந்த சராசரி குடும்பங்களின் செலவினங்களுக்கேற்ப நிர்ணயிக்க வேண்டும். பொதுவாக, வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கப்பட வேண்டிய உறுப்புக்கள் எட்டு முக்கிய பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு பிரிக்கப்படுகின்றன.

(1) உணவு, (2) வீட்டுவாடகை, (3) உடை
(4) போக்குவரத்து, (5) எரிபொருள், (6) மருத்துவம்,
(7) பொழுதுபோக்கு, (8) இதர பண்டங்களும், பணிகளும்.

வாழ்க்கைச் செலவு பற்றிய விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்காகத் தயாரிக்கப்படுகின்ற வினாப்பட்டியலில், குடும்பத்திலுள்ளோரின் எண்ணிக்கை, சம்பாதிப்பவரின் எண்ணிக்கை குடும்பத்தைச் சார்ந்த சம்பாதிக்காதவரின் எண்ணிக்கை, குடும்பத்தின் மாத மொத்த வருமானம், குடும்பத்தினரின் கடன், மற்றும் மேற்கூறப்பட்ட எட்டுப்பிரிவுகளுக்கும் ஆகின்ற மாதச் செலவு விவரங்கள் முதலியவைபற்றிய கேள்விகள் யாவும் இடம் பெற்றிருக்க வேண்டும். உணவுப் பிரிவின் கீழ் சராசரி குடும்பத்தினர் பயன்படுத்துகின்ற அரிசி, பருப்பு, உளுந்து, கோதுமை, தானிய வகைகள், மாவு, மாமிசம், பால், முட்டை, எண்ணெய், சீனி, ரொட்டி, காய்கறிகள், யாவும் இடம்பெற வேண்டும்.

குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் இடம்பெற வேண்டிய பண்டங்களைத் தெரிவு செய்தபின் அப்பண்டங்களின் சில்லறை விலைகளைச் சேகரிக்க வேண்டும். எந்தப் பிரிவு மக்களுக்காக வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கப்படுகிறதோ அப்பிரிவு மக்கள் மேற்கூறப்பட்ட பண்டங்களை வாங்குமிடங்களிலிருந்து அவற்றின் விலைகளைப் பெற வேண்டும். சில்லறை விலைகளை மளிகைக் கடைகள், கூட்டுறவுப் பண்டகசாலைகள், தனியார் கடைகள் ஆகியவற்றிலிருந்து நேரடியாகப் பெற வேண்டும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட ஒவ்வொரு பண்டத்தின் விலைகளின் சராசரியை அப்பண்டத்தின் விலையாக ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டும். இதுபோல் ஒவ்வொரு பண்டத்திற்கும் அடிப்படைக் காலவிலையையும், நடப்புக்கால விலையையும் நிர்ணயிக்கவேண்டும். உணவுப் பண்டங்கள், விறகு போன்றவை வாரம்தோறும் அல்லது மாதம் தோறும் வாங்கப் படலாம். உடைகள், பாத்திரங்கள் போன்ற பண்டங்கள் ஆண்டுக்கு ஒன்று அல்லது இரண்டு முறைகள் வாங்கப்படலாம். வாரம் ஒருமுறை வாங்கப்படுகின்ற பண்டங்களின் விலைகளை வாரம்தோறும் சேகரித்து, ஒரு மாதத்திலுள்ள வார விலைகளின் சராசரி விலையை அம்மாதத்திய விலையாக நிர்ணயிக்க வேண்டும். ஆண்டுக்கு ஒன்று அல்லது இரண்டு தடவைகள் வாங்கப்படுகின்ற பண்டங்களின் விலைகளை மாதம் தோறும் சேகரித்து ஒரு ஆண்டின் மாதவிலைகளின் சராசரி விலையை மாதவிலையாக நிர்ணயிக்க வேண்டும். கல்விக்காகும் செலவைப் படிப்புக் கட்டணம், தேர்வுக் கட்டணம், புத்தகங்களின் விலை ஆகியவற்றின் மொத்தத்தின் மூலம் நிர்ணயிக்க வேண்டும். மருத்துவச் செலவை மருந்துவிலை, ஊசி மருந்து விலை, பரிசோதனைக் கட்டணம் ஆகியவற்றைக் கொண்டு நிர்ணயிக்க வேண்டும். திரைப்படம், நாடகம் போன்ற பொழுது போக்குச் செலவை குறிப்பிட்ட பிரிவைச் சார்ந்த மக்கள் வாங்குகின்ற நுழைவுச் சீட்டின் விலையிலிருந்து பெற வேண்டும். வீட்டு வாடகையை வீட்டுச் சொந்தக்காரர்களிடமிருந்தும், நகர் மன்றங்களிலிருந்தும், வாடகைவீட்டுத் தரகர்களிடமிருந்தும் சேகரித்து சராசரியின் மூலம் நிர்ணயிக்க வேண்டும். எரிபொருட்களின் விலையை விறகு, கரி, மண்ணெண்ணெய் வியாபாரிகளிடமிருந்து பெற்று அவற்றுடன் சராசரி மின்கட்டணத்தையும் சேர்த்து நிறையிட்ட சராசரியைக் கணக்கிட்டு நிர்ணயிக்க வேண்டும். போக்குவரத்துக்காகும் செலவைப் போக்குவரத்துத் துறையினரிடமிருந்து பெற வேண்டும். பத்திரிகைச் செலவுகளை பத்திரிக்கைப் பதிலாள்களிடமிருந்து (agent) பெறலாம். மேற்கூறப்பட்டவற்றுள் ளடங்

காத இதர செலவினங்களை இதரச் செலவுகளின் கீழ்க் கணக்கிட வேண்டும்.

இவ்வாறு எல்லா வகைப் பண்டங்கள், பணிகள், ஆகியவற்றின் அடிப்படைக் கால, நடப்புக்கால விலைகளைச் சேகரித்து வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டுத் தயாரிப்பிற்கேற்றவாறு உணவு, வீட்டுவாடகை, உடை, போக்குவரத்து, எரிபொருள், மருத்துவம், பொழுதுபோக்கு இதரச் செலவுகள் ஆகிய எட்டுத் தொகுப்புக்களின் அடிப்படைக்கால, நடப்புக்கால சராசரி விலைகளைக் கணக்கிட்ட பின் ஒவ்வொரு தொகுப்பின் நடப்புக் கால விலைக்கும் அடிப்படைக்கால விலைக்குமுள்ள சதவீத விலை விகிதத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

ஒவ்வொரு தொகுப்புக்குமுரிய சதவீத விலைவிகிதமும் அத் தொகுப்பின் குறியீட்டெண் எனப்படும். இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட எல்லாத் தொகுப்புக் குறியீட்டெண்களின் நிறையிட்ட சராசரிதான் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணாகும். $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots$ என்பன உணவு, வீட்டு வாடகை, உடை முதலான தொகுப்புக்களின் குறியீட்டெண்களெனவும், $W_1, W_2, W_3, \ldots\ldots$ என்பன முறையே அத்தொகுப்புக்களின் நிறைகளெனவும் கொண்டால், நிறையிட்ட சராசரி மூலம் கணக்கிடப்படுகின்ற வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் $\frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$ ஆகும்; நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி மூலம் கணக்கிடப்படுகின்ற வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் $\frac{\Sigma W \log I}{\Sigma W}$ — இன் எதிர் மடக்கையாகும்.

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டிலேற்படக்கூடிய குறைபாடுகளுக்கான காரணங்கள்

(1) மிகப்பழமையான அடிப்படைக் காலம்

(2) ஆடம்பரச் செலவுகளை (luxuries) விட்டுவிடுதல்

(3) வாழ்க்கைத் தர மாறுதல்களைக் கவனிக்கத் தவறுதல்

(4) இறுதிநிலைப்பயன்பாட்டின் (marginal utility) தத்துவத்தைப் புறக்கணித்தல்.

(5) குடும்ப அளவிலேற்படும் மாறுதலைக் கவனிக்கத் தவறுதல்.

(6) சமூகப் பணிகளின் மூலம் பெறப்படுகின்ற நன்மைகளைக் கணக்கிடத் தவறுதல்.

(7) பல்வேறு தொழிற்பிரிவுகளைச் சார்ந்த தொழிலாளர்களின் பொருளாதார வித்தியாசங்களைப் புறக்கணித்தல்.

மேற்கூறப்பட்ட பல்வேறு காரணங்களினாலும் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீடுகளில் குறைபாடுகளேற்படலாம். ஆகவே, வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கும்போது மேற்கூறப்பட்ட குறிப்புக்களையும் கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும்.

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்

(1) வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் விலைவாசி நிலவரங்களிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களைப் பிரதிபலிப்பதால் அவை அரசாங்கத்தின் நிதி, பொருளாதாரக் கொள்கைகளை அமைத்துக்கொள்ள உதவியாகயிருக்கின்றன.

(2) வாழ்க்கைச் செலவிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களுக்கேற்றவாறு அரசாங்க ஊழியர்கள், தனியார்துறைத் தொழிலாளர்கள் ஆகியோரின் சம்பளங்களைச் சரிக்கட்டப்பயன்படுகின்றன.

(3) பணத்தின் வாங்கும் சக்தியை நிர்ணயிக்கப்பயன்படுகின்றன.

(4) ஒருகாலம் சார் தொடரின் உண்மையான மதிப்புக்களை நிர்ணயித்தல்.

(5) மீச்சிறு ஊதிய அளவுகள், வரிவிலக்கு அளிக்கப்பட வேண்டிய வருமான எல்லைகள், காப்புறுதி (Insurance) மூலம் பெறப்படுகின்ற பயன்களின் அளவுகள் ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்க வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

மாதிரி : 134

பின்வருபவை ஒரு சராசரித் தொழிலாளர் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டத்தின் தொகுப்புக் குறியீட்டெண்களும், தொகுப்பு நிறைகளுமாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிறைகளைக் கொண்டு ஒரு வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கவும்.

தொகுப்பு	குறியீட்டெண்	நிறை
உணவு	352	48
எரிபொருள்	220	10
உடை	230	8
வாடகை	160	12
இதரச் செலவு	190	15

(சென்னை பி.காம். 1962 செப்.)

தீர்வு

தொகுப்பு	I	W	IW
உணவு	352	48	16896
எரிபெருள்	220	10	2200
உடை	230	8	1840
வாடகை	180	12	1920
இதரச் செலவு	190	15	2850
		93	25706

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{25706}{93}$$

$$= 276.4.$$

மாதிரி: 135

பின்வருவன ஒரு சராசரி தொழிலாளர் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டத்தின் தொகுப்புக் குறியீட்டெண்களும், தொகுப்பு நிறைகளுமாகும். பெருக்குச் சராசரியின் மூலம் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

உறுப்பு	குறியீட்டெண்	நிறை
உணவு	250	45
வாடகை	150	15
உடை	320	20
எரிபொருள்	190	5
இதரச் செலவு	300	15

தீர்வு

உறுப்பு				
உணவு	45	250	2.39794	107.90730
வாடகை	15	150	2.17609	32.64135
உடை	20	320	2.50515	50.10300
எரிபொருள்	5	190	2.27875	11.39375
இதரச் செலவு	15	300	2.47712	37.15680
மொத்தம்	100			239.20220

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்

$$= \text{எதிர் மடக்கை} \left(\frac{\Sigma W \log I}{\Sigma W} \right)$$

$$= \text{எதிர்மடக்கை} \left(\frac{239.20220}{100} \right)$$

= எதிர்மடக்கை (2.39202)
= 246.6

மாதிரி : 136

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு (1) மொத்தச் செலவு முறை (2) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையைப் பயன் படுத்தி 1939-ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1940 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

பண்டம்	அலகு	1939 ஆம் ஆண்டின் நுகர்வு அளவு	1939 ஆம் ஆண்டின் விலை ரூ. அணா	1940 ஆம் ஆண்டின் விலை ரூ. அணா
அரிசி	மணங்கு	6 மணங்கு	5 - 12	6 - 0
கோதுமை	,,	6 மணங்கு	5 - 0	8 - 0
உளுந்து	,,	1 மணங்கு	6 - 0	9 - 0
பருப்பு	,,	6 மணங்கு	8 - 0	10 - 0
நெய்	சேர்	4 சேர்	2 - 0	1 - 0
சீனி	மணங்கு	1 மணங்கு	20 - 0	15 - 0

(1) ***மொத்தச் செலவு முறை*** (Aggregate expenditure method)

பண்டம்	நுகர்வு அளவு q_0	1939 விலை P_0	1940 விலை P_1	$P_0 q_0$	$P_1 q_0$
அரிசி	6	5—12	6—0	34—8	36—0
கோதுமை	6	5—0	8—0	30—0	48—0
உளுந்து	1	6—0	9—0	6—0	9—0
பருப்பு	6	8—0	10—0	28—0	60—0
நெய்	4	2—0	1—8	8—0	6—0
சீனி	1	20—0	15—0	20—0	15—0
மொத்தம்				146—8	174—0

$$\text{வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{174\text{-}0}{146\text{-}8} \times 100$$

$$= \frac{174.0}{146.5} \times 100$$

$$= 118.7$$

(2) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை
(Family budget method)

இம்முறையில், விலை விகிதங்கள், அடிப்படை ஆண்டு மதிப்புக்களால் நிறையிடப்படுகின்றன.

பண்டம்	q_0	P_0	P_1	$W = P_0 q_0$	$I = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) 100$	I W
அரிசி	6	5.75	6	34.50	$\frac{6}{5.75} \times 100 = 104.34$	3599.7
கோதுமை	6	5	8	30.00	$\frac{8}{5} \times 100 = 160$	4800.0
உளுந்து	1	6	9	6.00	$\frac{9}{6} \times 100 = 150$	900.0
பருப்பு	6	8	10	48.00	$\frac{10}{8} \times 100 = 125$	6000.0
நெய்	4	2	1.50	8.00	$\frac{1.50}{2} \times 100 = 75$	600.0
சீனி	1	20	15	20.00	$\frac{15}{20} \times 100 = 75$	1500.0
மொத்தம்				146.50		17899.7

$$\text{வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

$$= \frac{17899.7}{146.50} = 118.7$$

குறிப்பு :

மொத்தச் செலவு முறையிலும், குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையிலும் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணுக்கு ஒரே மதிப்புத்தான் கிடைக்கிறது. இவ்விரு முறைகளும் கணித முறைப்படி ஒன்றுதான். கணக்கிடும் முறைகளில்தான் வேறுபடுகின்றன. மொத்தச் செலவு முறை, குடும்ப வரவு செலவு முறையைவிட எளிதாக யிருப்பதைக் காணலாம்.

குறியீட்டெண்களுக்கான சோதனைகள் (Test for index numbers)

கீழ்க்காணும் சோதனைகளைத் திருப்திப்படுத்துகின்ற ஒரு குறியீட்டெண் "நிறைவான குறியீட்டெண்" (perfect index number) அல்லது "நல்ல குறியீட்டெண்" (good index number) அல்லது "விழுமிய குறியீட்டெண்" (ideal index number) என்று அழைக்கப்படும்.

(1) கால எதிர்மாற்றுச் சோதனை (Time - reversal test)

ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் என்பது முன்முகமாகவும், பின்முகமாகவும் இயங்கும் தன்மையுடையதாகயிருக்க வேண்டுமென்று பேராசிரியர் இர்விங் ஃபிஷர் நிர்ணயித்துள்ளார். அதாவது, அடிப்படை ஆண்டின் அடிப்படையில் நடப்பு ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணனது, நடப்பு ஆண்டின் அடிப்படையில் அடிப்படை ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணின் தலைகீழ்விகிதமாகயிருக்கவேண்டும். P_{01} என்பது அடிப்படை ஆண்டின் அடிப்படையில் நடப்பு ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணையும், P_{10} என்பது நடப்பு ஆண்டின் அடிப்படையில் அடிப்படை ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணையும் குறிப்பிட்டால், கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையின்படி

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}},$$

$$\text{அல்லது, } P_{01} \cdot P_{10} = 1$$

என்றவாறு அமைந்திருக்க வேண்டும்,

லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் இச்சோதனையின்படி அமையவில்லை : ஏனெனில்

$$\text{லாஸ்பியரின் } P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

அடிப்படை ஆண்டையும், நடப்பு ஆண்டையும் மாற்றுக.

அதாவது, P_{01} சூத்திரத்தில் 0-ஐயும், 1-ஐயும் மாற்றுக.

$$\therefore \quad P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$$

$\therefore \quad P_{01} \cdot P_{10} \neq 1$ என்று காண்கிறோம்.

ஆகவே. லாஸ்பியரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்தவில்லை. இது போல், பாச்சியின் குறியீட்டெண்ணும் இச்சோதனையின்படி அமைய வில்லை. ஏனெனில்,

$$\text{பாச்சியின் } P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$$

$$P_{10} = \frac{\Sigma r_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$$

ஆகவே, $P_{01} \cdot P_{10} \neq 1$ என்று காணலாம். அதாவது, பாச்சியின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்த வில்லை.

ஆனால், ஃபிஷரின் குறியிட்டெண் கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்தும் வகையில் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம்.

$$\therefore \text{பிஷரின்} \quad P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \cdot \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$\text{ஆகவே.} \; P_{01} \cdot P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \cdot \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = 1$$

இவ்வாறு, ஃபிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் கால எதிர்மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்துவதைக் காண்கிறோம்.

(2) காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை (Factor reversal test)

ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் திருப்திப்படுத்தவேண்டிய இரண்டாவது முக்கியமான சோதனை காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனையாகும். இச்சோதனையின்படி, ஒரு நல்ல விலைக்

குறியீட்டெண்ணானது ஒரு கணியக் குறியீட்டெண்ணாகவும் (quantity index number) இயங்கும் தன்மை வாய்ந்ததாகயிருக்க வேண்டும். அதாவது, ஒரு விலைக் குறியீட்டெண்ணையும், அக் குறியீட்டுச் சூத்திரத்திலுள்ள p, q ஆகிய காரணிகளை மாற்று வதன் மூலம் கிடைக்கின்ற கணியக் குறியீட்டெண்ணையும் பெருக்கினால் $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என்ற மொத்த மதிப்பு விகிதம் (value ratio) கிடைக்க வேண்டும். P_{01} என்பது நடப்பு ஆண்டு விலைக் குறியீட்டெண்ணையும், Q_{01} என்பது அதே அடிப்படையில் நடப்பு ஆண்டுக் கணியக் குறியீட்டெண்ணையும் குறிப்பிட் டால், காரண எதிர்மாற்றுச் சோதனையின்படி $P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என்று கிடைக்க வேண்டும். முன்போலவே லாஸ்பியர், பாச்சி ஆகிய குறியீட்டெண்கள் இச்சோதனையைத் திருப்திப்படுத்த வில்லையென்பதையும், ஃபிஷரின் குறியீட்டெண் மட்டுமே இச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்துகிறதென்பதையும் எளிதில் காணலாம்.

லாஸ்பியரின் $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$

p, q ஆகியவற்றை மாற்றினால்,

லாஸ்பியரின் $Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma q_0 p_0}$

ஆகவே, $P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$

ஆகவே லாஸ்பியரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் காரணி எதிர் மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப் படுத்தவில்லை.

பாச்சியின் $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$

$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}$

ஆகவே, $P_{01} \; Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$

ஆகவே, பாச்சியின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் காரணி எதிர் மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்தவில்லையென்பதைக் காண்கிறோம்.

ஃபிஷரின் $$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

ஆகவே, $$P_{01}\ Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{(\Sigma p_0 q_0)^2}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

= மதிப்புக்களின் விகிதம்.

இவ்வாறு, ∴பிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் காரணி எதிர் மாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்துவதைக் காண்கிறோம்.

இரண்டு ஆண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள விலைவாசி மாற்றங்களை அளவிடக்கூடிய ஒரு குறியீட்டெண் சூத்திரம் மேற்கூறப்பட்ட கால எதிர்மாற்றுச் சோதனை ஆகிய இரு சோதனைகளையும் திருப்திப்படுத்தினால் அக்குறியீட்டுச் சூத்திரம் ஒரு சிறந்த குறியீட்டெண் சூத்திரமெனக் கருதப்படும். இத்தகைய ஒரு சிறந்த குறியீட்டெண் சூத்திரத்தின் மூலம் கிடைக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்ணுக்கு "நிறைவான குறியீட்டெண்" என்று பெயர். ஆனால், ஃபிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் மட்டுமே மேற்கண்ட இரு சோதனைகளையும் திருப்திப்படுத்துவதால் ஃபிஷரின் குறியீட்டுச் சூத்திரம் "வழுமிய குறியீட்டுச் சூத்திரம்" (Ideal index formula) என்றும், ∴பிஷரின் குறியீட்டெண் "விழுமிய குறியீட்டெண்" (ideal index) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

வட்டச்சோதனை (Circular test)

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட அடுத்தடுத்த ஆண்டுகளின் விலைவாசி மாற்றங்களை அளவிடப்பயன்படுகின்ற குறியீட்டுச்

சூத்திரங்கள் வட்டச் சோதனையென்னும் சோதனையைத் திருப் திப்படுத்த வேண்டும். அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டின் அடிப்படையில் நடப்பு ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக் கிடப் பயன்படும் சூத்திரம் நிலைத்த ஆண்டு அடிப்படை முறையிலும், தொடர் ஆண்டு அடிப்படை முறையிலும் ஒரே மதிப்பையே குறியீட்டெண்ணாகத் தருவதாகயிருக்க வேண்டும்.

P_{12} என்பது முதல் ஆண்டின் அடிப்படையில் இரண்டா வது ஆண்டின் குறியீட்டெண் என்றும், P_{23} என்பது இரண்டா வது ஆண்டின் அடிப்படையில் மூன்றாவது ஆண்டின் குறியீட் டெண் என்றும், P_{34} என்பது மூன்றாவது ஆண்டின் அடிப்படை யில் நான்காவது ஆண்டின் குறியீட்டெண் என்றும், P_{14} என்பது முதல் ஆண்டின் அடிப்படையில் நான்காவது ஆண்டின் குறியீட்டெண் என்றும் கொள்க.

வட்டச் சோதனையின் படி,

$$P_{14} = P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{34}$$

என்று இருக்க வேண்டும். ஆனால் P_{14} என்பது கால எதிர் மாற்றுச் சோதனையையும் திருப்திப் படுத்தினால்,

$$P_{14} \cdot P_{41} = 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆகவே, வட்டச்சோதனையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \cdot P_{41} = 1$$

இதுபோல்,

$$P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \ldots\ldots\ldots P_{n1} = 1$$

ஒரேயொரு பண்டத்தின் விலை விகிதங்களைக் கொண்டு அமையப்பெற்ற குறியீட்டெண் இச்சோதனையைத் திருப்திப் படுத்துகிறது. தனிபெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்களும், நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்களும் இச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்துகின்றன. ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் இச்சோதனையை தோராயமாகவே நிறைவேற்று கிறது. ஆனால் ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டுச் சூத்திரம் இரண்டு ஆண்டுகளின் விலைவாசி மாற்றத்தை அளவிடவே பயன்படுகின்றதாகையாலும், அடுத்தடுத்த பல ஆண்டுகளை ஒப்பிட அது பயன் படுத்தப்படுவதில்லையாகையாலும், அது

வட்டச் சோதனையைத் திருப்திப் படுத்த வேண்டுமென்பது அவ்வளவு முக்கியமானதாகக் கொள்ளப்படுவதில்லை.

புள்ளியியல் பண வீக்கக் குறைப்பு (Statistical deflation)

பெரும்பாலான பொருளாதாரக் காலம் சார் தொடர் வரிசைகள், விலைவாசி மாற்றங்களால் பாதிக்கப்படுவதால், அத்தொடர்களின் உண்மையான மாற்றங்களை நம்மால் உணர முடிவதில்லை. பொருளாதார ஆய்வுகளில், காலங்களின் மாற்றங்களுக்கேற்ப பண்டங்களின் அளவுகளிலேற்படுகின்ற மாற்றங்களை அளவிடுதல் மிகவும் முக்கியமானதாகும். ஆனால் இத்தகைய மாற்றங்களை அளவிடவேண்டுமாயின் அவற்றினின்றும் விலைவாசி மாற்றங்களினால் ஏற்படுகின்ற விளைவுகளை நீக்க வேண்டும். ஒரு காலம்சார் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புக்களினின்றும் விலைவாசி மாற்றங்களினால் ஏற்படுகின்ற விளைவுகளை நீக்குவதற்குப் "புள்ளியியல் பணவீக்கக் குறைப்பு" (Statistical deflation) என்று பெயர். ஒரு காலம் சார் தொடர் வரிசையினின்றும் விலைவாசியினாலேற்படும் அசைவுகளை நீக்க அக்காலம்சார் தொடரின் மதிப்புக்களை அவற்றிற்குரிய விலைக் குறியீட்டெண்களினால் வகுக்க வேண்டும்.

1962-ஆம் ஆண்டில் சென்னையிலுள்ள ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ. 60 எனவும், 1972ஆம் ஆண்டில் சராசரி வருமானம் ரூ. 90 எனவும் கொள்வோம். தொழிலாளர்களின் வருமான உயர்வு ரூ. 30 ஆகயிருந்தபோதிலும் இது அவர்களின் உண்மையான வருமான உயர்வு ஆகாது. ஏனெனில், 1962-ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1972-ஆம் ஆண்டின் விலைவாசிக் குறியீட்டெண் 120 என்றிருந்தால் ரூ. 30 வருமான உயர்வுக் கேற்ப வாழ்க்கைச் செலவும் 10% உயர்ந்திருப்பதால் ரூ. 30 வருமான உயர்வை உண்மையான உயர்வாகக் கொள்ள முடியாது. ஆகவே, விலைவாசி உயர்வினால் ஏற்படும் விளைவுகளை நீக்கிய பின் வருமானத்தில் காணப்படுகின்ற உயர்வை உண்மையான உயர்வாகக் கொள்ள வேண்டும்.

விலைவாசி உயர்வுக்கேற்ப திருத்தப்பட்ட வருமானம்

$$= \frac{\text{1972 இன் வருமானம்}}{\text{1972 இன் விலைக்குறியீடு}} \times 100$$

$$= \frac{90}{120} \times 100$$

$$= \text{ரூ } 75.$$

ஆகவே, விலைவாசி உயர்வின் விளைவுகள் நீக்கப்பெற்ற வருவான உயர்வு = ரூ. 75-ரூ. 60 = ரூ. 15 ஆகும். இவ்வாறு விலைவாசியிலேற்பட்டுள்ள மாற்றங்களுக்கேற்ப காலம் சார் தொடர் மதிப்புக்களில் செய்யப்படுகின்ற திருத்தத்திற்குப் "புள்ளியியல் பணவீக்கக் குறைப்பு" (statistical deflation) என்று பெயர். திருத்தப்பட்ட வருமானமாகிய ரூ. 75 உண்மையான வருமானம் (real income) அல்லது பணவீக்கக்குறைப்புச் செய்யப்பட்ட வருமானம் (deflated income) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பணவீக்கக்குறைப்புச் செய்யப்பட்ட மதிப்பைக் குறியீட்டெண்ணாகவும் குறிப்பிடலாம். பணவீக்கக்குறைப்புச் செய்யப்பட்ட மதிப்புக்களின் தரம் பணவீக்கக்குறைப்புச் செய்யப் பயன்படுத்தப்பட்ட குறியீட்டெண்ணின் தரத்தையே சார்ந்திருக்குமென்பது சொல்லாமலே விளங்கும்.

குறியீட்டெண்களின் முக்கியத்துவமும் பயன்களும்

பொருளாதார நிலைகளையும், அவற்றிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களையும் அளவிடுதலும், வெவ்வேறு காலங்களிலுள்ள பொருளாதார நிலைகளை ஒப்பிடுதலும் குறியீட்டெண்களின் முக்கிய நோக்கங்களாகும். பல்வேறு குறியீட்டெண்களும் பலவிதங்களில் பயன்படுகின்றன. விலைக்குறியீட்டெண்கள் விலைவாசியிலேற்படுகின்ற மாற்றங்களை அளவிடுவதால் அரசாங்கம் தனது நிதிக்கொள்கையைச் சிறந்த முறையிலமைத்துக் கொள்ளப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. மதிப்புக் குறியீட்டெண்கள் (value index numbers) பண்டங்களின் விலை மதிப்புக்களிலேற்படுகின்ற மாற்றங்களை ஏதாவதொரு அடிப்படைக் கால விலைமதிப்புக்களுடன் ஒப்பிட்டறியப் பயன்படுகின்றன. கணியக் குறியீட்டெண்கள் (quantity index numbers) பண்டங்களின் உற்பத்தி, விற்பனை, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி, விநியோகம். நுகர்வு போன்ற அளவுகளிலேற்படுகின்ற மாற்றங்களை ஏதாவதொரு அடிப்படைக்காலத்திலுள்ள அளவுகளுடன் ஒப்பிட்டறியப் பயன்படுகின்றன. பணத்தின் வாங்கும் சக்தியின் நீண்டகால மாறுதல்களை அளவிட குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன. தொழில் உற்பத்திக் குறியீட்டெண்கள் உண்மையான பொருளாதார மாறுதல்களை நன்கு அளவிடுவதன் மூல தொழில் துறைகளிலேற்படுகின்ற அழுத்தங்களை அளவிடுவதால் அவை "தொழில் அழுத்தமானிகள் (business barometers) என்று அழைக்கப்படுகின்றன. தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பொருட்கள், விற்பனை இரும்புச்சரக்குகள், ஏற்றுமதி, இறக்குமதி ஆகியவற்றை அளவிடுவதற்காகக் கணிக்கப்படுகின்ற குறியீட்டெண்கள் காலம்சார் தொடர் விரிசைகளின் நீள்காலப்

போக்கு, பருவகால அலைவுகள், சுழல் மாறுபாடுகள், தொழிற் சுழற்சிகள் ஆகியவற்றை அளவிடப்பயன்படுகின்றன.

அரசாங்கத்தினரும், தனியார் துறையினரும் தொழிலாளர்களின் ஊதியங்களையும், கிராக்கிப் படிகளையும் (dearness allowances) தொழிலாள வர்க்கத்தினரின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணிற்கேற்ப சரிக்கட்டுகின்றனர். ஒரு நாட்டின் உண்மையான வருமானம் நாணயமதிப்பிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களின் விலைவுகளை நீக்கும்பொருட்டு அந்நாட்டின் மொத்த வருமானத்தை (gross national income) நுகர்வோரின் விலைக் குறியீட்டெண்ணால் (consumer's price index) வகுத்துக் கணக்கிடப்படுகிறது. இவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்ற நாட்டு வருமானத்திற்கு நிலைத்த விலைகளில் நாட்டின் வருமானம் (National income at fixed prices) என்று பெயர்.

குறியீட்டெண்களின் குறைபாடு

பொது நிருவாகத்துறையிலும், பொருளாதாரத் துறையிலும் குறியீட்டெண்கள் பல்வேறு வகைகளில் பயன்பட்டபோதிலும், அவை உண்மை நிலையை பிரதிபலிப்பதில்லையென்ற குற்றச் சாட்டுக்குள்ளாகின்றன. குறியீட்டெண் தயாரிப்பின் முக்கிய பணிகளான அடிப்படைக் காலத்தேர்வு, பண்டங்களைத் தெரிவு செய்தல், பண்டங்களின் நிறைகளை நிர்ணயித்தல், பொருத்தமான குறியீட்டுச் சூத்திரத்தைத் தெரிவு செய்தல் ஆகியவற்றுள் ஏதாவதொன்றில் ஒரு சிறு தவறு ஏற்பட்டாலும் குறியீட்டெண் மதிப்புப் பெரிதும் பாதிக்கப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு குறியீட்டெண்ணை வேறொரு நோக்கத்திற்குப் பயன்படுத்தினால் தவறான முடிவையே பெற நேரிடும். ஆகவே, குறியீட்டெண்களைப் பகுப்பாய்வுகளுக்குப் பயன்படுத்தும்போது மிகவும் கவனமுடனும், எச்சரிக்கையுடனும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

வினாத்தாள்—14

1. குறியீட்டெண் என்றால் என்ன? அதன் பயன்களை விவரிக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

2. குறியீட்டெண்களின் பொருள், முக்கியத்துவம் ஆகியவைபற்றி விவரிக்கவும். (சென்னை பி.காம். 1968 ஏப்.)

3. ஒரு குறியீட்டெண்ணைத் தயாரிக்கும்போது கருத்திற் கொள்ள வேண்டிய முக்கிய குறிப்புகள் யாவை ?

4. தனிக் குறியீட்டெண் என்றால் என்ன ? அது எவ்வாறு கணிக்கப்படுகிறது ?

5. நிறையிட்ட குறியீட்டெண் என்பதன் மூலம் அறியப் படுவது யாது ? ஒரு குறியீட்டெண் நிறையிடப்படாம லிருக்க முடியுமா ? ஏன் ?

6. நிறையிட்ட குறியீட்டெண்ணின் தன்மையையும், நோக்கத்தையும் விவரிக்கவும்.

7. தனிக் குறியீட்டெண்ணுக்கும், நிறையிட்ட குறியீட் டெண்ணுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை விவரிக்கவும்.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

8. குறியீட்டெண்களை நிறையிடுவதன் நோக்கத்தை விவரிக்கவும்.

9. குறியீட்டெண்கள் தயாரிப்பில் நிறையிடுவதன் முக்கியத்துவத்தை விளக்கவும்.

(மதுரை பி.காம் 1971 செப்.)

10. குறியீட்டெண் கணிப்பின்போது பல்வேறு காரணி களுக்கும் நிறைகளை நிர்ணயிக்கும் முறையை விளக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

11. ஒரு பொது விலைக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பயன் படுகின்ற பல்வேறு நிறையிடும் முறைகளை விவாதிக்கவும்.

12. குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பெருக்குச் சராசரி, கூட்டுச் சராசரி ஆகியவை பயன்படுத்தப்படுவதற்கான தகுதி களையும், வரம்புகளையும் ஒப்பிட்டு ஒரு குறிப்பு வரைக. (சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்.)

13. குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்கான சராசரி என்ற முறை யில் பெருக்குச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகளை ஆராய்க. (சென்னை பி.காம். 1968 செப்.)

14. குறியீட்டெண் தயாரிப்பின்போது அடிப்படைக்காலத் தேர்வு சம்பந்தமாக நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டிய முக்கிய குறிப்புகள் பற்றி ஒரு விளக்கம் தருக.

15. நிலைத்த அடிப்படை, தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை விவரிக்கவும்.

16. நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடும் போது, தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களின் சிறப்பியல்புகளும், குறைபாடுகளும் யாவை?

(சென்னை பி.காம். 1962 ஏப்.)

17. குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்கான ஃபிஷரின் விழுமிய சூத்திரம் யாது?

(சென்னை பி.ஏ. (ஆனர்சு) 1958; பி.ஏ. 1959)

18. ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் குறித்து ஒரு குறிப்பு வரைக. (சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்.)

19. குறியீட்டெண் தயாரிப்புக்கு ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் மிகப் பொருத்தமானதாகக் கருதப் படுவது ஏன் என்பது பற்றி விவரிக்கவும்.

(சென்னை பி.காம். 1968 செப்.)

20. ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண்ணுக்குரிய சோதனைகள் யாவை? அவைகள் (1) லாஸ்பியரின் (2) ஃபிஷரின் (3) பாச்சியின் குறியீட்டெண்களால் திருப்திப் படுத்தப்படுகின்றனவா என்று ஆராய்க,

(மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 செப்.)

21. குறியீட்டெண்களுக்கான காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனையை விரிவாக விளக்கவும். இவ்விளக்கத்தில் ஃபிஷரின், லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண்களை ஆராய்க.

(மதுரை பி. பி. ஏ. 1970 ஏப்.)

22. ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண் திருப்திப்படுத்தவேண்டிய சோதனைகள் யாவை?

(பி.காம் சென்னை 1967 செப்., மதுரை '61 செப்.)

23. ஒரு குறியீட்டெண் திருப்திகரமானதாகயிருக்க வேண்டுமாயின் திருப்திப்படுத்த வேண்டிய மூன்று சோதனைகளை விவாதிக்கவும்.

(சென்னை பி. ஏ. 1966 ஏப்.)

24. ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண் திருப்திப்படுத்தவேண்டிய நிபந்தனைகளை விவாதிக்கவும். ஏதாவது இரண்டு குறியீட்டெண்களைக்கொண்டு மேலே குறிப்பிடப்படும் நிபந்தனைகளுள் எவை அவற்ருல் திருப்திப்படுத்தப் படுகின்றன என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.காம். 1964 செப்.)

25. ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் திருத்தப்படுத்தவேண்டிய சோதனைகளை விரிவாக விளக்கவும். (அ) பாச்சியின் குறியீடு, (ஆ) லாஸ்பியரின் குறியீடு, (இ) தனிப் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீடு, (ஈ) ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீடு ஆகியவை அச்சோதனைகளைத் திருப்திப் படுத்துகின்றனவா என்று ஆராய்க.

(சென்னை பி. எஸ். ஸி. (புள்ளியியல்) 1968 ஏப்.)

26. ஒரு விலைக் குறியீட்டெண்ணுக்கான நிறைவான சூத்திரத்தைப் பெறுவதிலுள்ள பிரச்சினைகளை ஆராய்க. கால எதிர்மாற்றுச் சோதனைக்கு என்ன முக்கியத்துவம் அளிப்பீர்கள் ?

(சென்னை எம். ஏ. 1959.)

27. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் என்ருல் என்ன ? மதுரையிலுள்ள பள்ளி ஆசிரியர்களின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டைக் கணக்கிடும் முறையொன்றை விளக்குக. (மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 ஏப்.)

28. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் எவ்வாறு கணக் கிடப்படுகிறதென்பதை விவரிக்கவும்.

(சென்னை பி.காம். 1968 செப்.)

29. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் எவ்வாறு கணிக் கப்படுகிறது ? (சென்னை பி.காம். 1967 ஏப்.)

30. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பின்பற்றப்படுகின்ற முறையை விளக்குக.

(சென்னை பி.காம். 1965 ஏப்., 1970 செப்.)

31. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள் யாவை ? (சென்னை பி.காம். 1960 ஏப்.)

32. (1) தொழில்துறைக் குறியீட்டெண், (2) தொழிலாளர் வர்க்கத்தினரின் நுகர்வு விலைக் குறியீடு ஆகியவற்றை விவாதிக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

33. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களில் பிழைகள் ஏற்பட மூலகாரணமாக யிருப்பவைகள் யாவை ?

34. புள்ளியில் பணவீக்கம் குறைப்பு என்பது பற்றி விளக்கவும்.

35. சிறு குறிப்பு வரைக :

1. ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீடு.

(சென்னை பி.காம். 1967 செப்., மதுரை பி.காம். 69 செப். 70 செப். 71 ஏப். பி.பி.ஏ. 71 ஏப். பி.பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

2. கால எதிர்மாற்றுச் சோதனை.

(சென்னை பி.காம். 1963 ஏப்., மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

3. காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை.

(மதுரை பி. ஏ. 1979 செப்.)

4. நிலைத்த ஆண்டு அடிப்படையிலும், தொடர் ஆண்டு அடிப்படையிலும், குறியீட்டெண்கள் கணிக்கும் முறைகள். (மதுரை பி. ஏ. 1971 ஏப்.)

5. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள்.

(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்., பி.எஸ்.ஸி. 68 ஏப்.)

6. புள்ளியியல் பணவீக்கக் குறைப்பு.

7. மொத்த விற்பனை குறியீட்டெண்.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

86. ஃபிஷர் வகுத்த விழுமிய குறியீட்டெண் அமைப்பது எப்படியென விளக்குக. அது 'விழுமிய'தெனக் கூறப்படுவதைப் பொருத்திக் காட்டுக.

(மதுரை பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

87. ஒரு நல்ல குறியீட்டெண்ணுக்கு இருக்க வேண்டிய பண்புகள் யாவை? ஒரு குறியீட்டெண் தயாரிக்கும் முறையினை விளக்கவும். (மதுரை எம்.ஏ. 1972)

88. குறியீட்டெண்களின் பயனை விளக்கவும். வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் பின்பற்றப்படுகின்ற முறையினை விவரிக்கவும்.

(மதுரை பி.காம். 1972 ஏப்.)

பயிற்சி 15

1. ஒரு இடத்தில் இரண்டு ஆண்டுகளில் நான்கு பண்டங்களின் விலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1910-ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 1920-இன் நான்கு தனிக்குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	பண்டங்களின் விலைகள் (ஒரு அலகுக்கு ரூபாய்) 1	2	3	4
1910	158	152	165	154
1920	307	310	315	292

(சென்னை பி.ஏ. 1966 ஏப்.)

2. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு (1) கூட்டுச் சராசரி, (2) பெருக்குச் சராசரி, (3) இசைச் சராசரி, (4) இடைநிலையளவைப் பயன்படுத்தி 1955-ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1965-ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பண்டம்	ஒரு அலகு	விலை (ரூபாய்)
	1955	1965
1	22	28
2	18	24
3	30	40
4	9	15
5	27	33
6	15	20

3. கீழே பட்டியலில் 1939, 1940, 1941, 1942 ஆகிய ஆண்டுகளில் மூன்று பண்டங்களின் ஒரு அலகு விலைகள் ரூபாயில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1939-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு (1) கூட்டுச் சராசரி, (2) பெருக்குச் சராசரியின் மூலம் 1940, 1941, 1942 ஆகிய ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

பண்டம்	விலை ரூபாயில் 1939	1940	1941	1942
அ	15	18	24	30
ஆ	9	12	15	18
இ	2	2	3	3

4. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 1902-இன் அடிப்படையில் 1904-க்குப் பல்வேறு குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	பண்டம் 1		பண்டம் 2		பண்டம் 3	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1902	5	10	8	6	6	3
1904	4	12	7	7	5	4

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து (1) லாஸ்பியரின் முறை (2) பாச்சியின் முறை (3) மார்ஷல்–எட்ஜ் வொர்த்தின் முறை (4) ஃபிஷரின் முறையின் மூலம் 1955-ஆம் ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடவும்.

பண்டம்	விலை 1945	அளவு 1945	விலை 1955	அளவு 1955
அ	2.0	100	5.0	80
ஆ	1.5	20	4.5	4
இ	1.0	10	2.0	4

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு, 1935-ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு பல்வேறு குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடவும்.

ஆண்டு	அரிசி		கோதுமை		பயறு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1935	4	50	3	10	2	5
1946	10	40	8	8	4	4

(சென்னை பி. ஏ. 1959)

7. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஃபிஷரின் குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	கோதுமை		அரிசி		பருப்பு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1939	15.3	15	20.2	5	4	10
1954	22.7	12	27.4	4	7	8

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் உதவியால் ∴பிஷரின் குறியீட்டெண்ணைத் தயாரித்து, அது காரணி எதிர் மாற்றுச் சோதனையை எவ்வாறு திருப்திப்படுத்துகிறதென் பதைக் காட்டுக.

பண்டம்	மதிப்பிடப்பட்ட மொத்த உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)		ஒருமணங்குக்கு அறுவடை விலை	
	1931—32	1932—33	1931—32 ரூ—அணா	1932-33 ரூ—அணா
அரிசி	71	26	3—8	3—2
சோளம்	107	83	2—0	1—14
கம்பு	62	48	2—9	1—12

9. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ∴பிஷரின் குறியீட் டெண்ணைக் கணக்கிடவும்.

பண்டம்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அ	6	50	10	56
ஆ	2	100	2	120
இ	4	60	6	60
ஈ	10	30	12	24
உ	8	40	12	36

(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்.)

10. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து (1) அடிப்படை ஆண்டு நிறையீடு (2) நடப்பு ஆண்டு நிறையீடு, (3) ஃபிஷரின் விழுமிய சூத்திரம் ஆகியவற்றின் மூலம் குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

தொகுப்பு	விலைகள் 1952 அடிப்படை	விலைகள் 1957	அளவுகள் 1952 அடிப்படை	அளவுகள் 1957
1	6	10	5	12
2	5	6	10	8
3	7	7.5	6	7
4	8	9	3	5
5	9	10	4	4
6	11	7.5	7	6
7	10	8	9	10
8	7.5	9	8	8

11. அடியிற்காணும் விவரங்களிலிருந்து ஃபிஷரின் குறியீட்டெண் கால எதிர் மாற்றுச் சோதனை, காரணி எதிர் மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றைத் திருப்தி செய்கின்றது என்று காட்டுக.

பண்டங்கள்	1940 அடிப்படை ஆண்டு		1960 நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அ	1	5	2	1
ஆ	1.5	4	2.5	2
இ	2	3	3	5

12. அடியிற்காணும் விவரங்களிலிருந்து ஒப்புமை நோக்கிற்கு எந்தக் குறியீட்டெண்களை நீவிர் பயன்படுத்துவீர்? காரணங்கள் தருக.

ஆண்டு	அரிசி		கோதுமை		சோளம்	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1927	9.3	100	6.4	11	5.1	5
1934	4.5	90	3.7	10	2.7	3

13. கீழ்க்காணும் குறியீட்டெண்களிலிருந்து தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு ...	1939	1940	1941	1942	1943	1944
குறியீடு ...	100	110	175	250	300	400

14. இந்தியாவின் தொழில் உற்பத்தி பற்றிய கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

இந்தியாவின் தொழில் உற்பத்திக் குறியீட்டெண்

ஆண்டு	குறியீடு	ஆண்டு	குறியீடு	ஆண்டு	குறியீடு
1919—20	120	1924—25	137	1929—30	162
1920—21	122	1925—26	136	1930—31	149
1921—22	116	1926—27	149	1931—32	160
1922—23	120	1927—28	156	1932—33	160
1923—24	120	1928—29	137		

15. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு ...	1935	1936	1937	1938	1939	1940
நிலைத்த அடிப்படை குறியீட்டெண் ...	94	98	102	95	98	100

16. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடவும்.

ஆண்டு ...	1900	1901	1902	1903	1904
தொடர் அடிப்படை குறியீட்டெண் ...	80	110	120	90	140

(சென்னை பி.காம். 1961 செப்.)

17. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் குறியீடுகளி லிருந்து நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடவும்.

ஆண்டு ...	1935	1936	1937	1938	1939	1940
தொடர் குறியீடு ...	94.0	104.8	104.1	93.1	103.2	102.0

18. அடியிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலைத்த அடிப்படைக் குறியீட் டெண்கள் தயாரிக்கவும்.

ஆண்டு ...	1961	1962	1963	1964	1965	1966
தொடர் குறியீடு ...	100	97.4	143.6	125	95	110

19. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு வாழ்க்கைச் செல வுக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கவும்.

தொகுப்பு	குறியீட்டெண்	நிறை
உணவு	152	48
உடை	130	10
எரிபொருள்	110	5
வாடகை	100	12
இதரச் செலவுகள்	80	15

(சென்னை பி.காம். 1966 செப்.

20. ஒரு சராசரி தொழிலாளர் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டம் பற்றிய தொகுப்புக் குறியீட்டெண்களும், தொகுப்பு நிறைகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பெருக்குச் சராசரி யைப் பயன்படுத்தி வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கவும்.

தொகுப்பு	குறியீட்டெண்	நிறை
உணவு	277	58
உடை	283	7
எரிபொருள்	322	10
வாடகை	107	12
இதரச் செலவுகள்	386	4

21. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடவும்.

உறுப்பு	விலை		நிறை
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	
உணவு	39	47	4
உடை	14	18	3
எரிபொருள்	8	12	1
வீட்டு வாடகை	12	15	2
இதரச் செலவு	25	30	1

(சென்னை பி.காம். 1960 ஏப்.)

22. அடியிற்காணும் விவரங்களிலிருந்து 1961 ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1962-ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டைக் கணிக்கவும்.

பண்டங்கள்	நிறைகள்	ஒரு அலகுபண்டத்தின் விலை 1961	1962
		ரூ. பை.	ரூ. பை.
அ	40	16-00	20-00
ஆ	25	40-00	60-00
இ	5	0-50	0-50
ஈ	20	5-12	6-25
உ	10	2-00	1-50

23. 1950 ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 1951 ஆம் ஆண்டின் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடவும் (பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்துக).

பண்டம்	நிறை	ஒரு அலகுப் பண்டத்தின் விலை 1950			1951		
		ரூ.	அ.	பை	ரூ.	அ.	பை.
அ	20	8	0	0	12	0	0
ஆ	12	2	4	0	2	13	0
இ	4	0	0	9	0	0	9
ஈ	8	1	0	0	1	12	0
உ	6	20	0	0	22	0	0

24. விலை விகிதங்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து 1950 ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு 1958 இன் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பு	அடிப்படை ஆண்டின் நுகர்வு அளவு	அலகு	1950 ஏப்ரல் விலை	1958 ஏப்ரல் விலை
உணவு தானியம்	3 மணங்கு	1 மணங்கு	12.0	18.0
துணி	12 கெஜம்	1 கெஜம்	1.0	0.9
மின்சாரம்	40 அலகு	1 அலகு	0.2	0.25
வீட்டு வாடகை	3 முறைகள்	1 அறை	25.0	23.0
இதரச் செலவு	30 அலகு	1 அலகு	0.4	0.5

25. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து மொத்தச் செலவு முறையைப் பயன்படுத்தி 1959ஆம் ஆண்டின் அடிப்படையில் 1960 ஆம் ஆண்டின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பண்டங்கள்	1959-இல் நுகர்வு அளவு	அலகு	1959 இல் விலை	1960-இல் விலை
அரிசி	6 மணங்கு	1 மணங்கு	5—75	6—00
கோதுமை	6 மணங்கு	1 மணங்கு	5—00	8—00
பயறு	1 மணங்கு	1 மணங்கு	6—00	9—00
பருப்பு	6 மணங்கு	1 மணங்கு	8—00	10—00
நெய்	4 சேர்	1 சேர்	2—00	1—50
சீனி	1 மணங்கு	1 மணங்கு	20—00	15—00
எண்ணெய்	20 சேர்	1 மணங்கு	20—50	18—00
உப்பு	12 சேர்	1 மணங்கு	4—00	4—75
விறகு	12 மணங்கு	1 மணங்கு	0—75	1—00
துணி	50 கெஜம்	1 கெஜம்	0—50	0—75
வாடகை	—	1 வீடு	10—00	12—00

15. நிகழ்தகவு

(PROBABILITY)

சேர்வு (Combination)

A, B, C, D என்ற நான்கு மனிதர்களிலிருந்து இருவர் கொண்ட குழு ஒன்று அமைக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம். AB, AC, AD, BC, BD, CD என்ற ஆறுவகையான குழுக்கள் அமைக்க முடியும் இவ்வாறு அமைக்கப்படக் கூடிய ஒவ்வொரு குழுவுக்கும் ஒரு "சேர்வு" (combination) என்று பெயர். ஆகவே, 4 மனிதர்களிலிருந்து இருவர் கொண்ட சேர்வுகளை 6 வகையாக அமைக்கலாம். அதாவது, 4 மனிதர்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற இருவர் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். இதைச் சுருக்கமாக $4\,C_2$ என்று எழுதலாம். இதுபோல் மேற்கூறப்பட்ட 4 மனிதர்களிலிருந்து மூவர் கொண்ட குழுக்களைப் பின்வருமாறு நான்கு வகையாக அமைக்கலாம்.

ABC, ABD, ACD, BCD.

ஆகவே, 4 மனிதர்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற மூவர் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும். இதைச் சுருக்கமாக $4\,C_3$ என்று எழுதலாம். ஆகவே,

$$4\,C_2 = 6, \quad 4\,C_3 = 4$$

என்று காண்கிறோம். இவற்றின் மதிப்புக்களை முறையே

$$4\,C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6, \quad 4\,C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$$

என்று கணக்கிடலாம். இதுபோல், 5 உறுப்புக்களிலிருந்து 2 உறுப்புக்கள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$5\ C_2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

என்றும், 3 உறுப்புக்கள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$5\ C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

என்றும் காணலாம்.

மேலும், $5\ C_3 = 5\ C_2$ என்றும் காண்கிறோம்.

இதுபோல், 7 உறுப்புக்களிலிருந்து 3 உறுப்புக்கள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$7\ C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

என்றும், 4 உறுப்புக்கள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$7\ C_4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$$

என்றும் காணலாம்.

மேலும் $7\ C_3 = 7\ C_4$ என்றும் காணலாம்.

பொதுவாக, n உறுப்புகளிலிருந்து r உறுப்புக்கள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$n\ cr = \frac{n\ (n-1)\ (n-2) \ldots\ldots\ r \text{ எண்கள்}}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ r \text{ எண்கள்}}$$

$$= \frac{n\ (n-1)\ (n-2) \ldots\ldots\ (n-r+1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ r}$$

என்றும்,

$$n\ c\ r = n\ c_{n-r}$$

என்றும் காணலாம்.

மாதிரி : 137

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து 2 சீட்டுகள் எத்தனை வகையாகத் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு :

தெரிவு செய்யக்கூடிய வகைகள் $= 52\ C_2 = \dfrac{52\times 51}{1\times 2} = 1326$

மாதிரி : 5 பச்சைப் பந்துகளும், 8 மஞ்சள் பந்துகளும் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து 2 பச்சைப் பந்துகளும் 3 மஞ்சள் பந்துகளும் எத்தனை வகையாகத் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு :

5 பச்சைப் பந்துகளிலிருந்து 2 பச்சைப் பந்துகள் கொண்ட

சேர்வுகள் $= 5\ C_2 = \dfrac{5\times 4}{1\times 2} = 10$

8 மஞ்சள் பந்துகளிலிருந்து 3 மஞ்சள் பந்துகள் கொண்ட

சேர்வுகள் $= 8\ C_3 = \dfrac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56$

ஆனால் 2 பச்சைப் பந்துகள் கொண்ட ஒவ்வொரு சேர்வையும் 3 மஞ்சள் பந்துகள் கொண்ட 56 சேர்வுகளில் எந்தச் சேர்வுடன் வேண்டுமானாலும் சேர்க்கலாம். ஆகவே, 2 பச்சைப் பந்துகளும் 3 மஞ்சள் பந்துகளும் கொண்ட சேர்வுகள் $= 10\times 56 = 560$.

மாதிரி : 138

6 ஆண்கள், 8 பெண்கள், 11 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து 3 ஆண்கள், 5 பெண்கள், 9 குழந்தைகள் கொண்ட குழுவை எத்தனை வகையாகத் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு :

தெரிவு செய்யக்கூடிய சேர்வுகள் $= 6\ C_3 \times 8\ C_5 \times 11\ C_9$

$$= 6\ C_3 \times 8\ C_3 \times 11\ C_2$$

$$= \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3} \times \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} \times \frac{11\times 10}{1\times 2}$$

$$= 20\times 56\times 55$$

$$= 61600.$$

சில வரையறைகள்

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிட்டால் தலை அல்லது பூ மேல் நோக்கி விழுமென்பதை நாமறிவோம். இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு "நிகழ்ச்சி" (event) எனப்படுகிறது. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே நிகழக் கூடுமாகையால், "தலை விழுதல்", "பூ விழுதல்" ஆகிய நிகழ்ச்சிகளையும் "இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள்" (possible events) என்று கூறலாம். எல்லாவகை இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளும் சேர்ந்து "பூரண நிகழ்ச்சிகள்" (exhaustive events) ஆகின்றன. இதுபோல், 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று குறியிடப்பட்ட ஆறு பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு பகடை (die) யைச் சுண்டி வீசினால், ஆறு பக்கங்களுள் ஏதாவதொரு பக்கம் மேல் நோக்கி விழும். ஆகவே, "1 விழுதல்" "2 விழுதல்", "3 விழுதல்", ... ஆகிய ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். ஆகவே, ஒரு தாயக்கட்டையை வீசியெறியும் போது இயலக்கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் 6 ஆகும். இந்த ஆறு நிகழ்ச்சிகளும் பூரண நிகழ்ச்சிகளாகும். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிட்டால், தலை விழுந்தால் பூ விழ முடியாது ; பூ விழுந்தால் தலை விழமுடியாது. அதாவது, பூ விழுகின்ற நிகழ்ச்சியை விலக்கிவிட்டுத் தலை விழுகிறது ; அல்லது தலை விழுகின்ற நிகழ்ச்சியை விலக்கிவிட்டுப் பூ விழுகிறது. ஆகவே, "தலை விழுதல்", "பூ விழுதல்" ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் "ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்" (mutually exclusive events) என்று பெயர். இதுபோல் ஒரு தாயக்கட்டையை வீசியெறிந்தால் பக்கம் 1 மேல் நோக்கி விழும்போது மற்ற ஐந்து பக்கங்களும் மேல் நோக்கி விழமுடியாது. அதாவது, மற்ற ஐந்து பக்கங்களையும் விலக்கிவிட்டு பக்கம் 1 விழுகிறது. இது போல் ஒவ்வொரு பக்கமும் மேல் நோக்கி விழும்போது மற்ற ஐந்து பக்கங்களும் விலக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, ஒரு தாயக்கட்டையைச் சுண்டி வீசும்போது மொத்தம் இயலக்கூடிய 6 நிகழ்ச்சிகளுள் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் மற்ற 5 நிகழ்ச்சிகளையும் விலக்கிவிட்டு நிகழ்வதால் இந்த ஆறு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். ஒரு காரியத்தின் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் பிறவற்றை விலக்கிவிட்டு நிகழக்கூடியதாக யிருப்பின் அந்நிகழ்ச்சிகளுக்கு "ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்" என்று பெயர்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது தலைவிழ வேண்டுமென்று எதிர்பார்க்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். எனவே, "தலை விழுதல்" என்ற நிகழ்ச்சியை "வெற்றி" (success)

என்றும் "பூ விழுதல்" என்ற நிகழ்ச்சியைத் "தோல்வி" (failure) என்றும் கூறலாம். மொத்தம் இயலக்கூடிய இரு நிகழ்ச்சிகளுள் "தலை விழுதல்" என்ற நிகழ்ச்சி மட்டும் வெற்றிக்குச் சாதகமாக யிருப்பதால் அந்நிகழ்ச்சியைச் "சாதகமான நிகழ்ச்சி" (favourable event) என்று கூறலாம். ஆகவே, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி வீசினால் மொத்தம் இயலக்கூடிய இரு நிகழ்ச்சிகளுள் சாதகமான நிகழ்ச்சி 1 ஆகும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் "நிகழ்தகவு" (probability) என்பது, அந்நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைக்கும், மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைக்கு முள்ள விகிதமென வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{\text{சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

ஆகவே, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது, தலை விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றும், பூ விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றும் அறிகிறோம். இதுபோல், ஒரு தாயக்கட்டையைச் சுண்டிவிடும்போது ஒவ்வொரு பக்கமும் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு 1/6 என்று காணலாம். இப்பொழுது, ஒரு தாயக்கட்டையை வீசி யெறியும்போது பக்கம் 3 அல்லது பக்கம் 5 விழவேண்டுமென எதிர்பார்க்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, மொத்தமுள்ள 6 இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுள் "3 விழுதல்", "5 விழுதல்" ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் வெற்றிக்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகளாகும். ஆகவே, நிகழ்தகவு $= 2/6 = \frac{1}{3}$ என்று அறிந்துகொள்ளலாம். 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுப்பதாகக் கொள்வோம். மொத்தமுள்ள 52 சீட்டுகளில் ஒரு சீட்டை 52 வகையாக எடுக்க முடியுமாகையால் மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் 52 ஆகும். ஒரு சீட்டுக்கட்டில் மொத்தம் 4 இராணிச் சீட்டுகளிருக்குமாகையால் ஒரு இராணிச் சீட்டையெடுப்பதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் 4 ஆகும். ஆகவே

ஒரு இராணிச் சீட்டு எடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ஆகும்.

இவ்வாறு 52 சீட்டுகளிலிருந்து சீட்டுகள் எடுக்கப்படும்போது 52 சீட்டுக்களும் நன்றாக கலைக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு சீட்டும் எடுக்கப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்புப் பெற்றிருக்கவேண்டும். எல்லாச் சீட்டுகளும் எடுக்கப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்புப் பெற்றிருந்தால்தான் மேற்கூறப்பட்ட நிகழ்தகவு சரியாகயிருக்கும்.

ஆகவே, ஒரு காரியத்தின் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் யாவும் நிகழ்வதற்குச் சமவாய்ப்புப் பெற்றிருந்தால் அந்நிகழ்ச்சிகளுக்குச் ''சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள்'' அல்லது ''சரிபாதி வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள்'' (equally likely events) என்று பெயர். மேற்கூறப்பட்ட சீட்டுக்கட்டு உதாரணத்தில், மொத்தம் இயலக்கூடிய 52 சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளுள் ''ஒரு இராணிச் சீட்டு எடுத்தல்'' என்ற நிகழ்ச்சி 4 வகையாக நிகழலாம்; 48 வகையாக நிகழத் தவறலாம். ஆகவே, அந்நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{4}{52} = \frac{4}{4+48}$ என்றும், நிகழத் தவறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{48}{52} = \frac{4}{4+48}$ என்றும் கூறலாம்.

நிகழ்தகவு (Probability)

ஒரு நிகழ்ச்சி m வகையாக நிகழக்கூடுமெனவும், n வகையாக நிகழத் தவறுமெனவும், இந்த $(m+n)$ நிகழ்ச்சிகளும் சம வாய்ப்புள்ளவை யெனவும் கொண்டால், அந்நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{m}{m+n}$ என்றும், நிகழத் தவறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{n}{m+n}$ என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

பொதுவாக, ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு p என்றும், நிகழத் தவறுவதற்கான நிகழ்தகவு q என்றும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, மேற்கூறப்பட்ட வரையறையின்படி,

$$p = \frac{m}{m+n}, \quad q = \frac{n}{m+n}$$

என்று அறிகிறோம். மேலும், $p+q = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1.$

ஆகவே, $q = 1-p$ ஆகும்.

காரண காரிய, காரிய காரண நிகழ்தகவுகள் (A priori and a posteriori probabilities)

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது, மொத்தமுள்ள இரண்டு இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுள் ''தலை விழுதல்''

நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக ஒரு நிகழ்ச்சியும், "பூ விழுதல்" நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக ஒரு நிகழ்ச்சியு மிருப்பதால், தலை விழுதலுக்கு நிகழ்தகவு ½ என்றும், பூ விழுதலுக்கு நிகழ்தகவு ½ என்றும் கூறுகிறோம். இதுபோல், ஒரு தாயக்கட்டையைச் சுண்டியெறியும்போது, மொத்தமுள்ள 6 இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுள், ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கம் மேல் நோக்கி விழுவதற்குச் சாதகமாக ஒரேயொரு நிகழ்ச்சிதானிருக்குமாகையால் அக் குறிப்பிட்ட பக்கம் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு ⅙ என்று கூறுகிறோம். இங்கு, மொத்தமுள்ள இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையும், சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையும் நாணயம் அல்லது தாயக்கட்டையை வீசியெறிந்து கணக்கிடப் படாமல் அவைகளைச் சுண்டியெறியாமலேயே கணக்கியல் முறையில் நிர்ணயிக்கப்படுவதால், இவ்வாறு பெறப்படுகின்ற நிகழ்தகவுக்குக் "காரண காரிய நிகழ்தகவு" (apriori probability) அல்லது "கணக்கியல் நிகழ்தகவு" (mathematical probability) என்று பெயர். ஆனால் மேற்கூறப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ் தகவுகளைச் சோதனை முறையிலும் கணக்கிடலாம்.

ஒரு நாணயத்தை 10 தடவைகள் சுண்டியெறிந்து எத்தனை தடவைகளில் தலை விழுகிறது, எத்தனை தடவைகளில் பூ விழுகிறது என்று எண்ணிப்பாருங்கள். தலையும் பூவும் சம எண்ணிக்கைகளில் விழுந்திருக்குமென்று கூற முடியாது. நாணயத்தை 100 தடவைகள், 1000 தடவைகள், 10,000 தடவைகள் சுண்டிவிட்டு இச்சோதனையைச் செய்து, ஒவ்வொரு சோதனையிலும் எத்தனை தடவைகளில் தலை விழுகிறது எத்தனை தடவைகளில் பூ விழுகிறதென்று எண்ணிப்பாருங்கள். நாணயத்தைச் சுண்டிவிடுகின்ற மொத்த தடவைகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, விழுகின்ற தலைகளின் எண்ணிக்கையும் பூக்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக நெருங்கி வருவதைக் காணலாம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி விடும் தடவைகளின் எண்ணிக்கையை மிக அதிக அளவில் அதிகமாக்கினால், விழுகின்ற தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கும், மொத்தம் சுண்டிவிடப்பட்ட தடவைகளின் எண்ணிக்கைக்கு முள்ள விகிதம் ½ ஐ நெருங்கி வருவதைக் காணலாம். இவ்வாறு நெருங்கி வருகின்ற இவ்விகிதத்தின் எல்லையாகிய ½ ஐக் "தலை விழும் நிகழ்ச்சி" யின் நிகழ்தகவு என்று நிர்ணயிக்கலாம். இதுபோல், ஒரு பகடையை மிக அதிக எண்ணிக்கையிலான தடவைகளில் வீசியெறிந்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கம் மேல் நோக்கி விழுகின்ற தடவைகளின் எண்ணிக்கைக்கும் மொத்தம் வீசியெறிப்பட்ட தடவைகளின் எண்ணிக்கைக்கு முள்ள

விகிதம் $\frac{1}{6}$ஐ நெருங்கி வருவதைக் காணலாம். இவ்வாறு நெருங்கி வருகின்ற இவ்விகிதத்தின் எல்லையாகிய $\frac{1}{6}$ஐ அக் குறிப்பிட்ட பக்கம் விழுகின்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்று நிர்ணயிக்கலாம். இவ்வாறு சோதனையின் மூலம் நிர்ணயிக்கப் படுகின்ற ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவுக்குக் "காரிய காரண நிகழ்தகவு" (a posteriori probability) அல்லது "புள்ளியியல் நிகழ்தகவு" (Statistical probability) என்று பெயர்.

மாதிரி : 139

நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து இரண்டு "கிளாவர்" சீட்டுக்களை எடுப்பதற் குரிய நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்தமுள்ள 52 சீட்டுகளிலிருந்து 2 சீட்டுகள் எடுக்கப் படுகின்றன. ஆகவே, மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் = 52 சீட்டுகளிலிருந்து 2 சீட்டுகளின் சேர்வுகள் = $52\ C_2$

$$= \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 1326.$$

மொத்தமுள்ள கிளாவர் சீட்டுகள் = 13.

13 கிளாவர் சீட்டுகளிலிருந்து 2 கிளாவர் சீட்டுகளின்

சேர்வுகள் $= 13\ C2 = \frac{13 \times 12}{1 \times 2} = 78.$

∴ 2 கிளாவர் சீட்டுகளுக்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் = 78.

∴ 2 கிளாவர் சீட்டுகளுக்கு நி.த.

$$= \frac{\text{சாதகமான நிகழ்ச்சிகள்}}{\text{இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள்}}$$

$$= \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

மாதிரி : 140

3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 2 மஞ்சள் பந்துகளும், 2 கருப் புப் பந்துகளும் 3 பச்சைப் பந்துகளும் கொண்ட ஒரு பையி லிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அது வெள்ளை அல்லது மஞ்சள் பந்தாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

தீர்வு :

மொத்த முள்ள பந்துகள் = 3 வெ+2 ம+2க+3ப = 10. 10 பந்துகளிலிருந்து 1 பந்தை 10 வகையாக எடுக்கலாம். ஆகவே, மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் = 10. வெள்ளைப் பந்துகளும், மஞ்சள் பந்துகளும் சேர்ந்து மொத்தம் = 3+2 = 5. இந்த ஐந்து பந்துகளிலிருந்து ஒரு பந்து எடுத்தால் அது வெள்ளையாக அல்லது மஞ்சளாகயிருக்கும். ஆகவே,

சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் = 5.

$$\therefore \text{ நி.த. (1 வெ. அல்லது 1 ம. பந்து)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

மாதிரி : 141

5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கருப்புப்பந்துகளும் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால், அவற்றுள் ஒன்று வெள்ளையாகவும், மற்றது கருப்பாகவும் இருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் காண்க. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

தீர்வு :

மொத்தமுள்ள பந்துகள் = 5 வெ + 3க = 8. இந்த 8 பந்துகளிலிருந்து 2 பந்துகளின் சேர்வுகள் = 8 C2

$$= \frac{8\times7}{1\times2} = 28.$$

ஆகவே, மொத்தம் இயலக்கூடிய வகைகள் = 28. 5 வெள்ளைப் பந்துகளிலிருந்து 1 வெள்ளைப் பந்தை 5 வகையாக எடுக்கலாம். 3 கருப்புப்பந்துகளிலிருந்து 1 கருப்புப் பந்தை 3 வகையாக எடுக்கலாம். ஆகவே, 1 வெள்ளைப்பந்தையும், 1 கருப்புப் பந்தையும் 5 × 3 = 15 வகையாக எடுக்கலாம். அதாவது (1 வெ + 1 க) பந்துகளுக்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் = 15.

$$\therefore \text{ நி.த. (1 வெ. + 1 க. பந்து)} = \frac{18}{28}.$$

மாதிரி : 142

மூன்று தாயக் கட்டைகள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன. அப்போது ஒரு வீச்சில் (i) மொத்தம் 9, (ii) மொத்தம் 10க்கு மேற்படாத எண்ணிக்கைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் என்ன? (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு :

(i) இரண்டு தாயக்கட்டைகளிலும் 1 முதல் 6 வரை எண்களிருக்கும். ஆகவே, இரண்டு கட்டைகளிலிருந்து மொத்தம்

9ஐ (3+6), (4+5), (5+4), (6+3)

என்ற நான்கு வகைகளில் பெறலாம். ஆகவே, மொத்தம் 9 பெறுவதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் = 4.

ஒவ்வொரு கட்டையிலுள்ள ஒவ்வொரு பக்கமும் மற்றதிலுள்ள 6 பக்கங்களுடன் சேர்ந்து விழலாம். ஆகவே, மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்சிகள் = 6+6 = 36.

$$\therefore \text{நி.த. (மொத்தம் 9)} = \frac{4}{36} - \frac{1}{9}.$$

(ii) இரண்டு கட்டைகளிலிருந்து பெறக் கூடிய மீச்சிறு மொத்தம் (1+1) = 2, மீப்பெரு மொத்தம் (6+6) = 12. ஆகவே, 10க்கு மேற்படாத மொத்தங்கள் 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. ஆகும்.

மொத்தம் 2க்குச் சாதகமானவை : (1, 1) = 1 நிகழ்ச்சி.

மொத்தம் 3க்குச் சாதகமானவை : (1, 2), (2, 1) = 2 நிகழ்ச்சிகள்.

மொத்தம் 4க்குச் சாதகமானவை : (1,3) (2,2), 3,1), = 3 நிகழ்ச்சிகள்.

மொத்தம் 5க்குச் சாதகமானவை : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) = 4 நிகழ்ச்சிகள்

மொத்தம் 6க்குச் சாதகமானவை : (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) = 5 நிகழ்ச்சிகள்.

மொத்தம் 7க்குச் சாதகமானவை : (1,6), (2,5), (3,4,), (4,3), (5,2), (6,1) = 6 நிகழ்ச்சிகள்.

மொத்தம் 8க்குச் சாதகமானவை : (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) (6,2) = 5 நிகழ்ச்சிகள்.

மொத்தம் 9க்குச் சாதகமானவை : (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) = 4 நிகழ்ச்சிகள்

மொத்தம் 10க்குச் சாதகமானவை : $(4,6), (5,5), (6,4)$
$= 3$ நிகழ்ச்சிகள்.

∴ 10க்கு மேற்படாத மொத்தம் பெறுவதற்குச் சாதகமானவை
$= 1+2+3+4+5+6+5+4+3 = 33.$

மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 = 36.$

$$\therefore \text{நி.த. (10க்கு மேற்படாத மொத்தம்)} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

நிகழ்தகவுக் கூட்டல்விதி (Addition law of probability)

ஒன்றையொன்று விலக்குகின்ற பல நிகழ்ச்சிகளுள், ஒன்று அல்லது மற்றொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் மொத்தமாகும்.

நிறுவல்

மொத்தம் இயலக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை N என்க. இவற்றுள் முதல் நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமானவை a_1 என்றும், இரண்டாவது நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமானவை a_2 என்றும் கொள்க. P_1, P_2 என்பன இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளெனில்,

$$P_1 = \frac{a_1}{N}, \quad P_2 = \frac{a_2}{N}$$

ஆகும். இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதாவதொன்றுதான் நிகழ வேண்டுமாகையால் இவையிரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். ஆகவே, இவ்விரண்டில் ஏதாவதொன்றுக்குச் சாதகமானவை a_1+a_2 ஆகும். p என்பது இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு எனில்,

$$P = \frac{a_1+a_2}{N}$$

$$= \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N}$$

$$= p_1+p_2$$

= இருநிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூட்டல்.

குறிப்பு :—

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் *n* நிகழ்ச்சிகளெனில்,

நி.த. (A_1 அல்லது A_2 அல்லது $A_3, \ldots\ldots,$ அல்லது A_n)

= நி.த. (A_1) + நி.த. (A_2) + ... + நி.த. (A_n)

மாதிரி : 143

ஒருபையில் 5 பச்சை, 6 சிவப்பு, 13 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஏதாமொரு பந்தையெடுத்தால் அது பச்சையாகவோ, வெள்ளையாகவோ இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுயாது? (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

மொத்தமுள்ள பந்துகள் = 5ப + 6சி + 13வெ = 24. 24 பந்துகளிலிருந்து 1 பந்து எடுக்கப்படுவதால் மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் = 24.

5 ப. பந்துகளிலிருந்து 1 ப. பந்து எடுப்பதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் = 5.

$\therefore$ நி.த. (1ப. பந்து) $= \dfrac{5}{24}$.

இதுபோல், நி.த (1 வெ. பந்து) $= \dfrac{13}{24}$

1 ப. பந்து அல்லது 1 வெ. பந்துதான் எடுக்க வேண்டுமாகையால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$\therefore$ நி.த. (1ப. அல்லது 1வெ.) = நி.த (1ப) + நி.த. (1வெ.)

$$= \frac{5}{24} + \frac{13}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events)

இரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்றின் நிகழ்வு மற்றதன் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்காதிருந்தால் அவ்விருநிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளெனப்படுகின்றன.

இரு நாணயங்கள் ஒருங்கே வீசப்படுவதாகக் கொள்வோம். ஒரு நாணயத்தில் தலைவிழுவது மற்றநாணயத்தில் தலை விழுவதை எவ்வகையிலும் பாதிக்காது. ஆகவே, முதல் நாணயத்தில் தலைவிழுகின்ற நிகழ்ச்சியும் சார்பற்றவையாகும்.

இதுபோல் ஒருதாயக் கட்டையை இருமுறை வீசியெறிந்தால், முதல் முறையில் பக்கம் 1 விழுகின்ற நிகழ்ச்சி இரண்டாவது முறையில் பக்கம் 1 விழுகின்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை எவ்வகையில் பாதிக்காது. ஆகவே, முதல் முறையில் பக்கம் 1 விழுகின்ற நிகழ்ச்சியும் இரண்டாவது முறையில் பக்கம் 1 விழுகின்ற நிகழ்ச்சியும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

5 பச்சைப் பந்துகளும் 3 சிவப்புப் பந்துகளுமுள்ள ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுத்தால் அது பச்சைப்பந்தாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு 5/8 ஆகும். இப்பொழுது முதல் தடவையிலெடுக்கப்பட்ட பந்தை மீண்டும் பையில் வைத்துவிட்டு இரண்டாம் முறையாக ஒரு பந்து எடுத்தால் அது சிவப்புப் பந்தாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு 3/8 ஆகும். முதல் முறையில் எடுக்கப்பட்ட பந்து மீண்டும் பையினுள் வைக்கப்பட்டுவிடுவதால் முதல் முறையில் பச்சைப்பந்து எடுக்கப்படுகின்ற நிகழ்ச்சி இரண்டாம் முறையில் சிவப்புப் பந்து எடுக்கின்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை எவ்வகையிலும் பாதிக்காது. ஆகவே, முதல் முறையில் பச்சைப்பந்து எடுக்கின்ற நிகழ்ச்சியும், இரண்டாம் முறையில் சிவப்புப் பந்து எடுக்கின்ற நிகழ்ச்சியும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

நிகழ்தகவுப் பெருக்கல்விதி **(Mulitiplication law of probability)**

ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற பல நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு அச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கற்பலனாகும்.

நிறுவல் :

A_2, A_2 என்ற இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளைக் கருதுக. இவற்றுள் A_1 என்ற நிகழ்ச்சி மொத்தமுள்ள n_1 இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுள் a_1 தடவைகள் நிகழுமென்றும், A_2 என்ற நிகழ்ச்சி மொத்தமுள்ள n_2 இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுள் a_2 தடவைகள் நிகழுமென்றும் கொள்க. p_1 , p_2 என்பன முறையே

A_1, A_2 ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவுக ளெனில்,

$$P_1 = \frac{a_1}{n_1}, \quad p_2 = \frac{a_2}{n_2}$$

ஆகும். ஆனால் A_1, A_2 என்பன சார்பற்ற நிகழ்ச்சியாகையால் இரண்டும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குச் சாதகமான தடவைகள் a_1a_2 ஆகும். மொத்தம் இயலக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் n_1n_2 ஆகும். ஆகவே, இருநிகழ்ச்சிகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு p என்றால்,

$$P = \frac{a_1a_2}{n_1n_2}$$

$$= \frac{a_1}{n_1} \cdot \frac{a_2}{n_2}$$

$$= p_1 \cdot p_2$$

= இரு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவு களின் பெருக்கற்பலன்.

இதுபோல், p_1, p_2, ..., P_n என்பன n சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் தனித்தனியே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகளெனில், அந்த n நிகழ்ச்சிகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு $p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots P_n$ ஆகும்.

குறிப்பு :

இரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு காண அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவு களைக் கூட்ட வேண்டும்; இரு நிகழ்ச்சிகளுமே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு காண அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவு களைப் பெருக்கவேண்டும்.

மாதிரி : 144

ஒருபையில் 5 வெண்ணிறப் பந்துகளும், 10 கருமை நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. எடுத்த பந்தைத் திரும்பவும் பையில் வைக்காமல் ஒவ்வொன்றாக 5 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (1) அவை யாவும் கருமை (2) அவையாவும் வெண்மை நிறமுடையனவாக யிருத்தற்குரிய நிகழ்தகவுகள் காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

தீர்வு :

மொத்தமுள்ள பந்துகள் = 5வெ+10க = 15. (1) முதல் தடவையில் 1க. பந்து எடுக்க நி.த. $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

எடுத்த பந்தைத் திரும்ப வைக்கவில்லையாகையால், இரண்டாவது பந்து எடுக்கும்போது,

மொத்தமுள்ள பந்துகள் = 5வெ+9க = 14.

மொத்தமுள்ள க. பந்துகள் = 9.

ஆகவே, நி. த, (இரண்டாவது தடவையில் 1 க ப,)

$$= \frac{9}{14}$$

இதுபோல், நி. த. (3வது தடவையில் 1 க. ப.)

$$= \frac{8}{13}$$

நி. த, (4வது தடவையில் 1 க. ப.)

$$= \frac{7}{12}$$

நி. த. (5வது தடவையில் 1 க. ப.)

$$= \frac{6}{11}$$

இவ்வைந்து நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ வேண்டுமாகையில்,

நி. த. (5 தடவைகளில் 5 க. ப.)

$$= \frac{2}{3} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \times \frac{6}{11}$$

$$= \frac{84}{1001}$$

(2) இதுபோல் எல்லாப் பந்துகளும் வெள்ளையாக யிருத்தற்குரிய நிகழ் தகவு $= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{3003}$

மாதிரி : 145

ஒரு பையில் 4 சிவப்பு, 3 நீலப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரு தடவைக்கு 2 பந்துகள் வீதம் இரண்டு தடவைகள் பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. முதல் தடவையில் 2 சிவப்புப் பந்துகளும், இரண்டாவது தடவையில் 2 நீலப் பந்துகளும்,

(அ) முதல் தடவையில் எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகளும் திரும்பவும் பையில் வைக்கப்பட்டால்,

(ஆ) திரும்பவும் வைக்கப்படாவிட்டால், பெறுவதற்குரிய நிகழ் தகவுகள் காண்க.

தீர்வு :

(அ) எடுக்கப்பட்ட பந்துகள் திரும்ப வைக்கப்படுகின்றன.

முதல் தடவையில் மொத்தமுள்ள பந்துகள்

$= 4$சி. $+ 3$நீ. $= 7.$

7 பந்துகளிலிருந்து 2 பந்துகளின் சேர்வுகள்

$$= 7C_2 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$$

4 சி. பந்துகளிலிருந்து 2 சி. பந்துகளின் சேர்வுகள்

$$= 4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

ஆகவே, முதல் தடவையில் நி. த. (2 சி. பந்து)

$$= \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

எடுத்த 2 பந்துகளையும் மீண்டும் வைத்து விடுவதால்,

இரண்டாவது தடவையில் மொத்தமுள்ள பந்துகள்

$= 4$ சி. $+ 3$நீ. $= 7$

7 பந்துகளில் 2 பந்துகளின் சேர்வுகள்

$$= 7C_2 = 21$$

3 நீலப் பந்துகளிலிருந்து 2 நீலப் பந்துகளின் சேர்வுகள்

$$= 3C_2 = 3$$

ஆகவே, இரண்டாவது தடவையில் நி. த. (2 நீ, பந்து)

$$= \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ வேண்டுமாகையால்,

முதல் தடவையில் 2 சி. பந்துகளும், இரண்டாவது தடவையில் 2 நீ. பந்துகளும் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$$

(ஆ) எடுக்கப்பட்ட பந்துகள் திரும்ப வைக்கப்படவில்லை.

முன்போல், முதல் தடவையில் நி.த. (2 சி. பந்து)

$$= \frac{2}{7}$$

இரண்டாவது தடவையில் மொத்த பந்துகள்

= 2 சி. + 3 நீ. = 5

5 பந்துகளிலிருந்து 2 பந்துகளின் சேர்வுகள்

$$= 5C_2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

மொத்தமுள்ள 3 நீ. பந்துகளிலிருந்து 2 நீ. பந்துகளின் சேர்வுகள் $= 3C_2 = 3$

ஆகவே, இரண்டாவது தடவையில் நி. த. (2 நீ. பந்து)

$$= \frac{3}{10}$$

இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ வேண்டுமாகையால்,

முதல் தடவையில் 2 சி. பந்துகளும் இரண்டாவது தடவையில் 2 நீ. பந்துகளுக்குமுரிய நி. த.

$$= \frac{2}{7} = \frac{3}{10} = \frac{3}{35}$$

மாதிரி : 146

இரண்டு பைகள் உள்ளன. ஒன்றில் 4 சிவப்பு, 6 பச்சைப் பந்துகளும், மற்றொன்றில் 5 சிவப்பு, 4 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாமொரு பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கிறோம். அது பச்சைப் பந்தாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு என்ன ?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

தீர்வு :

இரண்டாவது பைகளிலிருந்து முதல் பையை எடுக்க நி.த.

$$= \frac{1}{2}$$

இரண்டு பைகளிலிருந்து 2வது பையை எடுக்க நி.த.

$$= \frac{1}{2}$$

முதல் பையிலிருந்து 1 பச்சைப் பந்து எடுக்க நி. த.

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

முதல் பையைத் தெரிவு செய்கின்ற நிகழ்ச்சியும், அதிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து எடுக்கின்ற நிகழ்ச்சியும் ஒருங்கே நிகழ வேண்டுமாகையால், முதல் பையைத் தெரிவு செய்து அதிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

இரண்டாவது பையிலிருந்து 1 பச்சைப் பந்து எடுக்க நி.த.

$$= \frac{4}{6}$$

எனவே, இரண்டாவது பையைத் தெரிவு செய்து அதிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து எடுக்க நி.த. $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

ஆனல், இரண்டு பைகளிலிருந்து ஏதாவது ஒரு பையிலிருந்துதான் பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அதாவது, மேற்கண்ட நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதாவது ஒன்றுதான் நிகழ வேண்டும்.

ஆகவே, ஏதாவது ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து

எடுக்க நிகழ் தகவு $= \frac{3}{10} + \frac{2}{9} = \frac{47}{90}$

மாதிரி : 147

நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு முழுச் சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்ருக இரு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு இரண்டாவது சீட்டு எடுக்கப்படு முன் மீண்டும் சீட்டுக் கட்டில் வைக்கப்பட்டால், எடுக்கப்படுகின்ற இரண்டு சீட்டுகளும் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச் சேர்ந்த வகையாக யிருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு என்ன ?

தீர்வு :

சீட்டுக் கட்டிலுள்ள மொத்த சீட்டுகள் = 52

ஒவ்வொரு வகையிலுமுள்ள சீட்டுகள் = 13

ஆகவே முதல் தடவையில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச்

சேர்ந்த சீட்டு ஒன்று எடுக்க நி.த. $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

முதல் தடவை எடுக்கப்பட்ட சீட்டு திரும்பவும் வைக்கப் படுவதால், இரண்டாவது தடவையும் அதே வகையைச்

சேர்ந்த சீட்டு ஒன்று எடுக்க நி. த. $= \frac{1}{4}$

இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ வேண்டுமாகையால்,

தேவையான நி.த. $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

மாதிரி : 148

ஒரு நாணயம் மூன்று தடவைகள் சுண்டி வீசப்படுகிறது. தலையும், பூவும் மாற்றி மாற்றி விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன?

தீர்வு :

தலையும், பூவும் மாற்றி மாற்றிப் பின்வரும் இருவகைகளுள் ஏதாவதொரு வகையில் நிகழலாம்.

வகை 1 : தலை, பூ, தலை

வகை 2 : பூ, தலை, பூ

வகை 2க்கு நிகழ் தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

வகை 1க்கு நிகழ் தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

இவ்விரு வகைகளுள் ஏதாவதொன்றுதான் நிகழ வேண்டுமாகையால் தேவையான நிகழ் தகவு $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

மாதிரி : 149

இரண்டு தாயக் கட்டைகளை மூன்று தடவைகள் வீசினால் குறைந்தது ஒரு இரட்டை யெண் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

தீர்வு :

இருதாயக் கட்டைகளிலிருந்து பெறக் கூடிய இரட்டைகள்

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) ஆகும்.

அதாவது சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் $= 6$

மொத்தம் இயலக் கூடிய நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 = 36$

ஆகவே, ஒரு வீச்சில் ஒரு இரட்டை பெற நி. த.

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ஒரு வீச்சில் ஒரு இரட்டையும் பெருமலிருக்க நி.த.

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

ஆகவே, மூன்று வீச்சுகளிலும் ஒரு இரட்டையும் பெருமலிருக்க நிகழ் தகவு $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

ஆகவே, மூன்று வீச்சுகளிலும் குறைந்தது ஒரு இரட்டை பெற நிகழ் தகவு $= 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

மாதிரி 150 :

ஒருவன் ஒரு பறவையை மூன்று தடவைகளில் ஒரு தடவை வீதம் சுடுவான். இந்த அடிப்படையில் அவன் ஒரு பறவையை நோக்கி மும்முறை சுடுகிறான். பறவை சுடப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

தீர்வு :

பறவையை ஒரே தடவையில் சுடுவதற்கு நி. த. $= \frac{1}{3}$

பறவையை ஒரே தடவையில் சுடாமலிருக்க நி. த.

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

மூன்று தடவைகளிலும் பறவையைச் சுடமாலிருக்க

$$\text{நிகழ் தகவு} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

ஆகவே, மூன்று தடவைகளில் பறவையைச் சுடுவதற்குரிய

$$\text{நிகழ் தகவு} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

விஞத்தாள் 15.

(1) (அ) காரண காரிய நிகழ் தகவுக்கும், காரிய காரண நிகழ் தகவுக்குமுள்ள வேறுபாடுகள் என்ன ? ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு எடுத்துக் காட்டு தருக.

(ஆ) E_1, E_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் எப்போது சார்பற்றவை என்றும், ஒன்றையொன்று விலக்கி வருபவை என்றும் நீங்கள் கூறுவீர்கள் ?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(2) (அ) ஒரு சாதாரண தாயக்கட்டை உருட்டப்படுகிறது. ''ஆறு'' வருவதற்குரிய நிகழ் தகவு $\frac{1}{6}$ என்றால் என்ன பொருள்?

(ஆ) தெரிப்பின்றி (நிரூபணமின்றி) இரண்டு அல்லது மூன்று எடுத்துக் காட்டுகளோடு நிகழ் தகவுக் கூட்டல் விதியை விளக்குக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(3) '' ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி விட்டால் தலை தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் தகவு $\frac{1}{2}$; ஒரு தாயக் கட்டையை வீசி விட்டால் ஒரு தாயம் விழுவதற்குரிய நிகழ் தகவு $\frac{1}{6}$''

இந்த வாசகங்களின் உட்கருத்தினை (சுட்டுப்பொருளை) விளக்குக.

(4) E என்ற ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு p என்றால் என்ன பொருள்? கூட்டு, பெருக்கு நிகழ் தகவு விதிகளைக் கூறி ஏதேனுமொன்றை நிறுவுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

(5) நிகழ் தகவு பெருக்கல் விதியைக் கூறி, தெரிப்பு தந்து, ஓரிரண்டு எடுத்துக் காட்டுகளால் அவ்விதியை விளக்குக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(6) நிகழ் தகவின் பெருக்கல் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கவும். (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

(7) காரண காரிய நிகழ் தகவு என்பதன் பொருள் என்ன? நிகழ் தகவு கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைக் கூறுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(8) நிகழ் தகவு என்பதன் மூலம் நீங்கள் அறிந்து கொள்வதென்ன வென்று விளக்குக. நிகழ் தகவு கூட்டல் விதியைக் கூறி நிறுவுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.

(9) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்பவற்றை விளக்குக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

(10) நிகழ் தகவுக் கூட்டல் விதியைக் கூறி நிறுவுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

பயிற்சி 16.

(1) ஒரு பையில் 7 வெள்ளை, 5 கருப்பு, 4 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால்,

(அ) இரண்டு பந்துகளும் வெள்ளையாக யிருப்பதற்கு,

(ஆ) ஒன்று கருப்பாகவும், மற்றது பச்சையாகவுமிருப் பதற்கு நிகழ் தகவுகள் காண்க.

(2) 10 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து மூன்று சீட்டுகள் ஒரே தடவையில் எடுக்கப்பட்டால், அம் மூன்று சீட்டுகளும் இராஜாக்களாக யிருத்தற் குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

(3) 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படு கின்றன. அவ்விரு சீட்டுகளுள் ஒன்று இராஜாவாக வும், மற்றொன்று இராணியாகவுமிருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் காண்க.

(4) 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து மூன்று சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அம் மூன்று சீட்டு களும் ஒரு இராஜா, ஒரு இராணி, ஒரு ஜாக்கியாக யிருத்தற்குரிய நிகழ் தகவினைக் காண்க.

(5) 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து ஆறு சீட்டு கள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றுள் மூன்று சிவப் பாகவும், மூன்று கருப்பாகவுமிருக்க நிகழ்தகவென்ன?

(6) நான்கு நாணயங்கள் ஒருங்கே வீசப்பட்டால் இரண்டு பூக்கள் விழுவதற்குரிய நிகழ் தகவு என்ன ?

(7) ஒரு பையில் 6 வெள்ளை, 9 கருப்பு பந்துகள் உள்ளன. ஒரு தடவைக்கு 4 பந்துகள் வீதம் இரண்டு தடவைகள் பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

(அ) இரண்டாவது தடவைக்கு முன் பந்துகள் திரும்பவும் வைக்கப்பட்டால்,

(ஆ) பந்துகள் மீண்டும் வைக்கப்படாவிட்டால், ஒவ்வொரு வகையிலும் முதல் தடவையில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் இரண்டாவது தடவையில் 4 கருப்புப் பந்துகளும் வருவதற்குரிய நிகழ் தகவு என்ன ?

(8) 7 சிவப்பு, 11 வெள்ளைப் பந்துகள் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) இரண்டும் வெள்ளையாக யிருப்பதற்கு, (ii) ஒன்று வெள்ளையாகவும் ஒன்று சிவப்பாகவுமிருப்பதற்கு (iii) இரண்டும் சிவப்பாக யிருப்பதற்கு நிகழ் கதவுகள் காண்க.

(9) 7 வெள்ளை 3 கருப்புப் பந்துகளும் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து நான் 4 பந்துகளை எடுக்கிறேன். குறைந்தது ஒரு கருப்புப்பந்தாவது பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் காண்க. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

(10) 5 வெள்ளை, 7 சிவப்புப் பந்துகள் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டுபந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. முதலில் எடுக்கப்பட்ட பந்து திரும்ப வைக்கப்படாவிட்டால், முதலில் ஒரு வெள்ளைப்பந்தும் இரண்டாவது ஒருசிவப்புப் பந்தும் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

(11) 11 சிவப்பு, 13 வெள்ளைப் பந்துகள் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டு வெள்ளைப்பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

(12) ஒருபையில் 3 வெள்ளை, 2 கருப்புப் பந்துகளும் இன்னொரு பையில் 5 வெள்ளை, 3 கருப்புப்பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றுள் ஒருபையிலிருந்து ஒருபந்து எடுக்கப்பட்டால், அதுவெள்ளையாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

(13) ஒருபையில் 5 வெள்ளை, 3 கருப்புப்பந்துகளும், இன்னொருபையில் 4 வெள்ளை, 5 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றுள் ஒருபையிலிருந்து இரண்டு பந்துகள்

எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டும் வெவ்வேறு நிறங்களிலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(14) 4 வெள்ளை, 2 சிவப்பு, 5 வெள்ளை, 1 சிவப்பு, 3 வெள்ளை, 4 சிவப்பு பந்துகள் கொண்ட மூன்று பைகள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒருபையிலிருந்து ஒருசிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(15) 3 வெள்ளை, 7 சிவப்பு, 15 மஞ்சள்; 10 வெள்ளை, 6 சிவப்பு, 9 மஞ்சள் பந்துகள் கொண்ட இரண்டுபைகள் உள்ளன. ஒவ்வொருபையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகின்றது. இரண்டும் ஒரே நிறத்திலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(16) ஒரு கணித நூலிலுள்ள கணக்குகளில் 75%ஐ Aயும், 70%ஐ Bயும் தீர்ப்பார்கள். அந்நூலிலிருந்து தெரிவுசெய்யப்படுகின்ற ஒரு கணக்கை இருவரும் தீர்ப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(17) ஒரு பறவையை A ஐந்தில் நான்கு தடவைகளிலும், B நான்கில் மூன்று தடவைகளிலும், C மூன்றில் இரண்டு தடவைகளிலும் சுடுவார்கள். அவர்கள் மூவரும் சேர்ந்து ஒரு பறவையைச் சுடுகிறார்கள். அப்பறவை சுடப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

16. ஈருறுப்புப் பரவல்

(BINOMIAL DISTRIBUTION)

ஒருசோதனையில் ஆறுபக்கங்கள் கொண்ட தாயக் கட்டை 5 தடவைகள் உருட்டப்படுகிறதெனக் கொள்வோம். பக்கம் 1 மேல்நோக்கி விழுவதை வெற்றியெனக் கொள்க. தாயக் கட்டை ஒருதடவை உருட்டப்படும்போது வெற்றியின் நிகழ்தகவு $p = \frac{1}{6}$; தோல்வியின் நிகழ்தகவு $q = 5/6$. இச்சோதனையில் உருட்டப்படுகின்ற 5 தடவைகளில் 3 வெற்றிகளும் 2 தோல்விகளும் பெறவேண்டுமெனக் கொள்வோம். மொத்தம் உருட்டப்படுகின்ற 5 தடவைகளில் 3 வெற்றிகளும் 2 தோல்விகளும் எந்தவரிசையில் வேண்டுமானாலும் நிகழலாம். முதல் மூன்று தடவைகளில் வெற்றிகளும், கடைசி இரண்டு தடவைகளில் தோள்விகளும் பெறுவது ஒரு வகையாகும். முதல் மூன்று தடவைகளில் வெற்றி நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^3$. மீதியுள்ள இரண்டுதடவைகளில் தோல்வி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = (\frac{5}{6})^2$. ஆகவே, 5 தடவைகளில் 3 வெற்றிகளும் 2 தோல்விகளும் மேற்கண்ட வரிசைப்படி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2$. ஆனால் 5 தடவைகளில் மூன்று வெற்றிகளை $5c3$ வகையான வரிசைகளில் பெற முடியும். ஆகவே, 5 தடவைகளில் 3 வெற்றிகளும் 2 தோல்விகளும் ஏதாவதொரு வரிசையில் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $5c^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2$. ஆனால் $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. ஆகவே, இந்நிகழ்தகவினை $5c^3\, p^3q^2 = 5c_3\, p^3q^{5-3}$ என்று எழுதலாம். பொதுவாக p, q என்பன ஒருதனிச் சோதனையில் வெற்றி, தோல்விகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளெனில், n சோதனைகளைக் கொண்ட ஒருசோதனைத் தொடரில் r வெற்றிகளும், $(n-r)$ தோல்விகளும் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $n\,cr\, p^rq^{n-r}$ ஆகும். இதுபோன்ற N சோதனைத் தொடர்களில் r வெற்றிகளைத் தருகின்ற சோதனைத்தொடர்களின் எண்ணிக்கை N, $ncr\, p^rq^{n-r}$ ஆகும். ஆகவே, $r = 0, 1, 2,$

......, n என்ற மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டு N சோதனைத் தொடர்களில் முறையே 0, 1, 2, ..., n வெற்றிகளைத் தருகின்ற சோதனைத் தொடர்களின் எண்ணிக்கைகளைப் பெறலாம். ஆனால், $N. ncr\ p^r q^{n-r}$ இல் $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ என்று பிரதியிட்டுக் கிடைக்கக் கூடிய $N. q^n$, $N. nc_1\ p\ qn-1$ $N. nc_2\ p^2\ qn-2$, ..., $N. p^n$ என்ற எண்கள் யாவும் $N\ (q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களாகும். ஆகவே, ஒருதனிச்சோதனையில் வெற்றி, தோல்விகளின் நிகழ்தகவுகள் முறையே p, q எனில், ஒருசோதனைத் தொடருக்கு n சோதனைகள் வீதம் N சோதனைத் தொடர்களில் 0, 1, 2, ..., n வெற்றிகளைத் தருகின்ற சோதனைத் தொடர்களின் எண்ணிக்கைகள் முறையே $N\ (q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களாகும். எனவே, 0, 1, 2, ..., n வெற்றிகளை மாறி x இன் மதிப்புக்களாகவும், அவை நிகழக் கூடிய சோதனைத் தொடர்களின் எண்ணிக்கைகளை அவற்றிற்குரிய நிகழ்வெண்களாகவும் கொண்டு அமைக்கப்படுகின்ற ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு "ஈருறுப்புப் பரவல்" (Binomial distribution) என்று பெயர். இப்பரவலின் மாதிரி கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை (x)	சோதனைத் தொடர்களின் எண்ணிக்கை (f)
0	$N. q^n$
1	$N. n\ C_1\ q^{n-1}\ p$
2	$N. n\ C_2\ q^{n-2}\ p^2$
...	...
...	...
r	$N. n\ C_r\ q^{n-r}\ p^r$
...	...
...	...
n	$N. p^n$
மொத்தம்	$N. (q+p)^n = N.$

ஈருறுப்புப் பரவல் கி. பி. 1700 ஆம் ஆண்டில் ஜேக்கப் பெர்நௌலி (Jacob Bernoulli) என்பவரால் முதன் முதலில் நிறுவப்பட்டது. ஆகவே, இப்பரவல் பெர்நௌலியின் பரவல் என்றும் அழைக்கப்படுவதுண்டு. இது ஒரு தனித் தனி மாறியைக் கொண்ட பரவலாகும். இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி np என்றும், திட்டவிலக்கம் $\sqrt{npq}$ என்றும் நிறுவப்பட்டுள்ளன. $p = q = \frac{1}{2}$ என்றால் இது ஒரு சீரான பரவலாக யிருக்கும். ஆகவே, $p = q = \frac{1}{2}$ ஆகயிருக்கும்போது கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு மூன்றும் சமமாகயிருக்கும். p, q சமமாக யில்லாவிடில் இது சீரற்ற பரவலாகயிருக்கும். நாணயம் சுண்டி விடுதல், பகடை உருட்டுதல் போன்ற விளையாட்டுக்களிலும், சூதாட்டங்களிலும் இப்பரவலின் கொள்கைகள் அடங்கியிருப்பதைக் காணலாம்.

மாதிரி : 151

10 காசுகள் ஒருங்கே வீசப்பட்டால் சரியாக 5 தலைகள் விழுதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

தீர்வு :

p = ஒரு காசு வீசப்பட்டால் தலைவிழுதற்குரிய நி. த. $= \frac{1}{2}$

$\therefore \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$n = 10.$

5 தலைகள் விழுதற்குரிய நி. த. $= n\,C_r\, p^r\, q^{n-r}$. (இங்கு $r = 5$)

$$= 10\,C_5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10-5}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{252}{1024}$$

$$= \frac{63}{256}$$

மாதிரி : 152

ஆண்—பெண் பிறப்பு விகிதம் 51 : 49 ஆனால், ஒரே நாளில் ஒரு ஆஸ்பத்திரியில் பிறந்த 10 பிள்ளைகளில் 8 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தைகளாக இருத் தற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ? (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

தீர்வு ;

p = ஒரு பெண் குழந்தை பிறந்தற்குரிய நி.த. $= \frac{49}{100} = .49$

q = ஒரு ஆண் குழந்தை பிறந்தற்குரிய நி.த. $= \frac{51}{100} = .51$

$$n = 10.$$

10 குழந்தைகளில் 8 பெண் குழந்தைகளாகயிருக்க நி.த.

$$= 10\,C_8\,(.49)^8\,(.51)^2$$

10 குழந்தைகளில் 9 பெண் குழந்தைகளாக யிருக்க நி.த.

$$= 10\,C_9\,(.49)^9\,(.51)^1$$

10ம் பெண் குழந்தைகளாக யிருக்க நி.த. $= (.49)^{10}$

∴ 8 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தை களாயிருக்க நிகழ்தகவு

$$= 10C_8\,(.49)^8\,(.51)^2 + 10\,C_9\,(.49)^9\,(.51) + (.49)^{10}$$

$$= 10\,C_2\,(.49)^8\,(.51)^2 + 10\,(.49)^9\,(.51) + (.49)^{10}$$

$$= (.49)^8\,[45\,(.51)^2 + 10\,(.49)\,(.51) + (.49)^2]$$

$$= (.49)^8\,[11.7045 + 2.499 + .2401]$$

$$= (.49)^8\,[14.4436]$$

$$= 14.4436 \times (.49)^8.$$

மாதிரி : 153

எட்டு நாணயங்கள் ஒருங்கே 1024 முறை சுண்டி யெறியப் படுகின்றன. கொள்கை முறைப்படி 0, 1, 2, ..., 8 தலை கள் ஒருங்கே தோன்றும் நிகழ்வெண் பரவலை யெழுதுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு :

இங்கு $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 8$, $N = 1024$.

ஈருறுப்பு பரவல் வருமாறு :

தலைகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்வெண்	
0	$1024 (\frac{1}{2})^8$	= 4
1	$1024\ 8\ C_1 (\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2})^7$	= 32
2	$1024\ 8\ C_2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^6$	= 112
3	$1024\ 8\ C_3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^5$	= 224
4	$1024\ 8\ C_4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^4$	= 280
5	$1024\ 8\ C_5 (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^3$	= 224
6	$1024\ 8\ C_6 (\frac{1}{2})^6 (\frac{1}{2})^2$	= 112
7	$1024\ 8\ C_7 (\frac{1}{2})^7 (\frac{1}{2})$	= 32
8	$1024\ 8 (\frac{1}{2})^8$	= 4
மொத்தம்		1024

மாதிரி : 154

கடல் பிரயாணங்களில் சராசரியாக 10 கப்பல்களுக்கு ஒன்று வீதம் மூழ்கிவிடுகிறதென்றால் எதிர்பார்க்கப் படுகின்ற 5 கப்பல்களில் குறைந்தது 4 கப்பல்கள் பத்திரமாக வந்து சேருவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

p = ஒரு கப்பல் பத்திரமாக வந்து சேர நி. த. $= \frac{9}{10}$

$$q = 1-p = 1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$n = 5.$$

4 கப்பல்கள் பத்திரமாக வந்து சேர நி. த. $= 5\,C_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10^1}\right)^1$

$$= \frac{5 \times 6561}{100000}$$

5 கப்பல்களும் பத்திரமாக வந்து சேர நி.த. $= \left(\dfrac{9}{10}\right)^5 = \dfrac{59049}{100000}$

$\therefore$ குறைந்தது 4 கப்பல்கள் பத்திரமாக வந்து சேர நி. த.

$$= \frac{5 \times 6561}{100000} + \frac{59049}{100000}$$

$$= \frac{91854}{100000} = \frac{45927}{50000}$$

மாதிரி : 155

ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 5; பரவற்படி (விலக்க வர்க்கச் சராசரி) $3\frac{1}{3}$. அம்மாறி 2 என்ற மதிப்பை யேற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

(மதுரை பி.ஏ. 1970 செப்.)

தீர்வு :

இங்கு கூட்டுச் சராசரி $np = 5$.

விலக்கவர்க்கச் சராசரி $npq = 3\frac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$

$$\therefore \quad 5q = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \quad q = \tfrac{2}{3}$$

ஆகவே, $p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $\therefore \quad n = \dfrac{5}{p} = \dfrac{5}{\frac{1}{3}} = 15$

$x = 2$ ஆனால், நி. த. $= n\,C_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

$$= 15\,C_2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \left(\tfrac{2}{3}\right)^{15-2}$$

$$= 105\,\frac{2^{13}}{3^{15}}$$

வினாத்தாள் 16.

(1) ஈருறுப்புப் பரவலை வரையறுக்கவும். அது நடைமுறையில் காணப்படுகின்ற சூழ்நிலைகளைக் கூறுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(2) ஈருறுப்புப் பரவலென்றால் என்னவென்று விளக்குக; ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

(3) ஈருறுப்புப் பரவல் எப்படி இயல்பாகவே (இயற்கையில்) உருவாகிறதென்பதை விளக்குக. ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி என்ன? பரவற்படி என்ன? (மதுரை பி.ஏ. 1970 செப்.)

(4) கூட்டு, பெருக்கல் நிகழ்தகவு விதிகளைக் கொண்டு எப்படி ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் பெறப்படுகிறதென விளக்குக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(5) ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் விதியைக் கூறுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

பயிற்சி 17.

(1) ஒரு மனிதன் ஒரு நாணயத்தை எட்டு முறை சுண்டுகிறான். (i) எல்லாம் தலைகளாக, (ii) 6 தலைகளும் 2 பூக்களும், (iii) 5 தலைகள் அல்லது அதற்குக் குறைவாகப் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(2) ஒரு கன சதுரத் தாயக்கட்டை ஒரு முறைக்கு எட்டு தடவைகள் வீதம் ஏராளமான முறைகள் வீசப்படுகின்றன. 5 அல்லது 6 தோன்றுவது ஒரு வெற்றியெனப்படுகிறது. 3 வெற்றிகளைக் கொண்ட முறைகள் மொத்த முறைகளில் என்ன விகிதத்திலிருக்கும்?

(3) ஒரு நிறைவான நாணயம் ஒரு முறைக்கு 12 தடவைகள் வீதம் 1000 முறைகள் சுண்டியெறியப்படுகிறது. (அ) எத்தனை முறைகளில் 8 தலைகளும் 4 பூக்களும் எதிர்பார்க்கலாம்? (ஆ) எத்தனை முறைகளில் குறைந்தது 8 தலைகள் எதிர்பார்க்கலாம்?

(4) 12 தாயக்கட்டைகள் 26306 தடவைகள் உருட்டப்படுகின்றன. 5 அல்லது 6 தோன்றும்படியாக உருட்டுவது

ஒரு வெற்றியெனப்படுகிறது. சோதனையின் முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்வெண்
0	185
1	1149
2	3265
3	5475
4	6114
5	5194
6	3067
7	1331
8	403
9	105
10ம் மேலும்	18

ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் விதியின்படி எதிர்பார்க்கப் படுகின்ற நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிட்டு, கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண்ணுடன் ஒப்பிடுக. உண்மையான கூட்டுச் சராசரி திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றை எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற கூட்டுச் சராசரி ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிடுக.

(5) ஆண் குழந்தைகளின் விகிதம் $\frac{1}{2}$ என்று கொண்டு 6 குழந்தைகளைக் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் (i) எல்லாக் குழந்தைகளும் ஒரே இனமாக யிருக்க, (ii) 4 குழந்தைகள் பெண்களாகயிருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

(6) 10 கப்பல்களில் 9 கப்பல்கள் துறைமுகத்துக்குப் பத்திரமாக வந்துசேருவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(7) ஒரு சோதனை தோல்வியடைவதைப்போல் இருமடங்கு முறைகளில் வெற்றிபெறும். ஆறு சோதனைகளில் குறைந்தது நான்குமுறைகளில் வெற்றி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க

17. இயல்நிலைப் பரவல்
(NORMAL DISTRIBUTION)

ஒரு பொருளின் உயரம் அல்லது நீளம், எடை, பருமன், திண்மையளவு,...... போன்ற ஏதாவது ஒரு அளவைப் பல முறைகள் அளவிட்டுப் பெறக்கூடிய அளவுகள் யாவும் பெரும் பாலும் சமமாக யிருப்பதில்லை. இதற்குப் பல்வேறு காரணங் களைக் கூறலாம். சுற்றுப் புறத்தின் தட்ப, வெப்ப நிலைகள் காரணமாக அளவுகோல்களில் ஏற்படுகின்ற மாறுதல்கள், அளவு கோல்களைக் கையாளுகின்ற முறைகளிலுள்ள மாறுபாடு கள், பின்ன அளவுகளைக் கணக்கிடுவதிலேற்படுகின்ற மாறு பாடுகள் இப்படிப் பல்வேறு காரணங்களால் ஒரே அளவைப் பல முறைகள் அளவிட்டுப் பெறக் கூடிய அளவுகள் மாறுபட லாம். இவ்வாறு அளவிடப்பட்ட பல்வேறு அளவுகளை மாறி யின் பல்வேறு மதிப்புக்களாகக் கொண்டு அமைக்கக் கூடிய நிகழ்வெண் பரவலின் நிகழ்வெண்வரை மணிபோன்ற அமைப் புடைய ஒரு சீரான பரவலாக யிருப்பதைக் காணலாம். இந்த அளவுகளில் காணப்படுகின்ற வித்தியாசங்கள் யாவும் அளவு களின் பிழைகள் (errors of measurements) ஆகும். ஆகவே, இவற்றைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலுக் குரிய நிகழ்வெண் வரைக்குப் "பிழைகளின் இயல்நிலைவரை" (normal curve of error) என்று பெயர். ஒரு மரத்திலுள்ள இலை களின் நீளங்கள், மனிதர்கள் உயரங்கள், கைகளின் நீளங்கள், பருமன்கள், பாதங்களின் அளவுகள் போன்ற இயற்கையான இயற்பாடுகள் பற்றிய விவரங்களின் நிகழ்வெண் பரவல்களுக் குரிய நிகழ்வெண் வரைகள் யாவும் பிழைகளின் இயல்நிலை வரையைப் போன்ற அமைப்பையே பெறுகின்றன. ஆகவே, பிழைகளின் இயல்நிலைவரையை "இயல்நிலை நிகழ்வெண் வரை" (normal frequency curve) என்றும் கூறலாம். விண்வெளியில் கோள்களின் சுற்று வட்டப் பாதைகளை அளவிடும்போது ஏற்

பட்ட தற்செயல் பிழைகளை விவரிக்க கௌஸ் (Gauss) என்னும் கணித வல்லுநர் இவ்வியல்நிலை நிகழ்வெண்வரை முறையைப் பயன்படுத்தியதால் இது "கௌஸியன் வரை" (Gaussian curve) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. சில இயற்பாடுகளின் நிகழ்தகவுகளைக் குறிப்பிட இவ்வரை பயன்படுவதால் இது "இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரை" (normal probability curve) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. எனினும் இது சுருக்கமாக 'இயல் நிலைவரை" (Standard normal curve) என்றே அழைக்கப்படுகிறது. இதற்குரிய நிகழ்வெண் பரவல் "இயல்நிலைப் பரவல்" (Standard normal dirtribution) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இத்தகைய ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி m, திட்ட விலக்கம் σ, மொத்த நிகழ்வெண் N என்றும் கொண்டு, இயல்நிலைப் பரவலின் மாறியை x என்றும், நிகழ்வெண்ணை y என்றும் குறிப்பிட்டால், x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே பின்வரும் தொடர்பு இருப்பதாக நிறுவப்பட்டிக்கிறது.

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

இங்கு e என்பது நேப்பியரின் மாறிலியாகிய 2.71828, π என்பது வட்ட மாறிலியாகிய $\frac{22}{7} = 3.14159$ ஆகும். n இன் மதிப்பை மிகப் பெரியதாகக் கொண்ட ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலி p, qல் ஆகியவற்றில் எதுவுமே மிகச் சிறியதாக யில்லாவிடில், அந்த ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் அமைப்பைப் பெறுகிறது. ஆகவே, இயல்நிலைப் பரவலின் மேற்கண்ட சமன்பாட்டை ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்தும் பெறலாம்.

$x = m$ஐ ஆதியாகக் கொண்டு வரையப்படுகின்ற இதன் இயல்நிலைவரையில் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து மாறியின் மதிப்புக்களின் விலக்கங்களை x அச்சுத் தூரங்கள் குறிப்பிடுகின்றன என்பதை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்டு வரையப்படுகின்ற ஒரு இயல் நிலைவரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

ஆகும். இத்தொடர்பில், x இன் மதிப்புப் பூச்சியமாகும்போது y மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது. ஆகவே, இயல்நிலைப் பரவலில் முகட்டளவும், கூட்டுச் சராசரியும் சமமாகயிருக்கும்.

xக்குப் பதிலாக $-x$ஐப் பிரதியிடுவதால் y இன் மதிப்பு மாற வில்லையாகையால் இயல்நிலைவரை y அச்சின் இருபுறமும் ஒரே சீராக யிருக்கும்; ஆகவே, இடைநிலை யளவும் கூட்டுச் சராசரிக் குச் சமமாயிருக்கும். அதாவது, ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகட்டளவு மூன்றும் சம மாகயிருக்கும். x இன் எந்த மதிப்புக்கும் y இன் மதிப்புப் பூச்சியமாகவில்லை யென்பதை இத்தொடர்பின் மூலம் அறிய லாம். மேலும் $\pm 3\sigma$ க்குப் புறம்பான x இன் மதிப்புக்களுக் குரிய y இன் மதிப்புக்கள் மிகவும் சிறியதாக யிருப்பதைக் காண லாம். இயல்நிலைவரைக்கும் x அச்சுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பு மொத்த நிகழ்வெண் N க்குச் சமமாக யிருக்கும். $x = \pm .6745\ \sigma$ என்ற புள்ளிகள் வழியே வரையப்படுகின்ற நிலைத் தூரங்களுக்கிடைப்பட்ட பரப்பு $\frac{N}{2}$ என்று தொகை நுண் கணி தம் (Integral calculus) மூலம் காணலாம். ஆகவே, இயல்நிலைப் பரவலின் கால்ம விலக்கம் 0.6705 ஆகும். இதுபோல் இப் பரவலின் சராசரி விலக்கம் $0.7979\ \sigma$ என்றும் காணலாம். ஒரு முகட்டு இயல்நிலைப் பரவல்களுக்கு கால்ம விலக்கம், சரா சரி விலக்கம் ஆகியவற்றைத் தோராயமாக $\frac{2}{3}\sigma$. $\frac{4}{5}\sigma$ என்று கொள்ளலாம். ஆகவே, ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவை $\frac{2}{3}\sigma : \frac{4}{5}\sigma : \sigma = 10 : 12 : 15$ என்ற விகிதங்களிலிருக்கும்.

இயல்நிலைப் பரவலும் நிகழ்தகவும்

x என்ற இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச் சராசரி m, திட்ட விலக்கம் σ எனில், அதற்குரிய இயல்நிலைவரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

என்று கண்டோம். இப்பொழுது, $\frac{x-m}{\sigma} = t$ என்று பிரதியிட் டால் இச்சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-t^2/2}$$

என்ற அமைப்பைப் பெறுகிறது.

அதாவது,

$$y = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-t^2/2}$$

ஆகும். இப்பொழுது, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ என்று

எழுதினால்,

$$y = \frac{N}{\sigma} \phi(t)$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். ஆனால் $\phi(t)$ என்பது

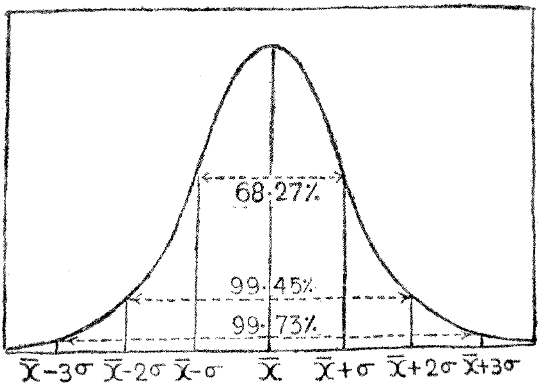
$$\frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

என்ற கோவையிலிருந்து $N = 1$, $\sigma = 1$, $m = 0$, $x = t$ என்ற பிரதியீடுகளின் மூலம் பெறப்படுகின்ற ஒரு சிறப்பு வகையாகும். ஆகவே, $z = \phi(t)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலின் மொத்தப் பரப்பு 1 ஆகும். எனவே, $z = \phi(t)$ என்ற வரையில் $t = t_1$, $t = t_2$ ஆகிய இரு புள்ளிகள் வழியே வரையப்படுகின்ற நிலைத் தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள பரப்பானது t யின் மதிப்பு t_1 க்கும் t_2 க்குமிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் கொடுக்கிறது. இதன் காரணமாக $z = \phi(t)$ என்பது "இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரை" (normal probability curve) என்றழைக்கப் படுகிறது. குறிப்பாக, இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியாகிய mஐ ஆதியாகக் கொண்டால், $t = \frac{x-0}{\sigma} = \frac{x}{\sigma}$ என்ற பிரதியீட்டின் மூலம் இயல்நிலைப் பரவலை இயல் நிலை நிகழ்தகவுப் பரவலாக மாற்றிவிடலாம், இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரையின் மீப்பெரு நிலைத்தூரமாகிய y அச்சுக்கும், $t = \frac{x}{\sigma}$ இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய நிலைத்தூரங்களுக்கு மிடையே யுள்ள பரப்பளவுகளின் பல்வேறு மதிப்புகளும் பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

$t = \frac{x}{\sigma}$	பரப்பு	$t = \frac{x}{\sigma}$	பரப்பு
0.0	.0000	2.0	.4772
0.1	.0398	2.1	.4821
0.2	.0793	2.2	.4861
0.3	.1179	2.3	.4893
0.4	.1554	2.4	.4918
0.5	.1915	2.5	.4938
0.6	.2257	2.6	.4953
0.7	.2580	2.7	.4965
0.8	.2881	2.8	.4974
0.9	.3159	2.9	.4981
1.0	.3413	3.0	.4987
1.1	.3643	3.1	.4990
1.2	.3849	3.2	.4993
1.3	.4032	3.3	.4995
1.4	.4192	3.4	.4997
1.5	.4332	3.5	.4997
1.6	.4452	3.6	.4998
1.7	.4554	3.7	.49999
1.8	.4641	3.8	.49993
1.9	.4713	3.9	.49995

பட்டியலிலிருந்து $t = \frac{x}{\sigma} = 1$க்குரிய பரப்பு .3413 என்று காண்கிறோம். அதாவது, கூட்டுச் சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை வரையில் $x = 0$, $x = \sigma$ ஆகியவற்றின் வழியே செல்லக்கூடிய நிலைத்தூரங்களுக்கிடையே யுள்ள பரப்பளவு .3413 ஆகும். அதாவது, ஒரு இயல்நிலைவரையில் $x = \bar{x}$, $x = \bar{x} + \sigma$ ஆகியவற்றின் வழியே வரையப்படுகின்ற நிலைத்தூரங்களுக்கிடையே யுள்ள பரப்பு .3413 ஆகும்.

எனவே, $\bar{x}-\sigma$, $\bar{x}+\sigma$ ஆகியவற்றிற்குரிய நிலைத் தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள பரப்பளவு $2 \times .3413 = .6826$ ஆகும். அதாவது சுமார் சுமார் 68% உறுப்புக்கள் $\bar{x}-\sigma$ க்கும் $\bar{x}+\sigma$ க்குமிடையிலிருப்பதாக அறிகிறோம். இதுபோல், $t = \frac{x}{\sigma} = 1.96$ க்குரிய பரப்பளவு. 4750 என்று பட்டியலிலிருந்து காண்கிறோம். எனவே, $\bar{x}-1.96\ \sigma$ க்கும் $\bar{x}+1.96\ \sigma$ க்கு மிடையிலுள்ள பரப்பு $2 \times .4750 = .9500$ ஆகும். அதாவது, 95% உறுப்புக்கள் $\bar{x} \pm 1.96\ \sigma$ எல்லைகளுக்கிடையே யுள்ளன என்றும், 5% உறுப்புக்கள் மட்டுமே $\bar{x} \pm 1.96\ \sigma$ எல்லைகளுக்கு வெளியே யுள்ளன என்றும் அறிகிறோம். ஆகவே, $\bar{x}$ இலிருந்து மாறி x இன் ஒரு மதிப்பினுடைய விலக்கம் $1.96\ \sigma$ க்கும் அதிகமாக யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு 0.05 என்று கூறலாம். இதுபோல், $\bar{x}$ இலிருந்து மாறி x இன் ஒரு மதிப்பினுடைய விலக்கம் $2.576\ \sigma$ க்கும் அதிகமா யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு 0.01 என்றும் காணலாம். மேலும், $\bar{x} \pm 2\ \sigma$ எல்லைகளுக்கிடையே 99 45% உறுப்புக்களும், $\bar{x} \pm 3\ \sigma$ எல்லைகளுக்கிடையே 99.73% உறுப்புகளுமிருப்பதைப் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து காணலாம்.



படம் 37.

நண்பாதி இடைவெளி **(Probable Error—P.E.)**

இயல்நிலைப் பரவலில் $\bar{x} \pm .6745\ \sigma$ எல்லைகளுக்கிடையே மொத்த உறுப்புக்களில் 50% உறுப்புக்களிருப்பதாகக் கண்டோம். கூட்டுச் சராசரியின் இரு பக்கமுள்ள இச்சம விலக்கமாகிய $.6745\ \sigma$ க்கு "நண்பாதி இடைவெளி" (Probable Error) என்று பெயர்.

அதாவது,

நண்பாதி இடைவெளி = ·6745 σ = கால்ம இடைவெளி.

ஆகவே, ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் நண்பாதி இடைவெளியிலிருந்து கால்மங்களைக் கணக்கிடலாம்.

முதல் கால்மம் = $\bar{x}-$ நண்பாதி இடைவெளி = $\bar{x} - .6745\,\sigma$.

மூன்றும் கால்மம் = $\bar{x}+$ நண்பாதி இடைவெளி = $\bar{x} + .6745\,\sigma$.

மாதிரி : 156

கூட்டுச் சராசரி 15, விலக்கவர்க்கச் சராசரி 10-ம் கொண்ட ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு யாது?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

தீர்வு :

இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு : $y = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{\frac{-x(-m)^2}{2\sigma 2}}$

இங்கு, $m = 15,\ \alpha^2 = 10.\ \therefore\ \sigma = \sqrt{10}.$

ஆகவே, சமன்பாடு :— $y = \frac{N}{\sqrt{20\pi}}\, e^{\frac{-(x-15)^2}{20}}$

மாதிரி : 157

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் மத்தியிலுள்ள 75% பரப்பளவை உள்ளடக்கிய எல்லைகளைக்காண்க.

தீர்வு :

இயல்நிலைப்பரவலில் $-t_1$ க்கும் t_1 க்கு மிடைப்பட்ட பரப்பு 75% = ·75 என்க.

$\therefore\ t = 0$க்கும் $t = t_1$ க்கு மிடைப்பட்ட பரப்பு $= \frac{\cdot 75}{2} = \cdot 375$

இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து,

$t = 0$ க்கும் $t = 1.1$க்கு மிடையேயுள்ள பரப்பு = ·3643,

$t = 0$ க்கும் $t = 1.2$க்கு மிடையேயுள்ள பரப்பு = ·3849.

என்று காண்கிறோம். இவ்விவரங்களிலிருந்து .3750 பரப்புக்குரிய t இன் மதிப்பு 1.15 என்று சாதாரண கணக்கீட்டு முறையில் கணக்கிடலாம். ஆகவே, $t = \pm 1.15$ எல்லைகளுக்கிடையேயுள்ள பரப்பு 75% ஆகும்.

$$\text{ஆனால் } t = \frac{x-m}{\sigma} \quad \therefore = m + \sigma t.$$

$t = -1.15$ என்றால், $x = m - 1.15\,\sigma$.

$t = +1.15$ என்றால், $x = m + 1.15\,\sigma$.

ஆகவே, $x \pm 1.15\,\sigma$ எல்லைகளுக்கிடையே 75% பரப்பு உள்ளது.

மாதிரி : 158

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் மாறுவிகிதக்கெழு 2% முழுத் தொகுதியின் 80% உறுப்புக்கள் 120 செ.மீ.க்கு அதிகமாகயிருந்தால் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

தீர்வு :

இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி m, திட்டவிலக்கம் σ எனக் கொள்க.

$$\text{மாறு விகிதக் கெழு} = \frac{\sigma}{x} \times 100 = 2$$

$$100\,\sigma = 2\bar{x} = 2m.$$

$$\therefore \quad \sigma = 0.02m.$$

$t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ என்று பிரதியிடுக.

$t = 120$ க்கு மேல் 80% இருப்பதாலும், $x = m$க்கு மேல் 50% இருக்குமாதலாலும், $x = 120$ க்கும், $x = m$க்கு மிடையே 30% இருக்கும். அதாவது, $-t = \dfrac{120-m}{\sigma}$ க்கும், $t=0$ க்கு மிடையே 30% இருக்கும். ஆகவே, $t=0$ க்கும்,

$t = \dfrac{120-m}{\sigma}$ க்கு மிடையேயும் 30% இருக்கும்.

ஆனால் பட்டியலிலிருந்து, $t = \cdot 8$க்குரிய பரப்பு = .2881.

$t = \cdot 9$க்குரிய பரப்பு = .3159.

என்று காண்கிறோம். ஆகவே, ·3000 பரப்புக்குரிய t இன் மதிப்பு .8428 என்று கணக்கிடலாம்.

ஆகவே, $\frac{120-m}{\sigma} = -.8428.$

$$120-m = -.8428\,\sigma = -.8428 \times .02m$$

$$= -.0169\,m$$

$$120 = -.0169\,m + m = .9831\,m.$$

$$\therefore\ m = \frac{120}{.9831} = 122.06.$$

$$\sigma = .02m = .02 \times 122.06 = 2.44$$

ஆகவே, இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி = 122.06.

திட்டவிலக்கம் = 2.44.

இயல்நிலைப் பரவலின் பயன்களும் முக்கியத்துவமும்

ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற பல சமவாய்வுக் கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகள், திட்ட விலக்கங்கள் போன்ற புள்ளியியல் மாறிலிகளின் பரவல்கள் இயல் நிலைப் பரவல்களாகயிருப்பதால், கூறு பரவல்களிலிருந்து பெறப்படுகின்ற மதிப்புக்களிலிருந்து அவைதெரிவு செய்யப் பட்ட இனத்தொகுதியின் மதிப்புக்களை மதிப்பிடமுடிகிறது. இயல் நிலைப்பரவலையொத்த அமைப்புக்களைக் கொண்ட பரவல் களின் தன்மைகளை இயல்நிலைப் பரவலின் தன்மைகளின் மூலம் எளிதில் அறிந்துகொள்ளலாம். பிறப்பு, இறப்பு, திருமணம், உற்பத்தி வீதங்கள் போன்ற சமூக, பொருளாதார மாறிகள் இயல்நிலையிலிருக்கின்றன. புத்திக் கூர்மை போன்ற உளவியல் விவரங்கள் பற்றிய பரவல்களும், உயரம், எடை ஆகிய விவரங்களின் பரவல்களும் இயல்நிலையிலிருக்கின்றன. தாவர வியலில் பல்வேறு வகையான ஒட்டுச்செடிகளின் விகிதங்கள் இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டிருக்கின்றன. பல்வேறு வகை யான சோதனைகளில் கண்டறியப்பட்ட அளவுகளுக்கும், எதிர் பார்க்கப்பட்ட அளவுகளுக்குமுள்ள வித்தியாசங்கள் இயல் நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன, இவ்வாறு இயற்கையோ

டியைந்த பல்வேறு வகையான விவரங்களும் இயல்நிலைப் பரவலின் அமைப்பைக் கொண்டிருப்பதால் இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகளிலிருந்து அப்பரவல்கள் பற்றிய தன்மைகளை மிக எளிதில் அறிந்து கொள்ளமுடிகிறது. இயல்நிலைப் பரவலின் இவ்வரிய பண்பின் அடிப்படையிலேயே கூறெடுத்தல் கொள்கைகள் யாவும் அமைந்திருக்கின்றன என்பது இங்கு குறிப்பிடத்தக்கது.

வினாத்தாள் 17.

(1) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கிய பண்புகளைக் கூறுக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப், 68 செப்., மதுரை பி.எஸ்ஸி. 69 ஏப்., 70ஏப்.)

(2) புள்ளியியலில் இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தைப் பற்றி ஒரு குறிப்பெழுதுக. அப்பரவலின் சில பயனுள்ள பண்புகளைக் கூறுக.

(மதுரை பி.ஏ 1971 ஏப்.)

(3) இயல்நிலைப் பரவலென்றாலென்ன? அதன் பண்புகளும் பயன்களும் யாவை?

(மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

(4) இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரை, அதன்பண்புகள், முக்கியத்துவசோதனைகளில் அதன் பயன்கள் ஆகியவைபற்றி ஒருவிளக்கமான குறிப்பு வரைக.

(மதுரை எம்.ஏ. 1969)

(முக்கியத்துவ சோதனைகளில் இயல்நிலைப் பரவலின் பயன்கள் பற்றி அடுத்துவரும் அத்தியாயத்தில் காண்க).

(5) இயல்நிலைப் பரவலென்றாலென்ன? முக்கியமான பண்புகளைக் கூறுக. பொருளாதாரப் படிப்புகளுக்குப் பயன்படும் வண்ணம் புள்ளியியல் கொள்கைகளிலும், செய்முறைகளிலும் அதன்பங்கு பற்றி விவாதிக்கவும்.

(மதுரை எம்.ஏ. 1969 ப.மு.)

(6) இயல்நிலைப் பரவல்பற்றியும், புள்ளியியல் கருத்து முறையில் முக்கியத்துவம் பற்றியும் ஒரு குறிப்பு வரைக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

(7) சிறு குறிப்பு வரைக:—

(i) இயல்நிலைவரை (சென்னை பி.காம். 1966 செப்.)

(ii) இயல்நிலைப் பரவல் (மதுரை பி.காம். 1966 செப்.)

(iii) பிழைகளின் இயல்நிலைவரை

(சென்னை பி.காம். 1967 செப்., மதுரை எம்.ஏ. 1970)

பயிற்சி 18.

(1) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 39; விலக்கவர்க்கச் சராசரி 16. இவ்வியற் பரவலின் பரவற் சார்பினை யெழுதுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(2) கூட்டுச்சராசரி 15, விலக்கவர்க்கச் சராசரி 10-ம் கொண்ட ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு யாது? பட்டியல் உதவிகொண்டு மேற்கண்ட பரவலில் 12க்கும் 15க்குமிடைப்பட்ட நிகழ்வெண் விகிதம் என்னவெனக் காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(3) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 8; விலக்கவர்க்கச் சராசரி 2.25. இயல்நிலைப் பரவலின் வளைபடச் சமன்பாட்டை யெழுதுக.

(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(4) கூட்டுச் சராசரி 75, திட்டவிலக்கம் 8 கொண்ட ஒரு இயல்நிலைப் பரவல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 75 சத வீத நிகழ்வெண்ணை மத்தியில் கொண்டுள்ள எல்லைகள் யாவை? (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

18. கூறெடுத்தல் கொள்கைகள்

(SAMPLING THEORY)

இனத் தொகுதியும் கூறுகளும் (Population and Samples)

பல உறுப்புக்களின் சேர்க்கை அல்லது புள்ளிவிவரக் குவியலுக்கு "இனத் தொகுதி" (population) என்று பெயர். இது "புள்ளி விவர இனத்தொகுதி" (statistical population) என்றும் அழைக்கப்படுவதுண்டு. புள்ளியியல் இனத்தொகுதி யென்பது மக்கள் தொகுதியையும் குறிப்பிடலாம்; அல்லது வேறு எப்படிப்பட்ட உறுப்புக்களடங்கிய தொகுதியையோ அல்லது புள்ளி விவரக் குவியலையோ குறிப்பிடலாம். ஒரு இனத் தொகுதியிலடங்கிய உறுப்புக்கள் எண்ணிக்கைக் குட்பட்ட தாகவுமிருக்கலாம்; எண்ணற்றதாகவுமிருக்கலாம். எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு இனத் தொகுதிக்கு "வரம்புடை இனத் தொகுதி" அல்லது "வரம்புற்ற இனத்தொகுதி" (finite population) என்று பெயர். எண்ணற்ற உறுப்புக்களைக் கொண்ட இனத்தொகுதிக்கு "எண்ணற்ற இனத்தொகுதி" (infinite population) என்று பெயர். இனத்தொகுதி மெய்யாகவு மிருக்கலாம்; கற்பனையாகவு மிருக்கலாம். ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் உயரங்களின் அளவுகளடங்கிய ஒரு புள்ளி விவரக் குவியல் ஒரு "மெய்யான இனத்தொகுதி" அல்லது "தற்கால இனத்தொகுதி" (real population) எனப்படும். ஒரு நாணயத்தை 1000 முறைகள் சுண்டி வீசினால் இயலக்கூடிய எல்லாவகை நிகழ்ச்சிகளுமடங்கியது ஒரு "கற்பனை இனத்தொகுதி" (hypothetical population) எனப்படும். ஒரு இனத்தொகுதி இன்னொரு பெரிய இனத் தொகுதியிலிருந்து பெறபட்டதாகவு மிருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு கல்லூரியைச் சேர்ந்த ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களைத் தனியே கருதினால் ஒரு இனத் தொகுதியாகக் கொள்ளலாம். ஆனால், அவ்வகுப்பு மாணவர்கள் யாவரும் அக்கல்

லூரி மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு பெரிய இனத்தொகுதியின் ஒரு பிரிவைச் சேர்ந்தவர்களாவர். அக்கல்லூரியை ஒரு பல்கலைக் கழகத்தைச் சேர்ந்த ஒரு அங்கமாகக் கருதினால், அப்பல்கலைக் கழக மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு பெரிய இனந்தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக அக்கல்லூரி மாணவர்களடங்கிய இனத்தொகுதி அமைகிறது. ஒரு பெரிய இனத்தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு சிறிய இனத்தொகுதிக்குக் "கூறு" (sample) என்றும், அக்கூறைத் தெரிவு செய்தலுக்குக் "கூறெடுத்தல்" (sampling) என்றும் பெயர். ஒரு இனத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஆய்வுக்குப் பயன்படுத்த முடியாத தருணங்களிலும், உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஆய்வுக்குப் பயன்படுத்துவதால் மிதமிஞ்சிய அளவில் பணம், காலம், உழைப்பு தேவைப்படுமென்றிருந்தாலும் அவ்வினத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்று தெரிவு செய்யப்பட்டு அக்கூறுபற்றிய ஆய்விலிருந்து பெறப்படுகின்ற முடிவுகள் அவ்வினத்தொகுதியின் பிரதிநிதித்துவ முடிவுகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்றன. இத்தகைய கூறு ஆராய்ச்சிகளில் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக யிருக்குமாகையால் சிறந்த பயிற்சி பெற்றவர்களைக் கொண்டு, குறுகிய காலத்தில், குறைந்த செலவில் சிறந்த முறையில் ஆய்வுகளை வெற்றிகரமாகச் செய்து முடிக்க முடியும். ஆனால் கூறெடுத்தல் முறையில் ஆய்வு செய்பவர் மிகுந்த எச்சரிக்கையுடனும், மிகவும் கவனமுடனு மிருக்கவேண்டும். ஏனெனில், தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறு இனத்தொகுதியின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்கக் கூடியதாக யில்லாவிடில் ஆய்வு முழுவதும் வீணாகிவிடும். மேலும் கூறெடுத்தல் முறைகள் யாவும் நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளின் அடிப்படையில் அமைந்திருப்பதால் நிகழ்தகவுக் கொள்கைகள் பற்றிய நல்லறிவு கொண்டவர்கள் மட்டுமே இம்முறையைப் பயன்படுத்தி சரியான முடிவுகளைப் பெறமுடியும்.

கூறெடுத்தல் முறைகள்

ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்யப் பலவகையான முறைகள் வகுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆய்வின் தன்மைக்கேற்ப, இனத்தொகுதியின் பண்புகளையும், கூறு ஆய்விலிருந்து பெறப்படுகின்ற முடிவுகளைப் பயன்படுத்துகின்ற நோக்கங்களையும் கருத்திற்கொண்டு தகுந்த முறையில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்யவேண்டும்.

(அ) *சமவாய்ப்புக் கூறு* (Random Sample)

ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து நிகழ்தகவு கொள்கையின் அடிப்படையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட உறுப்புக்களைக் கொண்ட

கூறு ஒன்றுக்குச் ''சம வாய்ப்புக் கூறு''[2] என்று பெயர். இவ்வாறு தெரிவு செய்யும்போது இனத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் அக்கூறில் இடம் பெறுவதற்குச் சம நிகழ்தகவு கொண்டதாகயிருந்தால் அக்கூறு ''சம வாய்ப்புத் தனிக்கூறு'' (Simple Random Sample) என்றழைக்கப்படும். உதாரணமாக, 1000 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து 50 மாணவர்கள் கொண்ட கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்யவேண்டுமெனக் கொள்வோம். நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் அடிப்படையில் 50 மாணவர்களை ஒவ்வொருவராகத் தெரிவு செய்யலாம். முதலில் 1000 மாணவர்களிலிருந்து ஒரு மாணவன் தெரிவு செய்யப்படுவதால் 1000 மாணவர்களும் 1/1000 என்ற நிகழ்தகவுடன் தெரிவு செய்யப்படுவதற்குச் சமவாயப்புப் பெற்றிருப்பார்கள். இரண்டாவது மாணவன் 999 மாணவர்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுவதால், 999 மாணவர்களும் 1/999 என்ற நிகழ்தகவுடன் தெரிவு செய்யப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்புப் பெற்றிருப்பார்கள். இம்முறையில் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற 50 மாணவர்களைக் கொண்ட கூறு ''சமவாய்ப்புக் கூறு'' (random sample) என்றழைக்கப்படுகிறது. மாறாக, இரண்டாவது மாணவன் தெரிவு செய்யப்படும்போது முதல் மாணவனையும் சேர்த்து 1000 மாணவர்களிலிருந்து முதலில் தெரிவு செய்யப்பட்ட மாணவனல்லாத வேறொரு மாணவனைத் தெரிவு செய்வதால், இரண்டாவது முறையிலும் எல்லா மாணவர்களும் 1/1000 என்ற நிகழ்தகவுடன் தெரிவு செய்யப்பட சமவாய்ப்புப் பெற்றிருப்பார்கள். இம்முறையில் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற 50 மாணவர்களும் 1/1000 என்ற சம நிகழ்தகவுடனேயே தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பார்கள். இம்முறையைப் பின்பற்றித் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறு ''சம வாய்ப்புத் தனிக் கூறு'' (Random Simple Sample) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இனத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்கள் எண்ணற்றதாக யிருந்தால் ஒவ்வொரு முறை தெரிவு செய்யப்பட்ட உறுப்பினையும் மறு உறுப்பு தெரிவு செய்யப்படுவதற்கு முன் இனத்தொகுதியில் சேர்க்க வேண்டியதில்லை. கூறெடுத்தல் முறைகளுள் இம்முறையே மிகச் சிறந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

(ஆ) குலுக்கல் கூறு (Lottery Sample)

1000 மாணவர்களடங்கிய ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து 50 மாணவர்களடங்கிய கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்யவேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் 1000 மாணவர்களுக்கும் 1 முதல் 1000 வரையுள்ள வரிசை எண்களை சமவாய்ப்பு முறையில் அளிக்கவேண்டும். பின்னர், ஒரே மாதிரியான 1000

சீட்டுகளில் 1 முதல் 1000 வரையுள்ள எண்களை எழுதி ஒரு பெட்டியில் போட்டு, பெட்டியை நன்ருகக் குலுக்கி, சீட்டுகளை நன்ருகக் கலக்க வேண்டும். இப்பொழுது பெட்டியிலிருந்து ஒவ்வொன்ருக 50 சீட்டுகள் எடுக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு சீட்டு எடுக்குமுன்னரும் பெட்டியை நன்ருகக் குலுக்கி, பெட்டியிலுள்ள சீட்டுகளை நன்கு கலக்க வேண்டும். இவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட 50 சீட்டுகளிலுமுள்ள எண்களுக்குரிய மாணவர்களடங்கிய கூறுதான் தேவையான கூறு ஆகும். இவ்வாறு சீட்டுகளைக் குலுக்கி உறுப்புக்களைத் தெரிவு செய்கின்ற இந்த முறைக்கு "குலுக்கல் முறை" (lottery method) என்றும், இம்முறையைப் பின்பற்றித் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறுக்கு "குலுக்கல் கூறு" (lottery sample) என்றும் பெயர். இம்முறை மிகவும் பயனுள்ளதாகக் கருதப்படுகின்றது. ஆனல், சீட்டுகள் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒட்டியிருந்தாலும், நன்ருகக் குலுக்கப்படாமல் பல சீட்டுகள் பெட்டியின் அடியிலேயே தங்கிவிட்டாலும் எல்லாச் சீட்டுகளுக்கும் சமவாய்ப்பு இல்லாமற் போய்விடும். மேலும், இனத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக யிருந்தாலும் இந்த முறையைப் பின்பற்றுவது மிகவும் கடினமாகயிருக்கும்.

(இ) முறையான கூறு (Systematic Sample)

1000 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து 50 மாணவர்கள் கொண்ட கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் 1000 மாணவர்களையும் ஏதாவதொரு முறையில் (உ-ம். அகர வரிசை) வரிசைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். இப்பொழுது, இனத்தொகுதியிலுள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையாகிய 1000ஐ தெரிவு செய்யப்படவேண்டிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையாகிய 50 ஆல் வகுத்து 20 $\left(= \frac{1000}{50} \right)$ என்ற எண்ணிக்கையெண்ணைப் (count number) பெறவேண்டும். முதல் 20 மாணவர்களுள் ஏதாவதொரு மாணவனை சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து, அம்மாணவனின் வரிசை யெண்ணிலிருந்து அடுத்தடுத்து 20-ஆவது வரிசையெண்களுக்குரிய மாணவர்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். அதாவது, முதலில் 7-ஆவது மாணவனைத் தெரிவுசெய்தால் அடுத்து 27-ஆவது, 47 ஆவது, 67 ஆவது,........ மாணவர்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். இவ்வாறு தேவையான 50 மாணவர்களையும்

தெரிவு செய்யலாம். இம்முறையில் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறு "அரைச் சமவாய்ப்புக் கூறு" (quasi-random sample) என்றும் "முறையான கூறு" என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

(ஈ) *படுகைச் சமவாய்ப்புக் கூறு* (Stratified random sample)

படுகைச் சமவாய்ப்புக் கூறு என்பது ஒருவகையான வரம்புக்குட்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு ஆகும். இனத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒரே யினமாக யில்லாமல் சீரற்ற தன்மையுடனிருந்தால் இம்முறையைப் பயன்படுத்தி நல்ல பிரதிநிதித்துவம் வாய்ந்த கூறைத் தெரிவு செய்யலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியைப் பல சீரான துணை இனத்தொகுதிகளாகப் (homogeneous sub-populations) பாகுபடுத்திக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர், பல்வேறு துணை இனத்தொகுதிகளிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளின் விகிதங்களுக்கேற்ப ஒவ்வொரு துணை இனத்தொகுதியிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் உறுப்புக்கள் தெரிவு செய்யப்படவேண்டும். உதாரணமாக, 200 குழந்தைகள், 500 ஆண்கள், 300 பெண்கள் அடங்கிய ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து 50 பேர்களடங்கிய கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்யவேண்டுமெனக் கொள்வோம் முதலில் அவ்வினத் தொகுதியை குழந்தைகள், ஆண்கள், பெண்கள் இவர்களைத் தனித்தனியே கொண்டமைந்த மூன்று துணை இனத்தொகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ளவேண்டும். தெரிவு செய்யப்படவேண்டிய 50 பேர்களை அம்மூன்று துணை இனத்தொகுதிகளிலிருந்து 200 : 500 : 300 என்ற விகிதங்களில் சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யவேண்டும். அதவாவது. 10 குழந்தைகள், 25 ஆண்கள், 15 பெண்கள் தெரிவு செய்யவேண்டும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறு "விகிதமுறு படுகைக் கூறு" (proportionate Stratified Sample) என்றழைக்கப்படுகிறது. மாறுக, பல்வேறு துணை இனத்தொகுதியிலிருந்தும் சம எண்ணிக்கைகளில் உறுப்புக்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டு அமைக்கப்படுகின்ற கூறு "விகிதமற்ற படுகைக் கூறு" (disproportionate Stratified Sample) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆனல், இத்தகைய கூறுகள் இனத்தொகுதியின் பண்புகளைச் சரிவர பிரதிபலிக்கும் தன்மையற்றவையாக யிருக்கும். ஆனல், பல்வேறு துணை இனத்தொகுதிகளிலிருந்தும் பெறப்படுகின்ற பல்வேறு துணைக் கூறுகளிலிருந்தும் பெறப்படுகின்ற முடிவுகளை, அத்துணை இனத்தொகுதிகளிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கேற்ப நிறையிட்டுக் கூட்டுவதன் மூலம் மேற்கூறப்பட்ட குறையை நீக்கிவிடலாம். இவ்வாறு செய்யப்படு

கின்ற முறைக்கு ''நிறையிட்ட படுகைக் கூறு முறை'' (Stratified weighted sampling) என்று பெயர்.

(உ) *பலநிலை சமவாய்ப்புக் கூறு* (Multistage random sample)

மிகப் பெரிய பரப்பளவில் பரவிக்கிடக்கின்ற ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து கூறுகள் தெரிவு செய்ய பலநிலை சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல் முறை பயன்படுகிறது. தமிழ்நாட்டிலிருந்து ஒரு ஆய்வுக்காக 1000 குடுபங்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் தமிழ்நாட்டிலுள்ள மாவட்டங்களிலிருந்து ஒரு சில மாவட்டங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்படுகின்றன. இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட மாவட்டங்களடங்கிய கூறுக்கு ''முதல் நிலைக் கூறு'' என்று பெயர். பின்னர் இந்த மாவட்டங்கள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள ஊர்களிலிருந்து அம்மாவட்டங்களின் மக்கள் தொகைகளின் விகிதங்களுக்கேற்ப சில ஊர்களைத் தெரிவு செய்யவேண்டும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட ஊர்களடங்கிய கூறுக்கு ''இரண்டாம் நிலைக் கூறு'' என்று பெயர். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒவ்வொரு ஊரிலுள்ள குடும்பங்களையும் பல தொகுதிகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். இப்பொழுது தெரிவு செய்யப்பட்ட ஊர்களின் மக்கட் தொகைகளில் விகிதங்களுக்கேற்ப ஒவ்வொரு ஊரிலிருந்தும் சில தொகுதிகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட தொகுதிகளடங்கிய கூறுக்கு ''மூன்றும் நிலைக் கூறு'' என்று பெயர். இம்மூன்றும் நிலைக் கூறிலுள்ள குடும்பங்களிலிருந்து தேவையான குடும்பங்களைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்துக் கொள்ளலாம்.

இந்த முறையில், கூறெடுத்தல் முறை பல நிலைகளாகச் செய்யப்படுகிறது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல் முறை கையாளப்படுவதால், இம்முறை ''பல நிலை சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல் முறை'' யென்றழைக்கப்படுகிறது. ஆனல், ஏதாவது ஒரு நிலையிலேற்படுகின்ற ஒரு சிறு தவறும் இறுதியில் பெரிதாகிவிடக் கூடுமாகையால் இம்முறையைக் கையாளும்போது மிகவும் கவனமாக யிருக்கவேண்டும்.

(ஊ) *நோக்குடைய கூறு* (Purposive Sample)

சமவாய்ப்பு முறையில் கூறெடுக்க அதிக அளவில் பணமும், காலமும் தேவைப்படுமாகையால் பொருளாதார, தொழிலியல் ஆய்வுகளில் சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல் முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. அதற்குப் பதிலாக நோக்குடைய கூறெடுத்

தல் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. இனத்தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படவேண்டிய கூறின் உறுப்புக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்துடன் தெரிவு செய்யப்படுவதால் இம்முறையைப் பின்பற்றித் தெரிவு செய்யப்படுகின்ற கூறு "நோக்குடைய கூறு" என்றழைக்கப்படுகிறது. இம்முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின் இனத்தொகுதி பற்றிய எல்லா வகைப் பண்புகளும் தெரிந்திருக்க வேண்டும். ஆனால், ஆய்வுக் கேற்ற நோக்குடன் கூறிலுள்ள உறுப்புக்கள் தெரிவு செய்யப்படுவதால் இம்முறை மிகவும் நம்பிக்கை வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது. இனத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு சில முக்கியமான உறுப்புக்களைச் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டிய ஆய்வுகளுக்கு இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும், இந்த முறையின் மூலம் ஆய்வின் முடிவுகளை வெகு சீக்கிரத்தில் பெற முடிகிறது. ஆனால் கூறு தெரிவு செய்யப்படுவதற்கு முன் இனத்தொகுதி பற்றிய பண்புகள் தெரிந்திருக்க வேண்டுமென்பது இம்முறையிலுள்ள பெருங்குறைபாடாகக் கருதப்படுகிறது. மேலும், உறுப்புக்கள் ஒரு சார்பாகத் தெரிவு செய்யப்படுவதற்குள்ள வாய்ப்புகளிருப்பதும் இம்முறையிலுள்ள மற்றொரு குறைபாடாகும். என்றாலும், இம்முறை தொழிலியல், பொருளாதாரத் துறைகளில் பரந்த அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(எ) *அளவுடைக் கூறு* (Quota Sample)

பொதுமக்கள் கருத்தை அறிகின்ற ஆய்வுகளிலும் "அளவுடைக் கூறெடுத்தல்" என்னும் ஒருவகை நோக்குடைய கூறெடுத்தல் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. நேர்முகப்பேட்டியின் மூலம் விவரங்கள் சேகரிப்பதற்கும் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையில், இனத்தொகுதியைப் பல பகுதிகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பகுதியிலும் பேட்டி காண வேண்டியவர்களின் பெயர்களடங்கிய பெயர்ப்பட்டியல் தயாரிக்கப்படுகிறது. பின்னர் ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் ஒரு கணிப்பாளர் அப்பகுதிக்குரிய பெயர்பட்டியலுடன் சென்று விவரங்களைச் சேகரிப்பார். இப்பெயர்ப் பட்டியலிலுள்ள பெயர்கள் யாவும் அப்பகுதியில் வாழ்கின்ற பலதிறப்பட்ட மக்களின் பெயர்களிலிருந்து ஆய்வுக்கான குறிப்பிட்ட நோக்கத்துடன் தெரிவு செய்யப்படுகின்றன. இப்பெயர்ப் பட்டியலிலுள்ளவர்களுள் யாரையாவது பேட்டிகாண முடியாமற் போனால் அவருக்கும் பதிலாகப் பேட்டிகாண வேண்டியவரின் பெயர் கொண்ட இன்னொரு பெயர்ப் பட்டியலும் கணிப்பாளரிடம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும், இவ்வாறு ஒவ்வொரு பகுதியிலும்

ஒவ்வொரு கணிப்பாளர்தான் எத்தனை பேரைப் பேட்டிகாண வேண்டுமோ அத்தனை பேரையும் முதல் பெயர்ப் பட்டியலின் படி அல்லது முதல் பட்டியலிலுள்ளவர்களுள் பேட்டி காண முடியாதவர்களுக்குப் பதிலாக இரண்டாவது பட்டியலிலுள்ளவர்களிலிருந்து தெரிவு செய்து பேட்டிகண்டு விவரங்கள் சேகரித்து ஆய்வாளருக்கு அனுப்புவார். எல்லாக் கணிப்பாளர்களும் சேகரித்து அனுப்பிய விவரங்களைக் கொண்டு ஆய்வாளர் தன்னுடைய ஆய்வைச் செய்து முடிப்பார்.

புள்ளியியல் அளவையும் புள்ளியியல் பண்பளவையும்
(Statistic and Parameter)

ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறு ஒன்றைக் கருதுக. இக்கூறின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், போன்ற புள்ளியியல் மாறிகளுக்குப் "புள்ளியியல் அளவைகள்" (Statistics) என்றும், இக்கூறு தெரிவு செய்யப்பட்ட இனத்தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளாகிய கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் போன்றவைகளுக்குப் "புள்ளியியல் பண்பளவைகள்" (Parameters) என்றும் பெயர். ஒரு கூறிலிருந்து பெறப்படுகின்ற புள்ளியியல் அளவைகளிலிருந்து அக்கூறு தெரிவு செய்யப்பட்ட இனத்தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடுதலும், அவ்வாறு மதிப்பிடப்பட்ட புள்ளியியல் அளவைகளின் மதிப்புக்களுக்கும், புள்ளியியல் பண்பளவைகளின் மதிப்புக்களுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களின் முக்கியத்துவங்களைச் சோதிப்பதும் கூறெடுத்தல் கொள்கைகளின் முக்கிய நோக்கமாகும்.

கூறுபரவலும் திட்டப்பிழையும்
(Sampling distribution and Standard Error)

ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து சம எண்ணிக்கை உறுப்புக்கள் கொண்ட 100 சமவாய்புக் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. இக்கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க. இவ்வாறு பெறப்பட்ட 100 கூட்டுச் சராசரிகளையும் ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் அமைக்கலாம். கூறுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக அதிகமாக அக்கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கொண்டமைக்கப்படுகின்ற நிகழ்வெண் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் அமைப்பை நெருங்கி வருவதைக் காணலாம். இவ்வாறு கூறுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகயிருக்கும்போது கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படுகின்ற நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

"கூட்டுச் சராசரியின் கூறு பரவல்" (Sampling distribution fo the mean) என்று பெயர். இக்கூட்டுச் சராசரியின் கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கத்திற்கு "கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப் பிழை" (Standard Error of the mean) என்று பெயர். இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி μ என்றும், திட்டவிலக்கம் σ என்றும் கொள்க. கூட்டுச் சராசரியின் கூறு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியாகிய μ க்குச் சமமாக யிருக்குமென்று நிறுவப்பட்டுள்ளது. மேலும், கூறு பரவலின் ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை n என்ருல் கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்றும் நிறுவப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புக்கள் கொண்ட சமவாய்புக் கூறுகளைக் கொண்டமைக்கப்படுகின்ற கூறு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி μ என்றும், கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப் பிழை யெனப்படுகின்ற இக்கூறு பரவலின் திட்ட விலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்றும் அறிகிறேம். இதுபோல், கூட்டுச் சராசரிக்குப் பதிலாக வேறு எந்த புள்ளியியல் அளவைக்குமுரிய கூறு பரவலை யமைத்து அக்கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்ற இத்திட்ட விலக்கம் அப்புள்ளியியல் அளவையின் திட்டப்பிழை என்றழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, திட்டவிலக்கத்தின் திட்டப்பிழை (Standard error of the S. D.) $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. பொதுவாக, கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கம் "திட்டப்பிழை—தி. பி." (Standard Error—S. E.) என்று அழைக்கிப்படுகிறது.

நம்பக இடைவெளிகளும் முக்கியத்துவ எல்லைகளும்
(Confidence intervals and levels of Significance)

μ, σ ஆகியவற்றை முறையே கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கமாகக் கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்படுகின்ற n உறுப்புக்கள் கொண்ட கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுபரவல் μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகியவற்றை முறையே கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கமாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக

யிருப்பதால், 68.27% கூறுச் சராசரிகள் $\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்குமிடையே யிருக்குமென்றும், 95.45% கூறுச் சராசரிகள் $\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கு மிடையே யிருக்குமென்றும், 99.73% கூறுச் சராசரிகள் $\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும், $\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கு மிடையே யிருக்குமென்றும் அறிந்து கொள்ளலாம். ஆகவே, ஒரு கூறுச் சராசரியின் மதிப்பு $\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கு மிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு .6827 என்றும், $\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கு மிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு .9545 என்றும், $\eta - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கு மிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு .9973 என்றும் தெரிகிறது. $\eta \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\mu \pm 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகிய இடைவெளிகள் முறையே 68.27%, 95.45%, 99.73% "நம்பக இடைவெளிகள்" (confidence intervals) என்றழைக்கப்படுகின்றன. இதுபோல், எந்த நிகழ்தகவு மதிப்புக்குமுரிய நம்பக இடைவெளியை வரையறுக்கலாம். ஆனால், நம்பக இடைவெளிகளை 95%, 99% என்ற அளவுகளில் வரையறுப்பது கணக்கீடுகளுக்குச் சுலபமாக யிருக்கும். இயல்நிலைப்பட்டியலிலிருந்து 95% நம்பக இடைவெளி $\mu \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்றும், 99% நம்பக இடைவெளி $\mu \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்றும் காணலாம். 95% கூறு சராசரிகள் $\mu \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எல்லைகளுக்குள்ளிருப்பதால், 5% கூறு சராசரிகளே இவ்வெல்லைகளுக்கு வெளியே யிருக்கும். இதுபோல் 1% கூறு சராசரிகளே $\mu \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எல்லை

களுக்கு வெளியே யிருக்குமென்று தெரிகிறது. $\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\mu \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகிய இடைவெளி யெல்லைகள் முறையே 5%, 1% "முக்கியத்துவ எல்லைகள்" (levels of Significance) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

தீர்மானிக்கும் விகிதம் (Critical ratio)

$\bar{x}$ என்பது மேற்கூறப்பட்ட இனத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரியெனில், அது $\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எல்லைகளுக்கிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு .95 ஆகும். ஆகவே, $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமிடையே யுள்ள தனி வித்தியாசம் (absolute difference) $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் குறைவாக யிருத்தற்குரிய நிகழ்தகவு .95 ஆகும். அதாவது,

.95 நிகழ்தகவுடன் $|\bar{x} - \mu| < 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்று கூறலாம்.

அல்லது, $\dfrac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96$ ஆகயிருத்தற்குரிய நிகழ்தகவு .95 ஆகும். அதாவது, $\dfrac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது 1.96ஐ விட குறைவாகயிருந்தால் $\bar{x}$ ஆனது .95 நிகழ்தகவுடன் $\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எல்லைகளுக்குள்ளிருக்குமென்றும் 1.96ஐ விட அதிகமாயிருந்தால் $\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எல்லைகளுக்குப் புறம்பாக யிருக்குமென்றும் கொள்ளலாம். அதாவது, $\dfrac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது 1.96ஐ விட குறைவாக யிருந்தால் $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததல்ல (not significant) என்றும், 1.96ஐ விட அதிகமாக யிருந்தால் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம்

முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது (significant) என்றும் கொள்ளவேண்டும். இதுபோல், $\frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது 2.58 க்குக் குறைவாகவோ அல்லது கூடுதலாகவோ யிருந்தால் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம் முறையே முக்கியத்துவ மற்றதென்றே அல்லது முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததென்றே கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசத்தைத் தீர்மானிப்பதால் $\frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது "தீர்மானிக்கும் விகிதம்" (critical ratio) என்றழைக்கப்படுகிறது. இத்தீர்மானிக்கும் விகிதம் பொதுவாக "t" என்று குறிக்கப்படுகிறது.

மேலும், $\frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96$ என்றால்,

$$\bar{x}-\mu < 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \mu-\bar{x} < 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ஆகும். அதாவது, $\mu > \bar{x}-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\mu < \bar{x}+1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

அதாவது, .95 நிகழ்தகவுடன் இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியாகிய μ இன் மதிப்பு $\bar{x}-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் $\bar{x}+1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ க்கும் இடையே யிருக்குமென்று நம்பலாம். அதாவது, $\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்பது இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய 95% நம்பக இடைவெளியாகும். இதுபோல், $\bar{x} \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்பது இனத்தொகுதி கூட்டுச் சராசரியின் 99% நம்பக இடைவெளியாகும்.

பெருங்கூறும் சிறுகூறும் (Large Sample Small Sample)

பொதுவாக 30 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறுகள் பெருங்கூறுகளென்றும், 30 க்குக் குறைவான உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறுகள் சிறு கூறுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. பெருங்கூறுகளுக்குரிய முக்கியத்துவ சோதனைகள் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.

முக்கியத்துவ சோதனைகள் (Tests of Significance)

(1) இனத்தொகுதி கூட்டுச் சராசரிக்கும், கூறுசராசரிக்குமுள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்.

μ, σ ஆகியவற்றை முறையே கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கமாகக் கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட n உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்க. இப்பொழுது $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதிக்கவேண்டும். முதலில், $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமிடையே வித்தியாசமில்லையென்ற "இல்லெனும் எடுகோளை" (null hypothesis) அமைத்துக்கொள்க. கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழை $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. ஆகையால் முக்கியத்துவ சோதனைக்குப் பயன்படுகின்ற தீர்மானிக்கும் விகிதம்.

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ஆகும்.

(i) $t < 1.96$ எனில், $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி முக்கியத்துவ மற்றதாகும். அதாவது, அமைத்துக் கொண்ட இல்லெனும் எடுகோலைச் சரியென்று கருதி 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின் அடிப்படையில் ஏற்றுக் கொள்ளலாம், எனவே, $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் கூறெடுத்தலிலேற்பட்ட அலைவுகளினாலேற்பட்டதென கருதி, அக்கூறு அந்த இனத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டதென்று நம்பலாம்.

(ii) $t > 1.96$ எனில் $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி குறிப்பிடத்தக்க வாய்ந்ததெனக்

கருதி, வித்தியாசம் இல்லையென்று கூறுகின்ற இல்லெனும் எடுகோளைத் தள்ளிவிடலாம்.

(iii) இதுபோல், $t < 2.58$ என்றால், 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமுள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவமற்றதென்றும், $t > 2.58$ என்றால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவமுடையதென்றும் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி : 159

ஒரு இயல்நிலை இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 15; விலக்கவர்க்கச் சராசரி 8. அவ்வினத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 900 எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு கூறின் சராசரி 13.5. இவ்வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவு குக்கியத்துவமுள்ளதாவென காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

தீர்வு :

இங்கு $\mu = 15$; $\sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $n = 900$; $\bar{x} = 13.5$.

$$t = \frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|13.5-15|}{\frac{2\sqrt{2}}{30}} = \frac{1.5}{2\sqrt{2}} \cdot 30 = 15.9$$

தீர்மானிக்கும் விகிதம் 1.96ஐ விட அதிகமாகயிருப்பதால், 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி கூறு சராசரிக்கும், இனத்தொகுதி சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கூறலாம்.

மாதிரி : 160

900 உறுப்பினர்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 3.4 செ.மீ. என்று காணப்பட்டது. 3.25 செ.மீ. கூட்டுச் சராசரியும், 2.61 செ மீ திட்டவிலக்கமுமுள்ள ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறு என்று இதைக் கூறமுடியுமா? இத்தகைய கூட்டுச் சராசரிகளுக்குரிய 98% நம்பக எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு

இக்கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதெனக் கொள்க.

இங்கு, $\bar{x} = 3.4$; $\mu = 3.25$; $\sigma = 2.61$; $n = 900$.

$$\therefore \quad t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|3.4 - 3.25|}{\frac{2.61}{\sqrt{900}}} = \frac{0.15}{2.61} \times 30$$

$$= 1.72 < 1.96.$$

எனவே, $\bar{x}$ க்கும் μ க்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி முக்கியத்துவமற்றதாகக் கருதி அமைத்துக்கொண்ட எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ளலாம். அதாவது, இக்கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாம்.

இயல்நிலைப் பட்டியலிலிருந்து 98% நம்பக இடைவெளிக்குரிய t இன் மதிப்பு 2.33 என்று காண்கிறோம். ஆகவே, கூட்டுச் சராசரிகளுக்குரிய 98% நம்பக இடைவெளி

$$= \mu \pm 2.33 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 3.25 \pm 2.33 \times \frac{2.61}{30}$$

$$= 3.25 \pm 0.203$$

$$= 3.25 - 0.203,\ 3 + 0.203$$

$$= 3.047,\ 3.453$$

மாதிரி : 161

ஒரு ஆய்வாளர் ஒரு இனத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியைத் தகுந்த அளவு அதிக எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு கூறிலிருந்து மதிப்பிட விரும்புகிறார். இனத்தொகுதியின் திட்டவிலக்கத்தில் 25%ஐ விட அதிக அளவில் கூறு சராசரி இனத்தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து வித்தியாசப்படாமலிருக்க நிகழ்தகவு .95 எனில், கூறிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு இருக்கவேண்டும் ?

தீர்வு :

கூறு சராசரி $\bar{x}$ என்றும், உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை n என்றும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனை : $|\bar{x}-\mu| < 25\%\ \sigma$.

$$\text{அதாவது,}\quad |\bar{x}-\mu| < \frac{25}{100}\sigma$$

$$\text{அல்லது,}\quad \frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma} < \frac{1}{4}$$

ஆனால், 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி, வித்தியாசம் முக்கியத்துவ மற்றதாகயிருக்க வேண்டுமானால்,

$$t = \frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96 \text{ ஆகயிருக்க வேண்டும்.}$$

$$\text{அதாவது,}\quad \frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma} < \frac{1.96}{\sqrt{n}} \text{ ஆகயிருக்க வேண்டும்.}$$

$$\therefore\quad \frac{1.96}{\sqrt{n}} < \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{n} > 4 \times 1.96$$

$$n > 16 \times (1.96)^2$$

$$> 62.472$$

ஆதாவது, உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 62.472ஐ விட அதிகமாக யிருக்கவேண்டும். ஆகவே, $n = 63$.

(2) *இரண்டு கூறு சராசரிகளின் வித்தியாசத்தின் முக்கியத் துவம் :*

n_1, n_2 உறுப்புக்களைக் கொண்ட இரண்டு சார்பற்ற கூறு களின் கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்க. இவ்விரு கூட்டுச் சரா சரிகளின் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா, இல்லையா வென்று சோதிக்க வேண்டும்.

இவ்விரு கூறுகளும் திட்டவிலக்கம் σ கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டவை யென்ற எடு கோளை அமைத்துக் கொள்க. அதாவது, இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் பூச்சிய

மென்ற " இல்லென்ற எடுகோளை " அமைத்துக் கொள்க இரு கூறு சராசரிகளுக்குமுரிய திட்டப்பிழைகள் முறையே $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ என்று நாமறிவோம். இவற்றிலிருந்து, இரு கூட்டுச் சராசரிகளின் வித்தியாசத்துக்குரிய திட்டப்பிழை $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}$ என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. எனவே, கூறு சராசரிகளின் வித்தியாசத்தைச் சோதிக்கப்பயன்படும் தீர்மான விகிதம்

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\text{தி. பி.}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}}$$

ஆகும். இவ்விகிதத்தைக் கொண்டு இரு கூறு சராசரிகளுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தை முன்போல் சோதித்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: இரு கூறுகளும் σ_1, σ_2 ஆகியவற்றைத் திட்ட விலக்கங்களாகக் கொண்ட இரு வெவ்வேறு இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையென தெரிந்தால், இரு கூறு சராசரிகளின் வித்தியாசத்தின் திட்டபிழை $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ஆகும்.

மாதிரி : 162

இரு பெருங்கூறுகள் 1000, 2000 எண்ணிக்கையுடையன. அவைகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 67.5"ம், 68"ம் ஆகும். 6.25 (அங்குலம் - இருபடி) விலக்க வர்க்கச் சராசரியுடைய ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்து இவ்விரு கூறுகளும் சமவாய்ப்பு முறையில் பொறுக்கி யெடுக்கப்பட்டனவெனக் கூறுவது பொருந்துமா?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு :

இங்கு, $\bar{x}_1 = 67.5$; $n_1 = 1000$; $\sigma^2 = 6.25$

$\bar{x}_2 = 68.0$; $n_2 = 2000$; $\therefore \sigma = 2.5$

திட்டப்பிழை (தி.பி.) $= \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}$

$$= \sqrt{\frac{6.25}{1000} + \frac{6.25}{2000}}$$

$$= \frac{2.5}{10}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}$$

$$= \frac{2.5}{10}\sqrt{\frac{3}{20}}$$

$$= 0.25\sqrt{0.15}$$

$$= 0.25 \times 0.3873$$

$$= 0.097.$$

$$\therefore \quad t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\text{தி.பி.}} = \frac{|167.5 - 68.0|}{0.097} = \frac{0.5}{0.097}$$

$$= 5.1 > 1.96$$

எனவே, $\bar{x}_1$க்கும் $\bar{x}_2$க்கு முள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்திருப்பதால் இரு கூறுகளும் ஒரே இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையென கூறுவது பொருந்தாது.

மாதிரி : 163

ஒரு சமவாய்புக் கூறிலுள்ள 640 மருத்துவ மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 67.85″; திட்ட விலக்கம் 2.56″; இன்னொரு சமவாய்ப்புக் கூறிலுள்ள 160 பொறியியல் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 68.52″; திட்டவிலக்கம் 2.82″. இவ்விவரங் களிலிருந்து, பொறியியல் மாணவர்கள் மருத்துவ மாணவர் களை விட சராசரியில் அதிக உயரமுள்ளவர்களென்று கூற முடியுமா ?

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

தீர்வு :

மருத்துவ மாணவர்களும், பொறியியல் மாணவர்களும் சம உயரமுடையவர்களெனக் கொள்க.

மருத்துவ மாணவர்கள் : $\bar{x}_1 = 67.85$; $\sigma_1 = 2.56$; $n_1 = 640$.

பொறியியல் மாணவர்கள் : $\bar{x}_2 = 68.52$; $\sigma_2 = 2.82$; $n_2 = 160$

$$(\text{தி.பி.})^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$= \frac{(2.56)^2}{640} + \frac{(2.82)^2}{160}$$

$$= \frac{6.554}{640} + \frac{7.952}{160}$$

$$= 0.05994.$$

$$\therefore \quad \text{தி.பி.} = \sqrt{0.05994} = 0.245$$

$$\therefore \quad t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\text{தி.பி}} = \frac{|67.85 - 68.52|}{0.245}$$

$$= \frac{0.67}{0.245} = 2.7.$$

அதாவது, $t > 2.58$.

எனவே, $\bar{x}_1$க்கும், $\bar{x}_2$க்கு முள்ள வித்தியாசம் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின் படி குறிப்பிடத்தக்க முக்கியத்துவ முள்ளதாக யிருப்பதால், மருத்துவ மாணவர்களும், பொறியியல் மாணவர் களும் சம உயரமுள்ளவர்களென்று கருத இடமில்லை. ஆகவே, பொறியியல் மாணவர்கள் மருத்துவ மாணவர்களைவிட அதிக உயரமுள்ளவர்களெனக் கூறலாம்.

(3) இரு விகிதங்களின் வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

n சோதனைகளைக் கொண்ட ஒரு சோதனைத் தொடரில் கண்டறியப்பட்ட வெற்றிகளின் விகிதம் p^1 என்க. n சோதனை களில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட வெற்றிகளின் விகிதம் p, தோல்வி களின் விகிதம் q என்றால் p^1 இன் கூறு பரவல் pqஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும் $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலென்று காணப்பட்டுள்ளது. ஆகவே,

p^1 என்ற விகிதத்தின் திட்டப் பிழை $= \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ஆகும்.

எனவே, p, p^1 ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தை அளவிடப் பயன்படுகின்ற

$$\text{தீர்மானிக்கும் விகிதம்} = \frac{|p-p^1|}{\text{தி.பி.}} = \frac{|p-p^1|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \text{ ஆகும்.}$$

இத் தீர்மான விகிதத்தின் உதவியால் இரு விகிதங்களின் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா அல்லது முக்கியத்துவமற்றதாவென்று முன்போல் சோதிக்கலாம்.

குறிப்பு: n_1, n_2 சோதனைகளைக் கொண்ட இருகூறு சோதனைத் தொடர்களில் கண்டறியப்பட்ட வெற்றிகளின் விகிதங்கள் p_1, p_2 என்றும், இருகூறுகளிலும் எதிர் பார்க்கப்பட்ட வெற்றிகளின் விகிதம் p என்றும் கொண்டால், (p_1-p_2) என்ற வித்தியாசத்தின் திட்டப் பிழை $\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ என்று கொண்டு வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதிக்கவேண்டும். ஆனால் எதிர்பார்க்கப்பட்ட விகிதம் p கொடுக்கப் படாவிட்டால்,

$$\text{திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

என்று கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி : 164

நச்சுக் காய்ச்சலால் பீடிக்கப் பட்டவர்களுள் 18 சதவீதம் மாய்ந்து விடுகிறார்கள். ஒரு ஆஸ்பத்திரியில் 640 பேர்களுக்கு சிகிச்சை அளிக்கப் பட்டதில் 64 பேர் மாய்ந்தனர்.

மேலே கூறப்பட்ட பதிவுக்கு என்ன முடிவு என்பதை விளக்குக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்)

தீர்வு :

எதிர் பார்க்கப்பட்ட இறப்பு வீதத்துக்கும், கண்டறியப் பட்ட இறப்பு வீதத்துக்குமிடையே குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசமில்லையெனக் கொள்க.

இங்கு p = எதிர்பார்க்கப் படுகின்ற இறப்பு வீதம் = $18\% = \cdot 18$.

$\therefore \quad q = 1 - p = 1 - .18 = .82$.

p^1 = கண்டறியப் பட்ட இறப்பு வீதம் $= \dfrac{64}{640} = .1$.

$n = 640$.

$$\text{தி.பி.} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.18)(.82)}{640}} = 0.015.$$

$$t = \frac{|p - p^1|}{\text{தி.பி.}} = \frac{|.18 - .10|}{0.015} = \frac{.08}{.015} = 5.3 > 2.58.$$

இரு விகிதங்களின் வித்தியாசம் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின் படி குறிப்பிடத்தக்க அளவில் முக்கியத்துவ முள்ளதாக இருப்பதாலும், குறிப்பிட்ட ஆஸ்பத்திரியில் இறப்பு வீதம் குறைவாகயிருப்பதாலும், ஆஸ்பத்திரியில் சிறந்த முறையில் சிகிச்சை யளிக்கப்பட்டு இறப்பு வீதம் வெகுவாகக் குறைக்கப் பட்டுள்ளது என்று தெரிகிறது.

மாதிரி : 165

A என்ற ஒரு நகரில் 2000 பட்டதாரிகளில் 450 பேர் வேலையின்றியிருக்கின்றனர். B என்ற மற்றொரு நகரில் 4000 பட்டதாரிகளில் 1000 பேர் வேலையின்றியிருக்கின்றனர். A என்ற நகரைவிட B என்ற நகரில் வேலையின்மை அதிகமென நீங்கள் கூற முடியுமா? (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

தீர்வு :

இரு நகர்களிலும் வேலையின்மை சமமாகயிருப்பதாகக் கொள்க.

இங்கு, $p_1 = \dfrac{450}{2000} = .225$. $\therefore \quad q_1 = 1 - p_1 = 1 - .225 = .775$

$n_1 = 2000$.

$p_2 = \dfrac{1000}{4000} = .25$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - .25 = .75$

$n_2 = 4000$.

$$\text{தி.பி.} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

$$\sqrt{\frac{(.225)(.775)}{2000}+\frac{(.25)(.75)}{4000}}$$

$= 0.0116.$

$$t=\frac{|p_1-p_2|}{\text{தி.பி.}}=\frac{|.225-.25|}{.0116}=\frac{.025}{.0116}=2.16<2.58.$$

ஆகவே, 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி இரு நகர்களிலும் வேலையின்மையில் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் வித்தியாசமில்லை யெனக் கொள்ளலாம். ஆனால் 5% முக்கியத்துவ எல்லைகளின் படி வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகயிருப்பதாலும், B என்ற நகரில் வேலையின்மை வீதம் A என்ற நகரைவிட அதிகமாகயிருப்பதாலும், நகர் Aயை விட நகர் Bயில் வேலையின்மை அதிகமென கூறலாம்.

மாதிரி : 166

ஒரு நாணயத்தை 1000 முறைகள் சுண்டிவிட்டதில் 550 தடவைகள் தலை மேல் நோக்கி விழுந்தது. இதிலிருந்து அந்த நாணயம் ஒரு தலைப்பட்டதென கூற முடியுமா?

தீர்வு :

நாணயம் ஒருதலைப்பட்டதல்ல வென்க.

p^1 = கண்டறியப்பட்ட தலைகளின் விகிதம் $=\frac{550}{1000}=\cdot 55$

p = எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற விகிதம் $=\frac{1}{2}=\cdot 50$

$\therefore\ q=1-p=\cdot 5$

$n=1000.$

$$\text{தி. பி.}=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{(.5)(.5)}{1000}}=\sqrt{\frac{.25}{1000}}=\cdot 016.$$

$$t=\frac{|p-p^1|}{\text{தி. பி.}}=\frac{|.50-.55|}{\cdot 016}=\frac{\cdot 05}{\cdot 016}$$

$$=3.1>2.58$$

எனவே, இரு விகிதங்களுக்குமுள்ள விகிதம் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி மிக அதிகமாக யிருப்பதால் எடுகோள் தவறென்று கொண்டு அந்த நாணயம் ஒரு தலைப்பட்டதென கூறலாம்.

(4) இரு திட்ட விலக்கங்களின் வித்தியாசத்தின் முக்கியத் துவம்

திட்டவிலக்கம் σ கொண்ட ஒரு இயல்நிலைத் தொகுதியி லிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட n உறுப்புக்கள் கொண்ட கூறு களின் திட்டவிலக்கங்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற திட்டவிலக்கக் கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ என்று காணப்பட்டுள்ளது. அதாவது, திட்டவிலக்கத்தின் திட்டப்பிழை $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ ஆகும். S என்பது n உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் திட்டவிலக்கமெனில், S க்கும் σ க்குமிடையே யுள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்து வத்தை

$$t = \frac{|S-\sigma|}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)}$$

என்ற தீர்மான விகிதத்தின் உதவியால் முன்போல் சோதிக்கலாம்.

ஒரு இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து n_1, n_2, உறுப்புக் கள் கொண்ட இறு கூறுகளின் திட்டவிலக்கங்கள் S_1 S_2 எனில், $(S_1 - S_2)$ இன் திட்டப்பிழை $\sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}$ ஆகும். ஆகவே, S_1 க்கும் S_2 க்குமுள்ள வித்தியாசத்தில் முக்கியத்துவத்தை

$$t = \frac{|S_1 - S_2|}{\text{தி. பி.}}$$

என்ற தீர்மான விகிதத்தைக் கொண்டு முன்போல் சோதிக்கலாம்.

மாதிரி : 167

200 உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் திட்டவிலக்கம் 0.67 என்று காணப்பட்டது. இக்கூறு, திட்டவிலக்கம் 0.8 கொண்ட ஒரு இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதென கூற முடியுமா?

தீர்வு :

இங்கு, S = 0.67, n = 200, σ = 0.8.

$$\text{திட்டவிலக்கத்தின் தி.பி.} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{0.8}{\sqrt{400}} = \frac{0.8}{20} = 0.04$$

$$t = \frac{|S-\sigma|}{\text{தி.பி.}} = \frac{|0.67-0.8|}{0.04} = \frac{0.13}{0.04} = 3.25$$

$$> 2.58$$

S க்கும் σ க்குமுள்ள வித்தியாசம் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி குறிப்பிடத்தக்க முக்கியத்துவ முள்ளதாக யிருப்பதால், இக்கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக கூறமுடியாது.

மாதிரி : 168

இரண்டு இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 640, 720 உறுப்புக்களைக் கொண்ட இரு கூறுகளின் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 4.6, 6.2 ஆகும். இனத்தொகுதிகளுக்கும் ஒரே திட்டவிலக்கம் இருக்க முடியுமாவென ஆராய்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

தீர்வு :

இரு இனத்தொகுதிகளுக்கும் ஒரே திட்டவிலக்கம் இருப்பதாகக் கொள்க.

இங்கு n_1 = 640 ; S_1 = 4.6

n_2 = 720 ; S_2 = 6.2

$$\text{தி. பி.} = \sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4.6)^2}{1280} + \frac{(6.2)^2}{1440}}$$

$$= 0.208.$$

$$\therefore\ t = \frac{|S_1-S_2|}{\text{தி. பி.}} = \frac{|4.6-6.2|}{.208} = \frac{1.6}{.208} = 7.6 > 2.58.$$

இரு திட்டவிலக்கங்களுக்குமுள்ள வித்தியாசம் 1% முக்கியத்துவ எல்லைகளின்படி குறிப்பிடத்தக்க அளவில் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக யிருப்பதால், இரு கூறுகளும் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்தவையென கூறமுடியாது. அதாவது இரு இனத்தொகுதிகளுக்கும் ஒரே திட்டவிலக்கம் இருக்க முடியாது.

வினாத்தாள் 18.

(1) பின் வருவனவற்றை விளக்குக :—

(i) தனி சம வாய்ப்புக் கூறு,

(ii) கூறுப் பரவல்.

μ, σ ஆகிய புள்ளியியல் பண்பளவைகளைக் கொண்ட இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரியின் கூறுப்பரவலை யெழுதுக. இக் கூறுப் பரவலின் பயன்களை விவாதிக்கவும்.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

(2) சமவாய்ப்புக் கூறு என்பதன் மூலம் அறியப்படுவது யாது. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

(3) ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு கூறு (மாதிரி) எடுக்கக் கூடிய ஏதேனும் மூன்று முறைகளைக் கூறுக. அவைகளில் சுற்றுச் சார்புகளுக்கொப்ப ஏதேனும் ஒரு முறை மற்றிரண்டு முறைகளை விட சிறப்புடையதாகலாமென்பதை விளக்குக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

(4) கூறு சராசரிகளின் பரவலென்றால் என்ன பொருள்?
(மதுரை. பி.எஸ்ஸி. 1971 ஏப்.)

(5) ஒரு மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை என்பதன் மூலம் நீவிர் அறிந்து கொள்வது யாது?

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 செப்.)

(6) ஒரு விகிதத்தின் விலக்கவர்க்கப் பிழை என்றாலென்ன?

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

(7) புள்ளியியலில் முக்கியத்துவ எல்லைகள் என்பதன் பொருள் பற்றி தெளிவாக விளக்கவும். உமது விடையை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

(8) இரு பெருங் கூறுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பு தோன்றும் விகிதங்கள் P_1, P_2 ; அக்கூறுகளிலுள்ள எண்ணிக்கை முறையே n_1, n_2. இவ்விகித வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா அல்லவா என்று எப்படிச் சோதிக்கலாம்

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

(9) கூறுப் பரவல், கூறுப் பண்பின் திட்ட விலக்கம் என்று எவற்றைக் குறிப்பிடுகிறீர்கள் ?

முக்கியத்துவ சோதனைகளில் இவற்றின் உபயோகங்களை விவரிக்கவும்.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1972 ஏப்)

(10) சிறு குறிப்பு வரைக :

(அ) கூறெடுத்தல் (சென்னை பி.காம். 1967 ஏப்)

(ஆ) முறையான கூறெடுத்தல்

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்., 68)

(இ) படுகைக் கூறெடுத்தல்

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

(ஈ) நோக்குடைய படுகைக் கூறெடுத்தல்

(சென்னை பி.காம். 1965 செப்.)

(உ) திட்டப்பிழை (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 ஏப்.)

(ஊ) முக்கியத்து எல்லைகள்

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 செப்.

பயிற்சி 19.

(1) 1600 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 99. இக் கூறு, கூட்டுச் சராசரி 100ம், தி.வி. 15 ம்

கொண்ட ஒரு இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதென கூற முடியுமா ?

(2) கூட்டுச் சராசரி 4.5 ம், விலக்கவர்க்கச் சராசரி 4.84 ம் கொண்ட ஒரு இயல் நிலை இனத் தொகுதியிலிருந்து 400 உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்பட்டது. இக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி 5 எனில் அக் கூறு ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு என்று கருத முடியுமா ?

(3) கிராமப்புற குடும்பங்களை விட நகர்ப்புற குடும்பங்கள் குறிப்பிடத்தக்க அளவு அதிகமாக தேநீர் அருந்துகின்றனரா வென தெரிந்துகொள்ள விரும்பப்படுகிறது. ஒரு ஆண்டில் ஒரு குடும்பம் வாங்குகின்ற சராசரி தேயிலையின் அளவு 3.0 ராத்தல் என்றும், விலக்கவர்க்கச் சராசரி 1.4 என்றும் காணப் பட்டது. 150 நகர்ப்புற குடும்பங்கள் கொண்ட கூறு பற்றிய விவரங்களை ஆராய்ந்ததில், ஒரு குடும்பம் ஒரு ஆண்டில் வாங் கிய சராசரி தெயிலையளவு 2.4 ராத்தல் என்று காணப்பட்டது. உங்களது முடிவென்ன ?

(4) 20 முதல் 25 வயது வரையுள்ள ஆண்களின் நாடித் துடிப்பு சராசரி 72 என்றும், திட்ட விலக்கம் நிமிடத்துக்கு 9.5 என்றும் நிர்ணயிக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. மேற் கண்ட வயதுப் பிரிவைச் சேர்ந்த வெகுதூரம் ஓடக்கூடிய 55 ஆண் களைச் சோதித்ததில் அவர்களுடைய நாடித்துடிப்புகளின் சராசரி நிமிடத்துக்கு 65 என்று காணப்பட்டது. பொதுச் சராசரியிலிருந்து இது குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த வித்தியாசமாக இதைக் கருத முடியுமா ?

(5) நம் நாட்டில் ஆயிரம் பண்ணைகளைக் கொண்ட ஒரு கூறிலிருந்து ஒரு ஆண்டில் கிடைத்த நெல் விளைச்சல்களின் கூட்டுச் சராசரி ஏக்கருக்கு 2000 ராத்தல் என்றும், திட்ட விலக்கம் ஏக்கருக்கு 192 ராத்தல் என்றும் காணப்பட்டது. அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் 1000 பண்ணைகளைக் கொண்ட மற்றொரு சம வாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி நெல் விளைச்சல் ஏக்கருக்கு 2100 ராத்தல் என்றும், திட்டவிலக்கம் ஏக்கருக்கு 224 ராத்தல் என்றும் காணப்பட்டது. இவ்விவரம், நம் நாட் டில் இரண்டு ஆண்டுகளிலும் சராசரி நெல் விளைச்சல் சம மாக யிருக்கிறதென்ற எடுகோளுக்கு முரண்பட்டதாவென ஆராய்க.

(6) ஒரு வியபாரி வகைக்கு 50 மின் விளக்குகள் வீதம் A, B. என்ற இரு வகை மின் விளக்குகள் வாங்கி, அவற்றின்

ஆயுட் காலங்களைச் சோதித்துப் பார்த்ததில் வகை A யின் சராசரி ஆயுட் காலம் 1282 மணி, திட்ட விலக்கம் 80 மணி யென்றும், வகை B யின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1208 மணி, திட்ட விலக்கம் 94 மணியென்றும் கண்டார். இவ்விருவகை யின் விளக்குகளும் தரத்தில் மாறுபட்டவை யென்று நிச்சய மாகக் கூற முடியுமா?

(7) ஒரு கூறிலுள்ள 6400 ஆங்கிலேயர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 67.85''; திட்ட விலக்கம் 2.56''; மற்றொரு கூறிலுள்ள 1600 ஆஸ்திரேலியர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 68.65'', திட்டவிலக்கம் 2.52''. இவ் விவரங்களைக் கொண்டு ஆஸ்திரேலியர்கள் ஆங்கிலேயர்களைவிட உயரமானவர் களென கருத முடியுமா?

(8) ஒரு கூறிலுள்ள 1000 வட இந்தியர்களின் சராசரி நாட்கூலி ரூ 2.50; திட்ட விலக்கம் ரூ. 1-50; மற்றொரு கூறி லுள்ள 1500 தென்னிந்தியர்களின் சராசரி நாட்கூலி ரூ. 2.70; திட்ட விலக்கம் ரூ. 2.00. வட இந்தியர்களின் கூலிக்கும் தென்னிந்தியர்களின் கூலிக்கும் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடுள் ளதா வென ஆராய்க.

(9) ஒரு நிலத்தில் விளைந்த உருளைக் கிழங்கிலிருந்து எடுக் கப்பட்ட ஒரு கூறிலுள்ள 100 கிழங்குகளின் எடையின் கூட்டுச் சராசரி 5 அவு. திட்ட விலக்கம் 1.5 அவு. மற்றொரு நிலத் தில் விளைந்த உருளைக் கிழங்குகளிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட 150 கிழங்குகளைக் கொண்ட கூறு ஒன்றின் சராசரி எடை அதே திட்ட விலக்கத்துடன் 4.5 அவு. இரு நிலங்களிலும் விளைந்த கிழங்குகளின் எடைகளில் அதிக வித்தியாசமிருக்கிறதாவென்று காண்க.

(10) ஒரு நாணயத்தை 10 000 தடவைகள் சுண்டியதில் 5195 தடவைகள் தலை விழுந்தது. அந்த நாணயம் ஒரு தலைப் பட்டதல்ல என்று கூற முடியுமா?

(11) ஒரு தாயக் கட்டை 9000 தடவைகள் வீசியெறியப் பட்டது. 5 அல்லது 6 குறிப்பிட்ட பக்கம் 3240 தடவைகள் விழுந்தால் அத்தாயக் கட்டை ஒருதலைப்பட்டதா வென்று காண்க.

(12) ஒரு மாநிலத்தில் ஒரு ஆண்டில் பிறந்த குழந்தைகளி லிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட 10,000 குழந்தைகளைக் கொண்ட

ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறில் 5200 குழந்தைகள் ஆண் குழந்தைகளென்று காணப்பட்டது. இவ்விவரத்தைக் கொண்டு ஆண்—பெண் பிறப்பு விகிதம் சமமாகயில்லையென்று கூற முடியுமா ?

(13) A என்ற வேலையிலுள்ள 2000 மனிதர்களில் 400 பேர் 50 வயதையுடையுமுன் இறந்தனர். B என்ற வேலையிலுள்ள 1000 மனிதர்களில் 175 பேர் 50 வயதையடையுமுன் இறந்தனர். இவ்வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க முக்கியத்துவமுள்ளதாவென்று காண்க.

(14) படித்து வேலையின்றிருப்பவர்கள் பற்றிய கணக்கெடுப்பு அறிக்கையிலிருந்து பின் கண்ட விவரம் தெரிய வருகிறது.

"A என்ற நகரில் 1460 பேர்களில் திருமணமாகி வேலையின்றி யிருப்பவர் எண்ணிக்கை 840. B என்ற நகரில் திருமணமாகி வேலையின்றி யிருப்பவர் எண்ணிக்கை 648."

இவ்விரு விகிதங்களுக்குமிடையே குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவம் பெற்ற வித்தியாசமிருக்கிறதா ?

(15) ஒரு பல்கலைக் கழக மாணவர்களின் மருத்துவ சோதனை பற்றிய அறிக்கையிலிருந்து கிடைத்த விவரம் வருமாறு :

"சோதிக்கப்பட்ட 1437 பையன்களில் 432 பேர் பார்வை குறைவுள்ளவர்கள் ; சோதிக்கப்பட்ட 441 பெண்களில் 152 பேர் பார்வைக் குறைவுள்ளவர்கள்".

பையன்களுக்கும் பெண்களுக்குமிடையே பார்வைக் குறைவுகளில் அதிக வேறுபாடுள்ளதாவென்று காண்க.

(16) ஒரு நகரிலுள்ள மனிதர்களிலிருந்து பேட்டி கண்ட 600 பேர்களில் 400 பேர்கள் புகை பிடிப்பவர்களாகக் காணப்பட்டனர். மற்றொரு நகரிலுள்ள மனிதர்களிலிருந்து பேட்டி காணப்பட்ட 900 பேர்களில் 450 பேர் புகைபிடிப்பவர்களாகக் காணப்பட்டனர். இரு நகர்களிலும் மனிதர்களிடம் காணப்படுகின்ற புகை பிடிக்கும் பழக்கங்களில் அதிக வேறுபாடுள்ளதாவென்று காண்க.

(17) ஒரு கூறிலுள்ள 200 உறுப்புகளின் அளவுகளின் திட்ட விலக்கம் .67. அக் கூறு பெறப்பட்ட இனத் தொகுதி

யின் திட்ட விலக்கமாகிய 8 இலிருந்து இத்திட்ட விலக்கம் குறிப்பிடத் தக்க அளவு மாறுபடவில்லையென்று நாம் கருத முடியுமா ?

(18) ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறிலுள்ள 800 இராணுவ வீரர்களின் சராசரி எடை 145 ராத்தல்; திட்ட விலக்கம் 15,8 ராத்தல் மற்றொரு சமவாய்ப்புக் கூறிலுள்ள 800 கடற் படை வீரர்களின் சராசரி எடை 100 ராத்தல் ; திட்ட விலக்கம் 16.3 ராத்தல்.

(i) சராசரி வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா ?

(ii) இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களின் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா ?

19. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு
(STATISTICAL QUALITY CONTROL)

தரக்கட்டுப்பாடு என்பதன் பொருளும், முக்கியத்துவமும்

பொறிவழித் தொழில் நிறுவனங்களை நிருவகிப்போர் ஒவ்வொருவருக்கும் தங்களது நிறுவனத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்கள் யாவும் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தை விடக் குறையாமலிருக்கின்றனவாயென்றும், எல்லாப் பொருட்களும் ஒன்றுக்கொன்று தரத்தில் மாறுபடாமல் இருக்கின்றனவாயென்றும் சோதித்துப் பார்த்து நிர்ணயிப்பது ஒரு முக்கியப் பிரச்சினையாகும். நிறுவனத்திலிருந்து வாடிக்கையாளர்களுக்கு அனுப்பப்படுகின்ற பொருட்கள் யாவும் நிறுவனத்தால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்திலிருக்கின்றனவாயென்பதைக் கவனிக்க வேண்டியது நிருவாகியின் முக்கிய கடமையாகும். பொருட்கள் தரக்குறைவாகயிருந்தாலும் அல்லது ஒரே சீரான தரமுடையனவாகயில்லாவிடினும் வாடிக்கையாளரின் அதிருப்திக்கு ஆளாக நேரிடும். ஆகவே, உற்பத்தி நிறுவனங்களில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களின் தரங்களை அவ்வப்போது சோதித்து அவை நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் குறைந்து காணப்பட்டால் தரக்குறைவிற்கான காரணங்களைக் கண்டுபிடித்து அவற்றை நிவர்த்தி செய்யவேண்டியது இன்றியமையாத பணியாகும். ஆனால், பொருட்களின் தரங்களை எவ்வாறு சோதிப்பது? உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்கள் ஒவ்வொன்றையும் சோதனையிட்டு, அவற்றின் தரங்களை மதிப்பிட்டு, நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்திலுள்ள பொருட்களை மட்டும் தெரிவு செய்து வாடிக்கையாளருக்கு அனுப்பலாம். இத்தகைய முறைக்கு 100 சதவீதச் சோதனை முறை என்று பெயர். ஆனால் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்கள் ஒவ்வொன்றின் தரத்தையும் சோதனையிடுவதால் மிகுதியான பணம், காலம், உற்பத்திக்கான மூலப்பொருட்கள் முதலியன

வீணாகிப்போவதோடல்லாமல் சில தொழில்களில் உற்பத்தியாகும் பொருட்கள் எல்லாவற்றையும் சோதனை செய்தால் இறுதியில் ஒன்று கூட மிஞ்சாமல் எல்லாமே அழிந்து போய்விடுவதுமுண்டு. எடுத்துக்காட்டாக, மின்விளக்குகள் உற்பத்தி செய்யப்படும் நிறுவனத்தில் உற்பத்தியாகும் எல்லா விளக்குகளையுமே அவை தீய்ந்து போகும்வரை எரியவிட்டு, அவற்றின் எரி சக்தியைச் சோதித்தால் இறுதியில் ஒரு விளக்கு கூட மிஞ்சாது. ஆகவே, உற்பத்தியாகும் பொருட்களிலிருந்து சில சிறு கூறுகள் (small samples) தெரிவு செய்யப்பட்டு அவற்றின் தரங்கள் சோதனையிடப்படுகின்றன. பின்னர் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி, அச்சிறு கூறுகளின் தரங்களின் மூலம் மொத்தப் பொருட்களின் தரம் மதிப்பிடப்படுகின்றது. இவ்வாறு மதிப்பிடப்பட்ட தரம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தை விட குறைவாகக் காணப்பட்டால், அக்குறைபாட்டிற்கான காரணம் ஆராயப்பட்டு அக்குறைபாடு உடனடியாக நீக்கப் படுகின்றது. இவ்வாறு உற்பத்திப் பொருட்களின் தரத்தைப் புள்ளியியல் முறையில் கட்டுப்படுத்தும் முறைக்குப் ''புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு'' (Statistical quality control) என்று பெயர்.

ஒரு பொறிவழி நிறுவனத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்கள் எல்லாவற்றையுமே சோதனை செய்து பார்க்காமல் அவற்றிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட சில கூறுகளை மட்டுமே சோதனை செய்து, அச்சிறு கூறுகளின் தரங்களின் மொத்தப் பொருட்களின் தரம் எந்த அளவுக்கு அமைந்திருக்கிறதென் பதை நிர்ணயிக்கும் புள்ளியியல் முறைதான் புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடாகும். இரண்டாம் உலக மகா யுத்தத்தின்போது அமெரிக்காவிலும், இங்கிலாந்திலும் இராணுவத் தொழிற்சாலை களில் போர்க்கருவிகளின் தரங்களைக்கட்டுப் படுத்தும் பொருட்டு தரக் கட்டுப்பாடு முறை பயன்படுத்தப்பட்டு அதன் பயன்கள் கண்டறியப்பட்ட பின்னரே அதன் முக்கியத்துவம் பெரிதும் உணரப்பட்டது. பொறிவழிப் பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற தொழிற்சாலைகளில் மட்டுமே பயன்படுத்தப் பட்டு வந்த இந்த தரக்கட்டுப்பாடு முறை தற்போது வணிகத் துறை, அலுவலக வேலைகள் மற்றும் எல்லாத் தொழிற்றுறை களுக்கும் விரிவுபடுத்தப்பட்டு வருகிறது.

தரக்கட்டுப்பாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் முறைகள்

தரக்கட்டுப்பாட்டில் பின்வரும் இரு புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(அ) புள்ளியியல் கூறெடுத்தல் (Statistical sampling)

(ஆ) கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படம் (Control chart)

இவ்விரண்டுமே நிகழ்வுத்தகவு விதியின் (law of probability) அடிப்படையில் அமைந்தவையாகும். ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் பொருட்களிலிருந்து பல சிறு கூறுகள் தெரிவு செய்து, அக்கூறுகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள பொருட்களின் தரங்களைச் சோதனையிட்டுப் பார்த்தால், பொருட்களின் தரம் கூறு தோறும் சிறிது மாறுபட்டிருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு கூறுதோறும் காணப்படுகின்ற தர மாறுபாடுகளை இறு வகையாகப் பிரிக்கலாம். முதல் வகை மாறுபாடுகள் "நேர்தகவு மாறுபாடுகள்" (chance variations) எனப்படும். இத்தகைய மாறுபாடுகளின் காரணங்களை எளிதில் கண்டுபிடிக்க முடியாதாகையால் அவற்றைக் கட்டுப்படுத்தவும் முடியாது. இரண்டாம் வகை மாறுபாடுகள் பொறியில் (Machine) அல்லது உற்பத்தி முறையிலுள்ள ஏதாவது கோளாறினுல் ஏற்படுபவையாகும். ஆகவே, இத்தகைய தர மாறுபாடுகளைத் தரக்கட்டுப்பாடு முறையினுல் கட்டுப்படுத்த முடியும். இத்தகைய தர மாறுபாடுகளைக்கொண்ட பொருட்களின் குறைபாடுகளைக் கண்டறிய கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படம் பயன்படுகிறது.

(அ) புள்ளியியல் கூறெடுத்தல் (Statistical Sampling)

உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்கள் எல்லாவற்றையும் சோதித்துப் பார்ப்பதால் ஏராளமான பணமும் மூலப்பொருட்களும் செலவாகின்றதோடல்லாமல் காலமும், உற்பத்திப் பொருட்களும் வீணுகின்றன. ஆகவே, உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களிலிருந்து சிறு கூறுகளைத் தெரிவு செய்து அவற்றைச் சோதித்து அதன் மூலம் மொத்தப் பொருட்களின் தரத்தை மதிப்பிட்டுத் தரத்தைக் கட்டுப்படுத்துவதன் மூலம் உற்பத்தி முறையைச் சிக்கனமாக்கவும், உற்பத்திச் செலவைக் குறைக்கவும் முடிகிறது. எனவே, தெரிவு செய்யப்படுகின்ற சிறு கூறுகள் மொத்த உற்பத்திப் பொருட்களின் தரத்தைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய சம வாய்ப்புக் கூறுகளாகயிருக்க (random samples) வேண்டும். இத்தகைய சம வாய்ப்புக் கூறுகளைத் (random samples) தெரிவு செய்யும் முறைகளை முன் அத்தியாயங்களில் கண்டோம். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட சிறு கூறுகளிலுள்ள பொருட்களின் தரங்கள் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்திலிருக்கின்றனவா அல்லது குறைபாடுகளுடன் இருக்

நின்றனவா என்பதைக் கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படத்தின் உதவியால் கண்டறியலாம்.

கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படம் (Control chart)

கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் என்பது பொருட்களின் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினைக் குறிக்கின்ற ஒரு மையக் கோட்டினையும், அதன் இறுபுறமும் பொருட்களின் தரம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் எந்த அளவு மாறுபட்டிருக்கலாமென்பதைக் காட்டக்கூடிய இரண்டு தர எல்லைக் கோடுகளையும் கொண்ட ஒரு வரைபடமாகும். மையக் கோட்டின் மேல் புறமுள்ள எல்லைக்கோட்டிற்கு "மேல் கட்டுப்பாடு எல்லை" (upper control limit) என்றும், கீழேயுள்ள எல்லைக்கோட்டிற்குக் கீழ் கட்டுப்பாடு எல்லை" (lower control limit) என்றும் பெயர். மையக்கோடு தடித்த கோடாகவும் (thick lines), எல்லைக்கோடுகள் புள்ளிக்கோடுகளாகவும் (dotted lines) போடப்பட்டிருக்கும். இவற்றிற்கு அடியில் கூறுகளின் வரிசை எண்களைக் குறிக்கின்ற ஒரு கிடை அச்சு (horizontal axis) ஒன்று வரையப்பட்டிருக்கும். இடது பக்க ஓரத்தில் குறிப்பிட்ட தரத்தைக் குறிக்கின்ற அளவுக் குறிகளைக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்து அச்சு (vertical axis) வரையப்பட்டிருக்கும். இக் கோடுகளுடன் கூடிய ஒரு வரைபடமே கட்டுப்பாடு கோட்டுப் படமாகும். தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறுகளின் தரங்களைக் குறிப்பிடுகின்ற மையக்கோட்டினின்றும் விலகி ஆனால் கட்டுப்பாடு எல்லைக்கோடுகளுக்கிடையே இருக்கின்ற புள்ளிக்குரிய கூறு, நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் சிறிது மாறுபட்டிருந்த போதிலும், அச்சிறு மாறுபாடு நேர் தகவு அல்லது தெரியாத காரணங்களினாலேற்பட்டதெனக் கொண்டு அக்கூறின் தரத்தை ஏற்றுக்கொள்ளலாம். இத்தகையகூறுகளின் தர மாறுபாடுகள் பொறுத்துக்கொள்ளப்படுவதால் கட்டுப்பாடு எல்லைக்கோடுகளைப் பொறுமை எல்லைகள் (tolerance limit) என்றும் கூறுவதுண்டு. இவ்வாறு ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கத் தரத்தினையுடைய ஒரு கூறு "ஏற்புடைக்கூறு" (acceptance sample) எனப் படுகிறது. எல்லைக்கோடுகளுக்கு வெளியே விழுகின்ற புள்ளிகளுக்குரிய கூறுகளின் தரங்கள் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் மாறுபட்டுள்ளதாகக் கருதப்பட்டு அக்கூறுகள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தகாதவையாகத் தள்ளப்படுகின்றன. இவ்வாறு புள்ளிகளிடப்பட்ட ஒரு கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படத்தைப் பார்த்த உடனேயே உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டுக்குள்ளிருக்கிறதா, இல்லையா என்று தொழிற்சாலை நிருவாகியால் கண்டு கொள்ள முடியும்.

கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படங்களின் வகைகள்

உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்களின் தரத்தை, அப் பொருட்களின் கூட்டுச் சராசரி ($\bar{x}$), வீச்செல்லை (r), தர விலக்கம் (σ), குறைபாடுள்ள பொருட்களின் விகிதம் (p) முதலிய புள்ளியியல் மாறிலிகளின் அடிப்படையில் பலவிதமாகச் சோதிக்கலாம். அதற்கேற்பப் பல்வேறுவகையான கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படங்கள் வரையப்படுகின்றன. பல்வேறு வகையான கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படங்கள் பின்வருமாறு:

(அ) ($\bar{x}$, r) அல்லது ($\bar{x}$, σ) கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படம்.

(ஆ) x — கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம்

(இ) r அல்லது σ — கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படம்

(ஈ) p — கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம்

(உ) c — கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம்.

(x, r) — கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படத்தில் சராசரி (x) க்கு ஒன்றும் வீச்செல்லை (r)க்கு ஒன்றுமாக இரண்டு கட்டுப்பாடு கோட்டுப் படங்கள் ஒரே தாளில் ஒரே கிடையச்சின் மேல் வரையப்பட்டிருக்கும். இதுபோல், (x σ) கட்டுப்பாடுக் கோட் படத்தில், சராசரி (x) க்கு ஒன்றும், தரவிலக்கம் (σ) க்கு ஒன்றுமாக இரண்டு கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படங்கள் ஒரே தாளில் ஒரே கிடை அச்சின் மேல் வரையப்பட்டிருக்கும். பொருட்களின் தரம் சராசரி ($\bar{x}$) இன் அடிப்படையில் மட்டுமே நிர்ணயிக்கப்படுவதாயிருந்தால். சராசரிக் ($\bar{x}$) கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் மட்டுமே கிடையங்சுக்கு மேலே வரையப்பட்டிருக்கும் இதுபோல், வீச்செல்லை (r) அல்லது தரவிலக்கம் (σ) ஆகியவற்றுள் ஏதாவது ஒன்றின் அடிப்படையில் தரம் சோதிக்கப்படயிருந்தால் வீச்செல்லைக் கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் அல்லது தரவிலக்கக் கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் மட்டுமே கிடையச்சுக்கு மேலே வரையப்பட்டிருக்கும். உற்பத்தியாகும் பொருட்களில் குறைபாடுள்ள பொருட்களின் (defective articles) விகிதம் அல்லது சதவீதத்தின் அடிப்படையில் தரத்தைச் சோதிக்க விகிதக்கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் (p—கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படம்) வரையப்படுகிறது. இதுபோன்று ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையில் அடிப்படையில் பொருட்களின் தரத்தைச் சோதிக்க c—கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படம் வரையப்படுகிறது.

கட்டுப்பாடு எல்லைகளை நிர்ணயித்தல் (முழுத் தொகுதியின் தர விலக்கம் தெரிந்தபோது)

ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரே நேரத்தில் உற்பத்தியாகின்ற பொருட்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டகூறுகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற தர மாறுபாடுகளை ஆராய்வதற்கும், உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்கள் ஒரே சீரானதரத்துடனிருக்கின்றனவா என்பதை அறிந்து கொள்வதற்காக வெவ்வேறு நேரங்களில் உற்பத்தியாகின்ற பொருட்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறுகளின் தரங்களை ஆராய்வதற்கும் கட்டுப்பாடு எல்லைகள் பயன்படுகின்றன. இக்கட்டுப்பாடு எல்லைகள் இதற்கு முன்னால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களைப் பற்றிய விவரங்களையும், தற்போது உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்களைப் பற்றிய விவரங்களையும் புள்ளியியல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி ஆராய்ந்து நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்திலமைந்த பொருட்களின் பரவலை அமைத்துஅப்பரவலின் தர விலக்கம் கணக்கிடப் படுகிறது. இத்தரவிலக்கமானது தரமான பொருட்களடங்கிய இனத் தொகுதியின் (popultaion) தர விலக்கமாகும். இது பொதுவாக σ என்று குறிக்கப்படுகிறது. இத்தகைய இனத் தொகுதித் தர விலக்கம் (Population standard deviation) தெரிந்தால் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படத்தில் எல்லைக் கோடுகளை மையக்கோட்டில் இருபுறத்திலும் $\pm 3\sigma'$ என்ற தூரத்தில் வரைந்து கொள்ளலாம். இவ்வாறு வரையப்படுகின்ற எல்லைக் கோடுகள் பெரும்பாலும் திருப்தியளிப்பனவாகவே இருக்கின்றன.

கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படத்தின் பயன்கள்
(Uses of control charts)

உற்பத்தி நிறுவனங்களில் உற்பத்திப் பொருட்களின் தரம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் அதிகமாக மாறுபடாமலிருக்கின்றதா என்பதைச் சோதிப்பதற்கும், பொருட்களின் தரம் உற்பத்தி முழுவதும் ஒரே சீராயிருக்குமாறு கட்டுப்படுத்துவதற்கும் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுத்திடம் பயன்படுகிறது. முன்னால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் தரத்தை ஆராய்ந்து. பின்னால் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருட்களின் தரத்தை நிர்ணயிப்பதற்கும், தரத்தை ஒரே சீராகக் கட்டுப்படுத்துவதற்கான வழிமுறைகளை வகுப்பதற்கும் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படங்கள் பயன்படுகின்றன. பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப் பட்டுக்கொண்டிருக்கும் போதே உற்பத்தித் தரத்தில் காணப்

படுகின்ற குறைபாடுகளை உடனுக்குடன் திருத்திக் கொள்ள உதவியாகயிருப்பதோடு, உற்பத்திச் செலவைக் குறைத்துச் சிக்கனமான முறையில் பொருட்களின் தரங்குன்றாதவாறு உற்பத்தியைப் பெருக்கத் துணைபுரியும் வழிகாட்டியாகவும் கோட்டுப்படங்கள் பயன்படுகின்றன.

கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் வரைதல்

பொருட்களின் தன்மைகளுக்கேற்றவாறும், கட்டுப்படுத்த வேண்டிய தரத்திற்கேற்றவாறும், தரக்கட்டுப்பாட்டிற்கென பலவகையான கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படங்கள் பயன்படுகின்றன என்று கண்டோம். அவற்றுள் அதிகமாகப் பயன்பட்டு வருகின்ற மூன்றுவகைக் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படங்களைப் பற்றி மட்டுமே இங்கு விளக்கப்படுகின்றது.

$(\bar{x}, r)$ — கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் வரைதல்

திருகாணிகள் (screws) செய்யப்படுகின்ற ஒரு தொழிற்சாலையில் 15.0 மில்லி மீட்டர் நீளமுள்ள திருகாணிகள் பொறிகளின் (Machines) மூலம் செய்யப்படுகின்றன எனக்கொள்வோம். அப்பொறிகள் செய்கின்ற திருகாணிகளுள் பெரும்பாலானவை 15.0 மி.மீ. நீளத்திலிருக்கலாம். ஆனால் பல திருகாணிகள் 15.1, 15.05, 14.95, 14.8 என்று குறிப்பிட்ட நீளத்தினின்றும் சற்று மாறுபட்டு இருக்கலாம். மேலும் பல திருகாணிகள் நீளத்தில் அதிகமாக மாறுபட்டிருக்கலாம். அவற்றுள் நிர்ணயிக்கப்பட்ட நீளமாகிய 15.0 மி.மீ. நீளத்தினின்றும் எந்த அளவு மாறுபாடுகளையுடைய திருகாணிகளை தரமானவையென ஏற்றுக்கொள்வது? இத்தகைய தரமான திருகாணிகளை மட்டுமே அப்பொறி உற்பத்தி செய்கின்றதா? அல்லது பொறியானது கட்டுப்பாட்டினின்றும் மாறுபட்டு இயங்கிவருகின்றதா? என்ற பல வினாக்களுக்கான விடைகளை $(\bar{x}, r)$ கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் வரைந்து நிர்ணயிக்க முடியும்.

ஒரு பொறி உற்பத்தி செய்கின்ற திருகாணிகளிலிருந்து n எண்ணிக்கைகொண்ட N சமவாய்ப்புச் சிறு கூறுகளைத் (random samples) தெரிவு செய்து கொள்ளவேண்டும். (பொதுவாக ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள எண்ணிக்கையாகிய n—ஆனது 4க்குக் குறையாமலும், 6க்கு மிகாமலும் கூறுகளின் எண்ணிக்கையாகிய N ஆனது 20 வரையும் இருத்தல் நன்று) ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள திருகாணிகளின் கூட்டுச் சராசரி நீளத்தைக் $\left(\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}\right)$ கணக்கிட வேண்டும். $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்பன N

கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகள் எனக்கொள்வோம். N கூறுகளிலுமுள்ள மொத்தத் திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை Nn ஆகும். இந்த Nn திருகாணிகளின் பொதுச்சராசரியைக் $\left(\frac{\Sigma x}{Nn}\right)$ கணக்கிட வேண்டும். இப்பொதுச்சராசரியை x எனக்கொள்வோம். இப்பொழுது, ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள திருகாணிகளுள் மிக நீளமான திருகாணிக்கும், மிகக்குட்டையான திருகாணிக்குமுள்ள வித்தியாசமாகிய வீச்செல்லை (r) யைக் கணக்கிட வேண்டும்.

கூறுகளிலுமுள்ள வீச்செல்களை R_1, $R_2 \ldots R_n$ எனக் கொள்வோம். இந்த N வீச்செல்லைகளின் சராசரி வீச்செல்லை $\bar{R}$-ஐக் கணக்கிடவேண்டும். R_1, R_1 ……, R_n என்பன N கூறுகளின் வீச்செல்லைகளெனக் கொண்டால்,

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_n}{N}$$ ஆகும்.

$\bar{X}$-கோட்டுப் படம் ($\bar{X}$-chart) *அல்லது சராசரிகளின் விளக்கப் படம்* (mean chart)

இப்பொழுது ஒரு தாளில் இடது பக்க ஓரத்தில் சராசரி அளவுகளைக் குறிக்கக்கூடிய ஒரு நிலைக்குத்து அளவுகோல் (vertical scale) வரைந்துகொள்க. இந்த அளவுகோலில், திருகாணிக் கூறுகளின் பொதுச் சராசரியாகிய $\bar{X}$-ஐக் குறிக்கக் கூடிய அளவுக்குறியின் வழியாக ஒரு கிடைக்கோடு (horizontal) line) வரைக. இக் கிடைக்கோட்டிற்கு $\bar{X}$-கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படத்தின் மையக் கோடு (central line) என்று பெயர். கட்டுப்பாடு எல்லைகளைக் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படும் வகையில் A, A1, A2, C2, B1, B2. B3, B4. d2, D1, D2, D3, D4 என்ற காரணிகளை (factors), "பொருட்களைச் சோதிக்கும் அமெரிக்கக் கழகம்" (American Society for Testing Materials) கணக்கிட்டுப் பட்டியலாக வெளியிட்டுள்ளது. இப் பட்டியலுக்கு ASTM பட்டியல் என்று பெயர். (இப் பட்டியலின் பிரதியொன்று பின்னால் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது) இப் பட்டியலிலிருந்து n-க்குரிய A2 இன் மதிப்பைப் பெற்று $\bar{X} \pm A2\ \bar{R}$ என்ற மதிப்புக்களைக் கணக்கிடவேண்டும். இப்பொழுது, நிலைக்குத்து அச்சில் $\bar{X} + A2\ \bar{R}$க்குரிய அளவுக் குறியின் வழியாகவும், $\bar{X} - A2\ \bar{R}$-க்குரிய அளவுக்குறியின் வழியாகவும் இரண்டு புள்ளிக் கோடுகள் (dotted lines) மையக் கோட்டிற்கு இணையாக அதன் இரு புறமும் வரையவேண்டும். $\bar{X} + A2\ \bar{R}$ ஐக் குறிக்கின்ற புள்ளிக்

கோட்டிற்கு "மேல் கட்டுப்பாடு எல்லை" (Upper control limit) என்றும் $\bar{X}-A_2R$ஐக் குறிக்கின்ற புள்ளிக்கோட்டிற்கு "கீழ்க் கட்டுப்பாடு எல்லை" (Lower Control limit) என்றும் பெயர். இவற்றை முறையே மே.க.எ. (U.C.L.) என்றும் கீ.க.எ. (L.C.L.) என்றும் சுருக்கி எழுதலாம். கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லைக் கோட்டிற்குக் கீழே சிறிது தூரத்தில் கூறுகளின் வரிசை எண்களைக் குறிக்கின்ற ஒரு கிடையச்சு (horizontal axis) வரைந்து கொள்க. $\bar{X}$-ஐக் குறிக்கின்ற மையக்கோடு, மேல், கீழ் எல்லைக்கோடுகள் கூறுவரிசையெண் கிடையச்சு, நிலைக்குத்து அளவுகோல் ஆகியவைகொண்ட படத்திற்குத் தாள் சராசரிக் கோட்டுப் படம் (Average Chart) அல்லது $\bar{X}$-கோட்டுப்படம் ($\bar{X}$-Chart) என்று பெயர்.

பொதுவாக, உற்பத்திப் பொருட்களின் தரம் குறையாதவாறு இருக்கவேண்டுமாயின், பொருட்கள் நிர்ணயிக்கப்பட்ட சராசரி, வீச்செல்லை ஆகிய இரு அளவுகளினின்றும் அதிகமாக மாறுபடாமலிருக்க வேண்டும். ஆகவே ஒவ்வொரு சிறு கூறின் சராசரி அளவும், வீச்செல்லை அளவும் கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்குள்ளேயே இருக்கின்றனவா என்று சோதித்துப் பார்க்க வேண்டுமாகையால் $\bar{X}$-கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படத்தையும், R-கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படத்தையும் ஒரே தாளிலேயே ஒரே கூறு வரிசையெண் கிடையச்சின் மேல் வரைவது வழக்கம்.

கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படங்களில் கோடுகளை வரைவதற்கான கணக்கீட்டுக் காரணிகள்
(சிறு கூறுகள்)

கூறிலுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கை	சராசரிகளின் கோட்டுப் படம்			தரவிலக்கங்களின் கோட்டுப் படங்கள்					வீச்செல்லைகளின் கோட்டுப் படங்கள்				
	கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணிகள்			மையக் கோட்டுக் காரணி	கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணிகள்				மையக் கோட்டுக் காரணி	கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணிகள்			
(n)	A	A1	A2	C2	B1	B2	B3	B4	d2	D1	D2	D3	D4
2	2.121	3.759	1.880	0.5642	0	2.064	0	3.658	1.128	0	3.686	0	3.268
3	1.732	2.394	1.023	0.7236	0	1.948	0	2.692	1.693	0	4.358	0	2.574
4	1.500	1.880	0.729	0.7979	0	1.859	0	2.330	2.059	0	4.698	0	2.282
5	1.342	1.596	0.577	0.8407	0	1.789	0	2.128	2.326	0	4.918	0	2.114
6	1.225	1.410	0.483	0.8686	0.993	1.785	0.003	1.997	2.534	0.000	5.076	0	2.004
7	1.134	1.277	0.419	0.8882	0.086	1.690	0.097	1.903	2.704	0.205	5.203	0.976	1.924
8	1.061	1.175	0.373	0.9027	0.153	1.653	0.169	1.831	2 847	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	1.094	0.337	0.9139	0.207	1.621	0.227	1.774	2.970	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	1.028	0.308	0.9228	0.252	1.594	0.273	1.727	3.078	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.973	0.285	0.9300	0.290	1.570	0.312	1.688	3.173	0.812	5.534	0.259	1.744
12	0.966	0.925	0.266	0.9359	0.324	2.648	0.346	1.654	3.258	0.925	5.593	0.284	1.717
13	0.832	0.884	0.249	0.9410	0.353	1.529	0.375	1.625	3.336	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.848	0.235	0.9453	0.378	1.512	0.400	1.599	3.407	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.817	0.223	0.9490	0.401	1.497	0.428	1.577	3.472	1.207	5.737	0.348	1.652

R-கோட்டுப்படம் (R-Chart) **அல்லது வீச்சுவிளக்கப்படம்** (Range Chart)

இப்பொழுது $\bar{X}$-கோட்டுப்படத்தின் கீழ் எல்லைக்கோட்டிற்குக் கீழே சிறிது இடைவெளிவிட்டு, ஆனால் கூறுவரிசையெண்ணைக் குறிக்கின்ற கிடையச்சுக்கு மேலே சிறிது தூரத்தில் இடது பக்க ஓரத்தில் கூறுகளின் வீச்செல்லை அளவுகளைக் குறிக்கின்ற ஒரு நிலைக்குத்து அளவுகோலை (vertical axis) வரைந்து கொள்க. சராசரி அளவுகோலும், வீச்செல்லை அளவுகோலும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மேலேயே சிறிது இடைவெளி விட்டு அமைந்திருக்கலாம், இப்பொழுது, பொதுச் சராசரி வீச்செல்லை $\bar{R}$-ஐக் குறிக்கின்ற அளவுக் குறியின் வழியாக ஒரு கிடைக்கோடு வரையவும். இக் கோட்டிற்கு R-கோட்டுப்படத்தின் மையக்கோடு என்று பெயர். ASTM பட்டியலிலிருந்து n-க்குரிய D3, D4 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெற்று $D_3\bar{R}$, $D_4\bar{R}$ என்ற மதிப்புக்களைக் கணக்கிடவேண்டும். நிலைக்குத்து அளவுகோலில் $D3\bar{R}$ க்குரிய அளவுக்குறியின் வழியாகவும் $D4\bar{R}$ க்குரிய அளவுக்குறியின் வழியாகவும் இரண்டு புள்ளிக்கோடுகள் மையக் கோட்டிற்கு இணையாக வரையவேண்டும். $D_3\bar{R}$ வழியாக வரையப்படும் புள்ளிக்கோட்டிற்கு R கோட்டுப் படத்தின் கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லை (Lower Control Limit) அல்லது கீ.க.எ. (L.C.L.) என்றும் $D4\bar{R}$ வழியாக வரையப்படும் புள்ளிக் கோட்டிற்கு R கோட்டுப் படத்தின் மேல் கட்டுப்பாடு எல்லை (Upper Control Limit) அல்லது மே.கீ.எ. (U.C.L.) என்றும் பெயர். சிறு கூறுகளிலுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையாகிய n ஆனது 6 அல்லது 6க்குக் குறைவாகயிருப்பின் அதற்குரிய D3யின் மதிப்பு 0 என்று ASTM பட்டியலிலிருந்து காணலாம். ஆகவே, n-இன் மதிப்பு 6ம், 6க்குக் குறைவாகவும் இருந்தால் $D3\bar{R}=0$ என்று கிடைப்பதால் R கோட்டுப்படத்தின் கீழ் எல்லைக்கோடு வீச்செல்லை அளவுகோலின் 0 அளவுக்குறி வழியே செல்லும் என்று அறியலாம். $\bar{R}$-ஐக் குறிக்கின்ற மையக் கோடு, மேல், கீழ் எல்லைக் கோடுகள், வீச்செல்லை அளவுகளைக் குறிக்கின்ற நிலைக்குத்து அளவுகோல், கூறுகளின் வரிசை எண்களைக் குறிக்கின்ற கிடையச்சு ஆகியவையடங்கிய படத்திற்குத்தான் வீச்செல்லைக் கோட்டுப்படம் (Range Chart) அல்லது R கோட்டுப்படம் (R-chart) என்று பெயர். கூறுகளின் வரிசை எண்களைக் குறிக்கின்ற ஒரே கிடையச்சின் மேல் வரையப்பட்ட X கோட்டுப் படம், R கோட்டுப் படம் ஆகிய இரண்டும் சேர்ந்த படத்திற்குச் "சராசரி, வீச்செல்லைக் கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படம்" (Average-Range control chart) அல்லது ($\bar{X}$, R) கோட்டுப் படம் ($\bar{X}$, R chart) என்று பெயர்.

இப்பொழுது ஒவ்வொரு சிறு கூறுக்குமுரிய சராசரி, வீச் செல்லை ஆகிய அளவுகளைக் குறிக்கின்ற புள்ளிகள் முறையே $\bar{X}$ கோட்டுப் படத்திலும், R கோட்டுப் படத்திலும் குறிக்கப்படுகின்றன. கட்டுப்பாடு எல்லைகளைத் தாண்டி வெளியே விழுகின்ற புள்ளிகள் அப்புள்ளிகளுக்குரிய கூறுகளின் தரம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் (அதாவது $\bar{X}$, $\bar{R}$ ஆகியவற்றினின்றும்) அதிகமாக மாறுபட்டிருப்பதையும், உற்பத்தியானது தரக் கட்டுப்பாட்டை மீறியிருப்பதையும், குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ள வேண்டும். புள்ளிகள் யாவும் எல்லைக் கோடுகளுக்குள்ளேயே விழுந்தால் உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டினுள்ளிருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும்.

கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படத்தினைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் பயன்படும் சில விதிமுறைகள்

(1) ஏதாவது ஒரு புள்ளி எல்லைக்கோடுகளுக்கு வெளியே விழுந்தால் உற்பத்தித் தரத்தைப் பாதிக்குமளவிற்கு ஒன்று அல்லது பல வெளிக்காரணங்களிருப்பதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(2) தொடர்ச்சியாக 7 புள்ளிகள் மையக்கோட்டிற்கும் மேல் எல்லைக் கோட்டிற்குமிடையே விழுந்தால் அல்லது மையக்கோட்டிற்கும் கீழ் எல்லைக் கோட்டிற்குமிடையே விழுந்தால், உற்பத்தித் தரமானது நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் விலகிச் செல்வதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(3) தொடர்ச்சியாக 11 புள்ளிகளுள் 10 புள்ளிகள் மையக்கோட்டிற்கும் மேல் எல்லைக்கோட்டிற்குமிடையே விழுந்தால் அல்லது மையக்கோட்டிற்கும் கீழ் எல்லைக்கோட்டிற்கும் இடையே விழுந்தால் உற்பத்தித்தரம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் மாறுபட்டுவிட்டதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

உற்பத்திச் செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து பல சிறு கூறுகள் தெரிவு செய்து அவற்றிலுள்ள, பொருட்களை அளவிட்டு, அந்த அளவுகளைக் கூறுகள் வாரியாகப் பட்டியலமைத்த பின் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் எவ்வாறு வரைவதென்பது பற்றியும், அதன்பின்னர் கட்டுப்பாடுப்படத்திலிருந்து உற்பத்தித் தரத்தின் தன்மையை எவ்வாறு நிர்ணயிப்பதென்பது பற்றியும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரிச் சோதனையின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவாக கூறுகளின் எண்ணிக்கை

20க்குக் குறையாமலிருந்தால்தான் பொருட்களின் தரத்தைத் திட்டவட்டமாக நிர்ணயிக்கமுடியுமாயினும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் பொருட்டும், குழப்பமேற்படாமலிருக்கும் பொருட்டும் நான்கு பொருட்களைக்கொண்ட 10 கூறுகளைக்கொண்டு கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் வரையும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி : 169

ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு பொறியானது 15.0 மி.மீ. நீளமுள்ள திருகாணிகள் செய்வதற்காகச் சரி செய்யப்பட்டு இயக்கப்படுகிறது. முதலில் தயாரான திருகாணிகளிலிருந்து கூறுக்கு 4 திருகாணி வீதம் 10சம வாய்ப்புச் சிறு கூறுகள் (random small sample) தெரிவு செய்யப்பட்டு ஒவ்வொரு சிறு கூறிலுமுள்ள திருகாணிகளின் நீளங்கள் ஒரு தசம இட மில்லி மீட்டருக்குத்திருத்தமாக அளவிடப்பட்டுக் கிடைக்கப்பெற்ற விவரங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன ($\bar{X}$, R) கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படம் வரைந்து, உற்பத்தியானது தரக்கட்டுப்பாட்டுக்குள்ளிருக்கிறதா என்பதை ஆராய்க.

கூறுகளின் வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
அளவிடப்பட்ட திருகாணிகளின் நீளங்கள் (மி. மீட்டரில்)	15.4 14.1 15.6 15.5	14.4 14.3 16.0 14.7	16.5 14.4 15.3 14.7	14.4 14.1 13.5 13.3	15.0 16.2 14.0 15.2	13.1 14.6 15.3 16.2	15.7 15.2 13.2 15.8	16.5 14.2 16.8 17.8	15.1 14.8 13.7 15.3	16.0 15.3 13.9 15.8

தீர்வு :

கூறுகளின் வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
அளவிடப்பட்ட திருகாணிகளின் நீளங்கள் (மி. மீட்டரில்) (n = 4)	15.4 14.1 15.6 15.5	14.4 14.3 16.0 14.7	16.5 14.4 15.3 14.7	14.4 14.1 13.5 13.3	15.0 16.2 14.0 15.2	13.1 14.6 15.3 16.2	15.7 15.2 13.2 15.8	16.5 16.2 16.8 17.8	15.1 14.8 13.7 15.3	16.0 15.3 13.9 15.8	
மொத்தம்	60.6	59.4	60.9	55.3	60.4	59.2	59.9	67.3	58.9	61.0	602.9
சராசரி $\bar{x}$	15.15	14.85	15.22	13.82	15.10	14.80	14.98	16.82	14.72	15.25	$\bar{x} = \frac{602.9}{40}$ 15.07
மீப்பெரு நீளம் மீச்சிறு நீளம்	15.6 14.1	16.0 14.3	16.0 13.3	14.4 14.0	16.2 13.1	16.2 13.2	15.8 13.2	17.8 13.7	15.3 13.7	16.0 13.9	
வீச்செல்லை (R)	1.5	1.7	2.1	1.1	2.2	3.1	2.6	1.6	1.6	2.1	19.6

வீச்செல்லைகளின் சராசரி $\bar{R} = \frac{19.6}{10} = 1.96$ மி.மீ.

ASTM பட்டியலிலிருந்து, $n = 4$க்கு $A2 = 0.73$, $D3 = 0$, $D4 = 2.28$ என்ற மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

$A_2\bar{R} = 0.73 \times 1.96 = 1.43$

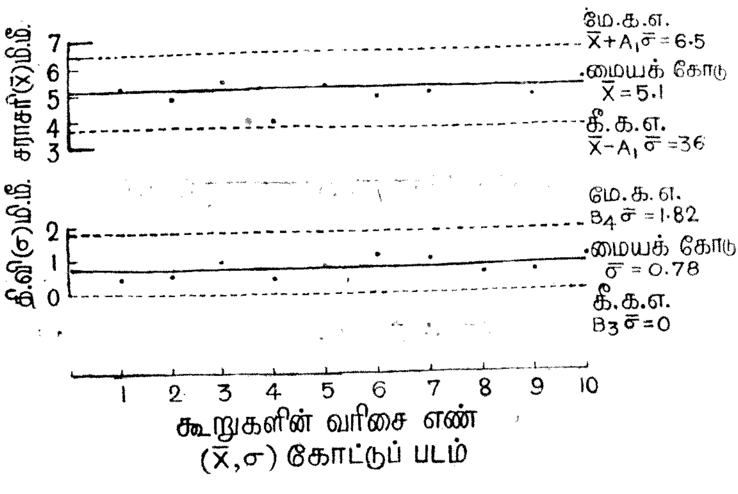
ஆகவே, சராசரியின் மே.க.எ $= \bar{X} + A_2\bar{R} = 15.07 + 1.43 = 16.5$

கீ.க.எ $\bar{X} - A_2\bar{R} = 15.07 - 1.43 = 13.64$

வீச்செல்லையின் மே.க.எ. $= D_4\bar{R} = 2.28 \times 1.96 = 4.5$

கீ.க.எ $= D_3\bar{R} = 0$

$(\bar{X}, R)$ — கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படம் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



$(\bar{X}, \sigma)$ கோட்டுப் படம்

படம் 38.

$\bar{x}$—கோட்டுப்படத்தில் 8-ஆவது கூறுக்குரிய புள்ளி மட்டும் எல்லைக்கோடுகளுக்கு அப்பால் விழுந்திருப்பதை அறிகிறோம். இதை உற்பத்திரத்தரக் கட்டுப்பாடு மீறப்படுவதற்கான அறி குறியாகக் கருதலாம். இருப்பினும் $\bar{X}$, R ஆகிய இரு கட்டுப் பாடுக் கோட்டுப்படங்களிலும் புள்ளிகள் மையக்கோட்டின்

மேலும், மேல்புறமும், கீழ்புறமும் மாறி மாறி விழுந்திருப்பதால் உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளேயே இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

($\bar{x}$ σ) கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம்

திருகாணி உற்பத்தி செய்யும் ஒரு பொறியினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட திருகாணிகளிலிருந்து கூறு ஒன்றுக்கு n திருகாணிகளைக்கொண்ட N சமவாய்ப்புக் கூறுகளைத் தெரிவு செய்து கொள்க. ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள ஆணிகளின் எண்ணிக்கையாகிய n ஆனது 4க்குக் குறையாமலும் 6க்கு மிகைப்படாமலும், மொத்தக் கூறுகளின் எண்ணிக்கையாகிய N ஆனது 20க்குக் குறையாமலும் இருத்தல் நன்று. இக் கூறுகளிலுள்ள திருகாணிகள் ஒவ்வொன்றின் நீளத்தையும் அளந்துகொள்க. ஒவ்வொரு கூறுக்கும் ஒரு நிரல் வீதம் N நிரல்களைக் கொண்ட ஒரு வெற்றுப்பட்டியலமைத்து, ஒவ்வொரு நிரலையும் இரண்டு துணை நிரல்களாகப்பிரித்துக் கொள்க. ஒவ்வொரு கூறுக்குரிய நிரலிலுமுள்ள ஒரு துணை நிரலில் அக் கூறிலுள்ள திருகாணிகளின் நீள அளவுகளையும் (x), இரண்டாவது துணை நிரலில் அந்த நீளங்களின் வர்க்கங்களையும் எழுதிக் கொள்க. ஒவ்வொரு கூறிலுள்ள ஆணிகளின் நீளங்களின் மொத்தத்தையும் (Σx), நீளவர்க்கங்களின் மொத்தத்தையும் (Σx^2), கூட்டுக. ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள ஆணிகளின் சராசரி நீளத்தையும் ($\bar{x}$), தரவிலக்கத்தையும் (σ)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\dots, \bar{x}_n$ என்றும், தரவிலக்கங்களை $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ என்றும் கொள்க. பின்னர், எல்லாக்கூறுகளிலுமுள்ள எல்லா ஆணிகளின் நீளங்களையும் கூட்டி ஆணிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையாகிய N_n ஆல் வகுத்து பொதுச்சராசரி $\bar{\bar{x}}$ ஐக் கணக்கிடுக. எல்லா கூறுகளின் தரவிலக்கங்களையும் கூட்டி வந்த தொகையைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து $\bar{\sigma}$ என்ற சராசரித்தர விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக. அதாவது,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots\dots + \sigma_n}{n}$$

ஒரு தாளில் கூறுகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கின்ற கிடையச்சு ஒன்றைத் தாளின் அடியில் வரைந்து கொள்க. இடது பக்க ஓரத்தில் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டில் கிடை

அச்சுக்குச் சற்றுமேலே தர விலக்கங்களைக் குறிக்கின்ற σ அளவுகோலையும் அதற்கு மேலே சிறிது இடைவெளி விட்டுச் சராசரிகளைக் குறிக்கின்ற $\overline{x}$ அளவுகோலையும் குறித்துக் கொள்க. $\overline{x}$ அளவுகோலில் பொதுச்சராசரி $\overline{X}$ ஐக் குறிக்கின்ற அளவுக்குறிவழியே ஒரு கிடைக்கோடும் σ — அளவுகோலில் சராசரித்தரவிலக்கமாகிய $\overline{\sigma}$ —ஐக் குறிக்கின்ற அளவுக்குறிவழியே ஒரு கிடைக்கோடும் வரைக. இக்கிடைக்கோடுகள் முறையே $\overline{x}$— கோட்டுப்படம், σ—கோட்டுப்படம் ஆகியவற்றின் மையக்கோடுகளாகும். ASTM பட்டியலிலிருந்து nக்குரிய A_1 இன் மதிப்பைப் பெற்று $\overline{x} \pm A_1 \overline{\sigma}$ என்ற மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு, $\overline{x}$ அளவுக்கோலில் $\overline{X} \pm A_1 \overline{\sigma}$ ஆகிய மதிப்புக்களைக் குறிக்கின்ற அளவுக் குறிகளின் வழியே $\overline{X}$—மையக்கோட்டிற்கு இணையாக அதன் இருபுறமும் இரண்டு புள்ளிக்கோடுகள் வரைக. இவை முறையே $\overline{X}$—கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படத்தின் மேல் கட்டுப்பாடு எல்லை, கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லையாகும். இது போன்று ASTM பட்டியலிலிருந்து nக்குரிய B3, B4 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெற்று $B_3 \overline{\sigma}$, $B_4 \overline{\sigma}$ ஆகிய மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு, σ —அளவுகோலில் இம் மதிப்புக்களுக்குரிய அளவுக்குறிகளின் வழியே $\overline{\sigma}$ —மையக் கோட்டிற்கு இணையாக இரண்டு புள்ளிக்கோடுகள் வரைக. இவ்விரண்டு புள்ளிக்கோடுகளும் முறையே σ – கோட்டுப்படத்தின் கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லை, மேல்கட்டுப்பாடு எல்லையாகும் $n = 5$ வரை, $B_3 = 0$ ஆகும். ஆகவே, $n = 5$ வரை கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லைக்கோடு σ —அளவுகோலின் 0—அளவுக்குறிவழியே செல்லும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற படம்தான். $(\overline{x}, \sigma)$ கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படமாகும். இப்பொழுது கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் வரிசை என்ணுக்கும் நேரே அதன் சராசரி $(\overline{x})$, தரவிலக்கம் (σ) ஆகியவற்றிற்குரிய புள்ளிகளை முறையே $\overline{X}$ — கோட்டுப்படத்திலும், σ—கோட்டுப்படத்திலும் குறித்துக்கொள்க. அப்புள்ளிகளின் அமைப்பிலிருந்து உற்பத்தியானது தரக்கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளிருக்கிறதா என்பதை முன் போல் சோதித்து அறியலாம்.

மாதிரி : 170

மாதிரி 169இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $(\overline{X}, \sigma)$ கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் வரைந்து உற்பத்தியானது தரக்கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளிருக்கிறதா என்பதை ஆராய்க.

குறிப்பு: தரவிலக்கம் கணக்கிட, கண்டறியப்பட்ட விவரங்களை வர்க்கப்படுத்த வேண்டுமாகையால் யாதானுமொரு ஆதியிலிருந்து (arbitrary origin) கண்டறியப்பட்ட விவரங்களின் விலக்கங்களைக் கணக்கிட்டு, அந்தவிலக்கங்களின் தரவிலக்கத்தைப் பயன்படுத்திக கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் வரைவதன் மூலம் கணச்கீடுகளை எளிதாக்கலாம். இங்கு, கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து 10ஐக் கழித்து வருகின்ற விலக்கங்களைக் கொண்டு கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் வரையலாம்.

கூறு எண்	அளவிடப்பட்ட திருகாணிகளின் நீளங்களின் விலக்கங்கள் (x) (அளவிடப்பட்ட நீளம் — 10)				Σx	$\bar{x}$ $\left(=\frac{\Sigma x}{4}\right)$	x^2				Σx^2	$\frac{\Sigma x^2}{4}$	$\bar{x}^2$	σ^2 $\left(=\frac{\Sigma x^2}{4}-\bar{x}^2\right)$	σ
1	5.4	4.1	5.6	5.5	20.6	5.15	29.16	16.81	31.36	30.25	107.58	26.895	26.520	0.375	0.6124
2	4.4	4.3	6.0	4.7	19.4	4.85	19.36	18.49	36.00	22.09	95.94	23.985	23.520	0.465	0.6819
3	6.5	4.4	5.3	4.7	20.9	5.225	42.25	19.36	28.09	22.09	111.79	27.9475	27.1400	0.8075	0.8983
4	4.4	4.1	3.5	3.3	15.3	3.825	19.36	16.81	12.25	10.89	59.31	14.8275	14.5200	0.3075	0.5541
5	5.0	6.2	4.0	5.2	20.4	5.10	25.00	38.44	16.00	27.04	106.48	26.62	26.01	0.61	0.7810
6	3.1	4.6	5.3	6.2	19.2	4.80	9.41	21.16	28.09	38.44	97.10	24.28	23.04	1.23	1.1090
7	5.7	5.2	3.2	5.8	19.9	4.975	32.49	27.04	10.24	33.64	103.41	25.85	24.80	1.05	1.0250
8	6.5	6.2	6.8	7.8	27.3	6.825	42.25	38.44	46.24	60.84	187.77	46.94	46.51	0.43	0.6557
9	5.1	4.8	3.7	5.3	18.9	4.725	26.01	23.04	13.69	28.09	90.83	22.71	22.28	0.43	0.6557
10	6.0	5.3	3.9	5.8	21.0	5.25	36.00	28.09	15.21	33.64	112.94	28.24	27.56	0.67	0.8185
					202.9										7.7916

$$\bar{x} = \frac{202.9}{40} = 5.0725 = 5.1 \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{7.7916}{10} = 0.78$$

ASTM பட்டியலிலிருந்து $n = 4$க்கு, $A_1 = 1.88$, $B_3 = 0$, $B_4 = 2.33$ என்று காணலாம்.

$$A_1 \bar{\sigma} = 1.88 \times 0.78 = 1.4664$$

ஆகவே, $\bar{X}$ கோட்டுப் படத்தின்

மே. க. எ. $= \bar{X} + A_1 \bar{\sigma} = 5.0725 + 1.4664 = 6.5389 = 6.5$ (தோராயமாக)

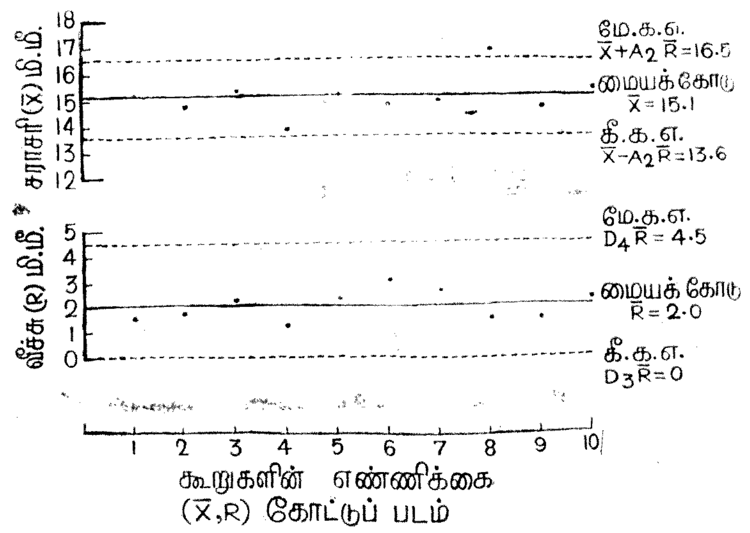
கீ. க. எ. $= \bar{X} - A_1 \bar{\sigma} = 5.0725 - 1.4664 = 3.6061 = 3.6$ (தோராயமாக)

σ கோட்டுப்படத்தின்

மே. க. எ. $B_4 \bar{\sigma} = 2.33 \times 0.78 = 1.8174 = 1.82$ (தோராயமாக)

கீ. க. எ. $B_3 \bar{\sigma} = 0 \times 0.78 = 0$

$(\bar{X}, \sigma)$ கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. படத்திலிருந்து உற்பத்தியானது கட்டுப்பாடுக்குள்ளிருப்பதைக் காணலாம்.



படம் 39.

பின்னக் குறைபாடு (Fraction Defective)

தொழிற்சாலைகளில் தயாராகின்ற எல்லாவகைப் பொருட்களின் தரங்களையும் அளவிட்டறிதல் என்பது இயலாத காரியமாகும். சிற்சில பொருட்களின் தரங்களைத் "திருப்திகரமானவை", "திருப்திக்குறைவானவை" என்று மட்டுமே அளவிட முடியும். இன்னும் சிலவகைப் பொருட்களின் தரங்களைக் "குறையுள்ளவை" (defective) "குறையற்றவை" (non-defective) என்ற அளவில்தான் கூற முடியும். ஒரு பொறியில் தயாராகும் பொருட்களில் சராசரியாக 100க்கு 5 பொருட்கள் குறையுள்ளவையெனவும் மீதமுள்ள 95 பொருட்களும் குறையற்றவையெனவும் கொள்வோம். ஆகவே, அப்பொறியில் தயாராகும் பொருட்களில் 5% குறையுள்ளவையாகும். அதாவது அப்பொறியில் தயாராகும் பொருட்களில் 100 க்கு 5 வீதம் குறையுள்ளவையாகயிருக்கலாம் என நாம் எதிர்பார்க்கலாம். நாள் ஒன்றுக்கு 1000 பொருட்கள் வீதம் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால் அவற்றுள் 50 பொருட்கள் குறையுள்ளவை களாகயிருக்கலாம் என்று எதிர்பார்க்கலாம். ஆனால் நாள் தோறும் சரியாக 50 பொருட்கள்தாம் குறையுள்ளவையாக யிருக்குமென்று கூற முடியாது. முதல் நாள் 48, இரண்டாம் நாள் 50 மூன்றும் நாள் 49 நான்காம் நாள் 52 இவ்வாறாக குறையுள்ள பொருட்களின் வீதம் நாளுக்கு நாள் மாறுபடலாம். இவ்வாறு காணப்படுகின்ற குறையுள்ள பொருட்களின் வீதங்களாகிய 1000க்கு 48, 50, 49, 52...... என்பவற்றை 0.048, 0.05 0.049, 0.052 என்று பின்னங்களாகவும் கூறலாம். இப்பின்னங்கள் யாவும் பின்னக் குறைபாடுகள் (fraction defective) எனப்படுகின்றன. இவ்வாறு சராசரியாக 0.05 பின்னக் குறைபாடுள்ள ஒரு பொறியில் என்றாவது ஒரு நாளில் 1000க்கு 150 குறையுள்ள பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால், பின்னக் குறைபாடு 0.15 என்று காணலாம். இப்பின்னக் குறைபாடு சராசரிப் பின்னக் குறைபாட்டைப்போல் மும்மடங்காகும். ஆகவே, பொறியிலோ அல்லது உற்பத்தி முறையிலோ ஏதோ கோளாறு இருப்பதாகத் தெரிந்து கொள்ளலாம். பொதுவாக, பின்னக் குறைபாட்டை P என்றும், சராசரி பின்னக்குறைபாட்டை $\overline{P}$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம். பின்னக்குறைபாடுகளை 100-ஆல் பெருக்கச் சதவீதக் குறைபாடுகளாகவும் (precent defectives) கூறலாம். சதவீதக் குறைபாடுகளும் P என்றே குறிப்பிடப் படுகின்றன. சராசரிப் பின்னக் குறைபாட்டினின்றும் ஒரு கூறின் பின்னக் குறைபாடு எந்த எல்லைக்குள் விலகியிருந்

தால் அக்கூறு ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதாகும் என்பதை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுவதுதான் P-கட்டுப்பாடுப் படம் (Pchart) ஆகும்.

P-கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் (Control chart for p):

ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் பொருட்களி லிருந்து கூறு ஒன்றுக்கு N பொருட்கள் வீதம் கொண்ட N கூறுகளைத் தெரிவு செய்து ஒவ்வொரு கூறிலுமுள்ள குறை யுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடவும். உற் பத்தித் தரம் உயர்ந்ததாகயிருக்க வேண்டுமானால் பின்னக் குறைபாடு மிகவும் குறைவாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே, குறையுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையும் ஒவ்வொரு கூறி லும் மிகக் குறைவாகவேயிருக்கும். எனவே ஒவ்வொரு கூறி லுமுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையாகிய N இன் மதிப்பு 500-க்கும் குறையாமலிருப்பது நன்று. X_1, X_2,......, Xn என்பன N கூறுகளிலும் காணப்பட்ட குறையுள்ள பொருட் களின் எண்ணிக்கையெனக் கொள்க. ஒவ்வொரு கூறிலு முள்ள மொத்தப் பொருட்களின் எண்ணிக்கையால் அக்கூறில் காணப்பட்ட குறையுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையை வகுத்து P என்ற பின்னக் குறைபாடுகளைக் கணக்கிடுக. P_1, P_2,......, P_n என்பன N கூறுகளின் பின்னக் குறைபாடுகளெனக் கொண்டால்,

$$p_1 = \frac{x_1}{n} \quad P_2 = \frac{x_2}{n} \quad Pn = \frac{x_n}{n} \text{ ஆகும்.}$$

இப்பின்னக் குறைபாடுகளின் சராசரிப் பின்னக் குறைபாட்டை ($\overline{P}$) கணக்கிடவும், அல்லது, N கூறுகளிலும் காணப்படு கின்ற குறைபாடுள்ள பொருட்களின் மொத்த எண்ணிக்கையே N கூறுகளிலுமுள்ள மொத்தப்பொருட்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து, சராசரிப் பின்னக்குறைபாடு $\overline{P}$-ஐக் கணக்கிடலாம். அதாவது,

$$\overline{P} = \frac{P_1 + P_2 + \dots\dots + Pn}{N_n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots x_n}{N_n}$$

ஒரு தாளின் அடியில் கூறுகளின் வரிசை எண்களைக் குறிக் கின்ற ஒரு கிடை அளவுக்கோலும், இடது பக்க ஓரத்தில் பின்

னக் குறைபாடுகளின் மதிப்புக்களைக் குறிக்கின்ற ஒரு நிலைக் குத்து அளவுகோலில் $\bar{P}$ ஐக் குறிக்கின்ற அளவுக் குறியில் வழியாக ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இக்கோடு P-கோட்டுப் படத்தின் மையக் கோடாகும். பின்னர், மையக்கோட்டிலிருந்து கட்டுப்பாடு எல்லைக்கோடுகளின் தூரங்களை

$$\pm 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடவும். இப்பொழுது, நிலைக் குத்து அளவு கோலில் $\bar{P} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$ என்ற மதிப்புக்களைக் குறிக்கின்ற அளவுக்குறிகளின் வழியே மையக் கோட்டிற்கு இணையாக இரண்டு புள்ளிக்கோடுகள் வரைக. இப் புள்ளிக் கோடுகள் P- கோட்டுப்படத்தின் எல்லைக்கோடுகளாகும். $\bar{P} + 3 \sqrt{\frac{P(1-\bar{P})}{n}}$ க்குரிய புள்ளிக்கோடு மேல் கட்டுப்பாடு எல்லையாகும். $\bar{P} - 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(P-\bar{P})}{n}}$ க்குரிய புள்ளிக்கோடு கீழ்க்கட்டுப்பாடு எல்லையாகும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற படம் தான் பின்னக்குறைபாட்டுக்குரிய கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் (Control chart for fraction defective) அல்லது P - கோட்டுப் படம் (P-chart) ஆகும். இப்பொழுது ஒவ்வொரு கூறின் வரிசை எண்ணுக்கும் நேராக அக்கூறின் பின்னக் குறைபாட்டைக்கு குறிக்கின்ற புள்ளியை P-கோட்டுப்படத்தில் குறிக்கவும். எந்தப் புள்ளியாவது கட்டுப்பாடு எல்லைகளைத் தாண்டி வெளியே விழுந்தால் அப்புள்ளிக்குரிய கூறு நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினின்றும் விலகியதாகக் கருதி, உற்பத்தியானது தரக்கட்டுப்பாட்டிற்குள் இல்லையெனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு :

தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறுகள் யாவும் சம எண்ணிக்கையிலான பொருட்களைக் கொண்டிராவிட்டால், தெரிவு செய்யப்பட்ட கூறுகளைச் சம எண்ணிக்கைப் பொருட்களைக் கொண்ட கூறுகளின் தொகுப்புக்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு தொகுப்புக்கும் ஒரு கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படம் வீதம் வரைய வேண்டும். இவ்வாறு வரையப்படுகின்ற கோட்டுப்படங்கள் யாவும் ஒரே தாளில் ஒரு கிடையளவு கோலின் மேலேயே வரையப்படலாம்.

மாதிரி : **171**

ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு பொறியினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து கூறு ஒன்றில் 500 பொருட்களிருக்குமாறு 10 கூறுகள் தெரிவு செய்யப்பட்டு, அக்கூறுகளிலுள்ள குறையுள்ள பொருட்கள் கணக்கிடப்பட்டு பின்வருமாறு பட்டியலில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. பட்டியல் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம் வரைந்து, உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டுக்குள்ளிருக்கிறதா என்பதைச் சோதிக்கவும்.

கூறு எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
குறை பொருட்களின் எண்ணிக்கை	14	18	12	15	17	11	16	14	12	20

தீர்வு :

கூறு எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
சோதிக்கப்பட்ட பொருட்களின் எண்ணிக்கை	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	5000
குறையுள்ள பொருட்கள்	14	18	12	15	17	12	16	14	12	20	150
பின்னக் குறைபாடு	0.028	0.036	0.024	0.030	0.034	0.024	0.032	0.028	0.024	0.040	
சதவீதக் குறைபாடு (P)	2.8	3.6	2.4	3.0	3.4	2.4	3.2	2.8	2.4	4.0	

$$\bar{P} = \frac{150}{5000} = 0.03 = 3.0\%$$

குறைபாட்டுக் கட்டுப்பாடு எல்லைகள் $= \bar{P} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$

$$= 0.03 \pm 3 \sqrt{\frac{(0.03)(0.97)}{500}}$$

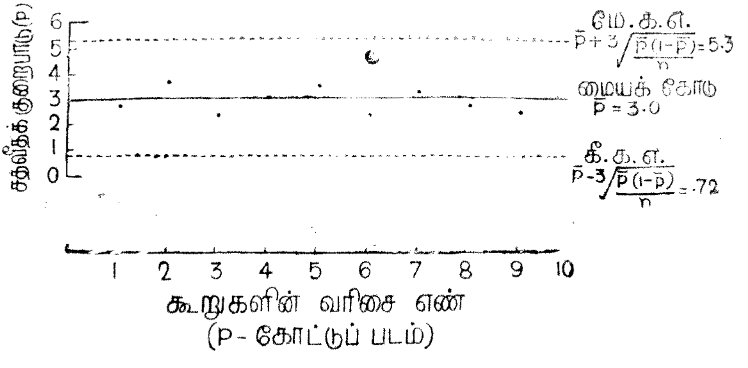
$$= 0.03 \pm 3(0.0076)$$

$$= 0.03 \pm 0.0228$$

$$= 0.0528,\ 0.0072$$

$$= 5.28\%,\ 0.72\%.$$

P கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. படத்திலிருந்து உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளிருப்பதைக் காணலாம்.



படம் 40.

மாதிரி : 172

கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு P கோட்டுப்படம் வரைந்து உற்பத்தித் தரம் கட்டுப்பாட்டுக்குள்ளிருக்கிறதா என்பதைச் சோதனை செய்யவும்.

கூறு எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சோதிக்கப்பட்ட பொருட்களின் எண்ணிக்கை	600	600	600	600	600	400	400	400	400	400
குறையுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கை	25	16	19	37	14	8	19	12	11	13

தீர்வு :

இங்கு முதல் ஐந்து கூறுகளிலும் 600 பொருட்கள் விதமும், பின் ஐந்து கூறுகளிலும் 400 பொருட்கள் விதமும் சோதனை செய்யப்பட்டுள்ளவையாகையால் முதல் ஐந்து கூறுகளை ஒரு தொகுப்பாகவும் பின் ஐந்து கூறுகளை மற்றொரு தொகுப்பாகவும் கருதி இரு தொகுப்புக்களுக்கும் தனித்தனிக் கட்டுப்பாடு எல்லைகளைக் கணக்கிட்டுத் தனித்தனிக் கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படங்களை ஒரே தாளில் வரையவேண்டும்.

கூறு எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
சோதிக்கப்பட்ட பொருட்களின் எண்ணிக்கை	600	600	600	600	600	400	400	400	400	400	5000
குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கை	25	16	19	37	14	8	19	12	11	13	174
பின்னக் குறைபாடு.	0.042	0.027	0.032	0.062	.023	.020	.048	.030	.028	.032	
சதவீதக் குறைபாடு.	4.2	2.7	3.2	6.2	2.3	2.0	4.8	3.0	2.8	3.2	

$$\bar{p} = \frac{174}{5000} = 0.0348 = 3.48\%$$

முதல் தொகுப்பு : $\bar{p} = 3.48\%$; $n = 600$

$$\therefore \; 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 3\sqrt{\frac{(0.0348)(0.9652)}{600}}$$

$$= 0.0224$$

$$= 2.24\%$$

மே. க. எ. $= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 18.48 + 2.24$

$$= 5.72\%$$

கீ. க. எ. $= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 3.48 - 2.24$

$$= 1.24\%$$

இரண்டாம் தொகுப்பு : $\bar{p} = 3.48\%$; $n = 400$

$$\therefore \; 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 3\sqrt{\frac{(0.0348)(0.9652)}{400}}$$

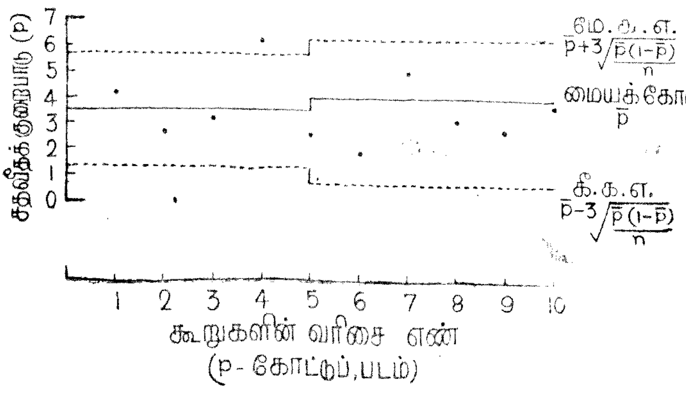
$$= 0.0275$$

$$= 2.75\%$$

மே. க. எ. $= 3.48 + 1.75 = 6.23\%$

கீ. க. எ. $= 3.48 - 2.75 = 0.73\%$

P கோட்டுப்படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. படத்திலிருந்து நான்காவது கூறுக்குரிய புள்ளி மட்டும் கட்டுப்பாடு



படம் 41.

எல்லைகளைத்தாண்டி யிருப்பதைக் காண்கிறோம். மேலும், இரண்டு புள்ளிகளைத் தவிர மற்ற புள்ளிகள் யாவும் மையக் கோட்டிற்குக் கீழேயே அமைந்திருப்பதால், தற்போது உற்பத்தித்தரம் கட்டுப்பாட்டுக்குள்ளிருந்தாலும் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து விலகிச் சென்று கொண்டிருப்பதை உணரலாம்.

ஏற்புடைக் கூறெடுத்தல் : (Acceptance sampling)

பெரும்பாலான வியாபாரிகள் சரக்குகளை வாங்கு முன்னால் சரக்குகளின் மாதிரிக் கூறு (representative sample) ஒன்றை வாங்கிச் சோதித்துப் பார்த்து அந்த மாதிரிச் சரக்கின் பண்புகள் தரமானவையாகயிருந்தால் அப்பண்புகளின் அடிப்படையில் மொத்தச் சரக்குகளையும் வாங்குவதைப் பார்த்திருக்கிறோம். ஆனால் ஒரு சிறு கூறின் பண்புகளிலிருந்து மொத்தச் சரக்குகளின் பண்புகளை எங்ஙனம் நிர்ணயிப்பது, மொத்தச்சரக்குகளும் தரக்கட்டுப்பாடுடனிருந்தாலுமே, அவற்றிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுகின்ற சிறு கூறுகள் ஒன்றுக்கொன்று பண்புகளில் சிறிதளவு மாறுபட்டிருக்கும் : அப்படியிருக்க, ஒரு சிறு கூறிலிருந்து பெறப்பட்ட பண்புகளைக் கொண்டு மொத்தச் சரக்குகளின் பண்புகளை எவ்வாறு நிர்ணயிக்க இயலும்? ஆனால் ஒரு சிறு கூறின் பண்புகளிலிருந்து மொத்தச் சரக்குகளைப் பற்றிக் கூறப்படுகின்ற பண்புகள் சரியாகயிருக்குமா என்று நிர்ணயிக்க முடியும். வியாபாரங்களிலும் இம்முறையே பெரும்பாலும் கடைபிடிக்கப்படுகிறது. அதாவது, சரக்குகளை வாங்க விரும்புகின்ற வியாபாரிகள் வாங்க விரும்பும் சரக்கின் மாதிரிக் கூறு ஒன்றைத் தருவித்துச் சோதித்துப் பார்த்து, அதன் தரம் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதாயிருந்தால் அதே தரத்தில் சரக்குகளை அனுப்புமாறு சரக்கு விற்பவரிடம் கூறுகிறார். சரக்குகளை விற்பவர் அனுப்புகின்ற சரக்குகள் மாதிரிச் சரக்கின் தரத்தைவிடக் குறைந்து காணப்பட்டால் அச்சரக்குகளை ஏற்றுக் கொள்ளாது திருப்பி அனுப்பி விடுவார். அதே தரத்திலிருந்தால் சரக்குகளை ஏற்றுக் கொள்ளுகிறார்.

சில சமயங்களில் மாதிரிச் சரக்கின் தரம் சரக்கு வாங்குவோருக்கு முழு திருப்தியளிக்க வில்லையானால் அவர் சரக்கு விற்பவரிடம் மாதிரித்தரத்தைவிடவும் சற்றுக்கூடிய தரத்தில் சரக்குகளை அனுப்புமாறு கேட்பதுமுண்டு. சரக்குகளை விற்பவர் வாங்குபவர் எதிர்பார்க்கின்ற தரத்துடன் சரக்குகளை அனுப்ப முடியாது என்று உணர்ந்தால், இருவரும் கலந்து பேசி இருவருக்கும் பொதுவான, இருவரும் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்க ஒரு தரத்தினை நிர்ணயிப்பதுமுண்டு. உதாரணமாக

சரக்கு வாங்குபவர் .02 பின்னக்குறைபாட்டுடன் கூடிய சரக்குகளை வாங்க நினைப்பதாகக் கொள்வோம். ஆனால் சரக்குகளை விற்பவர் 0.05 பின்னக் குறைபாட்டுடன் தான் சரக்குகளை அனுப்ப முடியுமென்று உணர்ந்தால் அவர் 0.02 குறைபாட்டுடன் சரக்குகளைக் கொடுக்க மறுக்கலாம். எனவே, சரக்குகளை வாங்குபவரும், விற்பவரும் கலந்து பேசி 0.04 பின்னக்குறைபாட்டுத்தரத்தை இருவருக்கும் ஏற்புடைய தரமாக நிர்ணயிக்கலாம். இவ்வாறு, வாங்குபவர், விற்பவர் ஆகிய இருவரும் ஏற்றுக்கொள்கின்ற வகையில் நிர்ணயிக்கப்படுகின்ற தரத்திற்கு ஏற்புடைத்தர அளவு (Acceptance quality Level) அல்லது சுருக்கமாக ஏ.த.அ. (A.Q.L.) என்று பெயர். எனவே ஏற்புடைத்தர அளவிலும், அதற்கு உயர்ந்த அளவிலும் உள்ள சரக்குகளை வாங்குவர் ஏற்றுக்கொள்வார். ஆனால் ஏ.த.அ—விற்குக் குறைந்த தரத்திலுள்ள சரக்குகளை ஏற்காது திருப்பி அனுப்பவிடுவார். ஆனால் வாங்கப்படுகின்ற சரக்குகள் யாவும் ஏற்புடைத்தர அளவிற்குக் குறையாமலிருக்கின்றனவா என்று சோதித்துப் பார்ப்பது இயலாத காரியமாகும், எனவே, புள்ளியியல் முறைப்படி வாங்கப்படுகின்ற சரக்குகளிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள சமவாய்ப்புக்கூறு (random sample) ஒன்றைத் தெரிவு செய்து. அக்கூறிலுள்ள குறையுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையிலிருந்து மொத்தச் சரக்கின் பின்னக் குறைபாட்டைக் கணக்கிட்டு, அப்பின்னக் குறைபாடு ஏற்புடைத்தர அளவை விடக் குறைவாகயிருந்தால் அச்சரக்குகளை வாங்காமல் தள்ளிவிடவும், ஏற்புடைத்தர அளவில் அல்லது அதைவிடவும் உயர்ந்து காணப்பட்டால் சரக்குகளை ஏற்றுக்கொள்ளவும் முடியும். இத்தகைய சமவாய்ப்புக் கூறினைத் தெரிவு செய்யும் முறைக்கு ''ஏற்புடைக் கூறெடுத்தல்'' என்று பெயர். ஏற்புடைக் கூறெடுத்தல் முறையினால் மொத்தச் சரக்குகளின் தரத்தை வெகு எளிதில் சீக்கிரமாக மதிப்பிட முடிவதால், சோதனை செய்வதற்கான செலவும் மிகவும் குறைகிறது.

வினாத்தாள் 19.

1. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு என்பதன் மூலம் நீவிர் அறிவது யாது?

2. தரக்கட்டுப்பாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் முறைகளை விளக்குக.

3. தரக்கட்டுப்பாட்டின் பொருள், முக்கியத்துவம் ஆகியவற்றினைப்பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக.

4. புள்ளியியல் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் என்றால் என்ன ?

5. கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படங்களின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

(மதுரை பி. பி. ஏ. 1971 செப்.)

6. கட்டுப்பாடு எல்லைகள் எவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன.

7. ஒரு தொழிற்சாலையில் புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டுப் பிரிவு எவ்வாறு அமைக்கப்பட்டு இயங்குகிறதென்பதை விளக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1966 செப்.)

8. $\overline{X}$ க்கான கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் வரையும் முறையினை விளக்குக.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

9. (அ) முழு இனத்தொகுதியின் (population) தரவிலக்கம். தெரிந்தபோது, (ஆ) அது தெரியாதபோது சராசரிக்கும், வீச்செல்லைக்குமான கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படத்தை வரையும் முறையினை விளக்கு.

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 செப்.)

10. சராசரிக்கும், தரவிலக்கத்திற்குமான கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படத்தை அமைப்பதற்குத் தேவையான நடவடிக்கைகளை விவரிக்கவும்.

11. தொழிற்சாலைகளில் கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படங்களினால் ஏற்படுகின்ற நடமுறைப்பயன்களை விவரிக்கவும்

12. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் பயன்களை விவரிக்கவும். (மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

13. ''ஏற்புடைக் கூறெடுத்தல்'' (Acceptance Sampling) என்பதன் மூலம் நீவிர் அறிந்து கொள்வதை விளக்கவும்.

14. **சிறு குறிப்பு வரைக :**

(அ) புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு

(சென்னை பி.காம். 1966 செப்.)

(ஆ) R — கோட்டுப்படம்

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(இ) $\bar{X}$ — கோட்டுப்படம்.

(ஈ) ($\bar{X}$, R) கோட்டுப்படம்

(உ) ($\bar{X}$, σ) கோட்டுப்படம்

(ஊ) P—கோட்டுப்படம்

(மதுரை பி.பி.ஏ. 1972 ஏப்.)

(எ) கட்டுப்பாடு எல்லைகள்

(ஏ) கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப்படம்

(ஐ) ஏற்புடைக் கூறெடுத்தல்.

பயிற்சி 20.

1. ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு பொறியில் உற்பத்தியான திருகாணிகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட 10 சிறு கூறுகளிலுள்ள திருகாணிகளின் நீளங்கள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ($\bar{X}$, R) கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப்படம் வரைந்து உற்பத்தியானது கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளிருக்கின்றதா என்று சோதிக்கவும்.

கூறு எண்	அளவிடப்பட்ட திருகாணிகளின் நீளங்கள் (மில்லி மீட்டரில்)			
1	12.6	12.2	12.8	12.4
2	11.4	11.7	11.8	13.0
3	13.5	11.7	12.5	11.9
4	11.8	11.5	10.8	10.6
5	12.0	13.2	11.9	11.7
6	11.4	12.1	13.0	12.8
7	12.7	12.2	11.8	12.5
8	10.8	10.6	11.0	10.7
9	12.8	11.9	10.8	12.5
10	14.0	13.5	12.1	12.4

2. ஒரு பொறியில் செய்யப்பட்ட சிறு இரும்புக் குண்டுகளின் எடைகள் பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ($\overline{X}$, σ) கட்டுப்பாடுக்கோட்டுப் படம் வரைந்து. உற்பத்தித் தரம் கட்டுப்பாட்டிற்குள்ளிருக்கிறதா என்று சோதனை செய்யவும்.

கூறு எண்	கூறுகளிலுள்ள குண்டுகளின் எடைகள் (கிராமில்)				
1	6.7.	6.9	5.8	6.0	6.2
2	6.1	5.5	5.9	6.3	5.3
3	5.7	6.2	6.5	5.6	5.4
4	6.0	5.8	6.4	6.6	5.7
5	5.8	6.3	6.0	5.2	5.0
6	6.7	6.9	7.2	6.5	7.0
7	5.6	5.9	5.2	4.8	5.5
8	5.9	6.2	6.5	5.6	5.8
9	6.3	6.9	7.5	7.1	6.8
10	7.0	6.7	7.4	6.6	6.2
11	5.3	4.7	5.0	5.1	5.7
12	6.0	6.4	5.7	6.1	5.3

3. மின் இணைப்புக்குப் பயன்படுகின்ற திருகாணிகளை உற்பத்தி செய்கின்ற ஒரு பொறியில் தயாரான திருகாணிகள் 500 கொண்ட கூறுகளாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டுப் பெட்டிகளில் அடைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலுமுள்ள குறைபாடுடைய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கைக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கட்டுப்பாடுக் கோட்டுப் படம் வரைந்து உற்பத்தித் தன்மையைச் சோதிக்கவும்.

பெட்டி எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
குறை ஆணிகளின் எண்ணிக்கை ...	18	15	20	12	17	10	21	11	19	8

4. ஒரு பொறியில் தயாரான நட்டுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட 15 கூறுகளிலுள்ள குறைநட்டுகளின் எண்ணிக்கைகள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. P—கோட்டுப்படம் வரைந்து உற்பத்தித் தரம் கட்டுப்பட்டிற்குள்ளிருக்கிறதா என்று காண்க.

கூறு எண் ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மொத்த நட்டுகள் ...	700	700	700	700	700	700	800	800	800	800
குறை நட்டுக்கள் ...	24	20	28	26	18	23	32	30	25	37

கூறு எண் ...	11	12	1
மொத்த நட்டுகள் ...	800	800	
குறை நட்டுகள் ...	21	27	

இந்தியப் புள்ளி விவரங்கள்
(INDIAN STATISTICS)

இந்தியாவில் மத்திய, மாநில அரசுகளின் புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு நிலையங்களினால் பொருளாதாரம், வணிகம். தொழில் வேளாண்மை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு வருகின்றன. இந்தியாவின் வருங்கால பொருளாதாரக் கொள்கைகளை வகுப்பதற்கும், வகுக்கப்பட்ட கொள்கைகளை நடைமுறையில் செயல்படுத்துவதற்கும் இப்புள்ளி விவரங்கள் உதவியாயிருக்கின்றன. இந்தியாவில் சேகரிக்கப்படுகின்ற பின்வரும் முக்கியமான புள்ளிவிவரங்கள் பற்றி மட்டும் ஈண்டு நோக்குவோம்.

(1) *மக்கள் தொகை பற்றிய புள்ளிவிவரம்* (Population Statistics)

முன்னாட்களில் மக்கள் தொகையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் ஒரு நாட்டின் இன வளர்ச்சியை பற்றி அளவிடும் நோக்கத்துடன் மட்டுமே சேகரிக்கப்பட்டு வந்தன. ஆனால் தற்காலத்தில் மக்கள் தொகை பற்றிய புள்ளி விவரச் சேகரிப்பின் நோக்கம் முற்றிலும் மாறுபட்டதாகயிருக்கின்றது. இன வளர்ச்சியை அளவிடுவதோடு, நாட்டு மக்களின் வாழ்க்கை முறை, தொழில், பொருளாதார நிலைகள், சார்புத் தன்மைகள் போன்ற பல்வேறு முக்கிய விவரங்களை ஆராய்வதும் மக்கள் தொகை பற்றிய புள்ளி விவர ஆய்வின் நோக்கங்களாக உள்ளன. மக்கள் தொகை பற்றிய புள்ளி விவர ஆய்வின், நோக்கங்களாக உள்ளன. மக்கள் தொகை பற்றிய புள்ளிவிவர ஆய்வை மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பு, வாழ்வு முறை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள், பகுதி அளவெடுப்புகள் என்று மூன்று வகையாகப் பிரித்து ஆராயலாம். மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பில் மக்கள் தொகையின் எண்ணிக்கையும், மக்களின் பல்வேறு

பண்புகளும் இடம் பெறுகின்றன. வாழ்வு முறை பற்றிய புள்ளி விவரங்களில் மக்களின் பிறப்பு, இறப்பு, உடல்நலம், திருமணம் பற்றிய விவரங்கள் அடங்குகின்றன. நாட்டு மக்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியினரின் சில முக்கிய விவரங்கள் பற்றி ஆய்வு பகுதி அளவெடுப்பின் மூலம் செய்யப்படுகின்றது. பகுதி அளவெடுப்பின் மூலம் செய்யப்படுகின்ற ஆய்வு பொருளாதாரத் திட்டங்களை வகுப்பதற்கும், மனித சக்தியை அளவிடவும் பயன்படுகிறது.

இந்தியாவில் முதன்முதலில் 1881 ஆம் ஆண்டில் மக்கட் தொகைக்கணக்கெடுப்பு நடைபெற்றது. அதன் பின்பத்தாண்டு கட்டு ஒருமுறை மக்கள்கணிப்புச் செய்யப்பட்டு வருகின்றது. 1931 ஆம் ஆண்டு வரை மக்கள் கணிப்பு பின்வரும் முறையில் செய்யப்பட்டு வந்தது. இந்தியாவிலுள்ள எல்லா வீடுகளுக்கும் எண்கள் குறிக்கப்பட்டன. ஒன்ருகச் சேர்ந்து சமைத்துச் சாப்பிட்டு வந்த ஒரு குடும்பம் அல்லது கூட்டுக்குடும்பங்கள் ஒரே வீட்டைச் சேர்ந்தவர்களாகக் கருதப்பட்டனர். எல்லா வீடுகளுக்கும் எண்கள் குறிக்கப்பட்ட பின்னர், கணிப்பாளர்கள் விஞப்பட்டியல்களுடன் வீடுதோறும் சென்று, விஞப்பட்டியலிலுள்ள விஞக்களுக்குரிய விடைகளைக் கேட்டறிந்து விஞப்பட்டியல்களை நிரப்பினர். எல்லா விஞப்பட்டியல்களும் நிரப்பப்பட்ட பின்னர், அவற்றிலுள்ள விவரங்களைப் பட்டியல்களில் அமைத்து, அவ்விவரங்கள் பற்றிய அறிக்கைகள் தயார் செய்து அப்பட்டியல்களையும், அறிக்கைகளையும் புள்ளிவிவர மேற்பார்வையாளர்களுக்கு அனுப்பினர். மேற்பார்வையாளர்கள் அவற்றைச் சரிபார்த்து புள்ளி விவர மேலதிகாரிக்கு அனுப்பினர். புள்ளி விவர மேலதிகாரி அவ்விவரங்களையெல்லாம் ஒன்று சேர்த்துச் சுருக்கி வெளியிட்டார்.

1941ம் ஆண்டு மக்கள் கணிப்பு :

1941 ஆம் ஆண்டின் மக்கட்கணிப்பு இரண்டாம் உலகப் போரின்போது செய்யப்பட்டது. இக் கணக்கெடுப்பில் சில மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டன. பயணம் செய்து கொண்டிருப்பவர்களாலேற்படுகின்ற குழப்பங்களைத் தவிர்க்கும் பொருட்டு, மக்கள் யாவரும் அவர்களுடைய சொந்த ஊர்களிலேயே எண்ணப்பட்டனர். சொந்த ஊர்களிலிருந்து தற்காலிகமாக வெளியூர்களுக்கு சென்றவர்கள் கணக்கெடுப்பில் சேர்க்கப்பட்டனர். தற்காலிகமாக ஒரு ஊரில் வந்திருப்பவர்கள் அவ்வூர்க்கணக்கெடுப்பில் சேர்க்கப்படவில்லை. விஞப்பட்டியல்களுக்குப் பதிலாக விவரங்களைக் கொண்ட சீட்டுகள் பயன்படுத்தப்பட்டு

விடைகள் குறியீடுகளின் மூலம் எழுதப்பட்டன. இதன் மூலம் கணக்கீட்டுப் பணி வெகுவாகக் குறைக்கப்பட்டது. மேலும், பொறிவழிக் கணக்கீட்டு முறை முதன் முதலில் பயன்படுத்தப் பட்டது. முதல் குழந்தை பிறக்கும்போது பெண்களின் வயது, பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை ஆகிய விவரங்கள் புதிதாகச் சேகரிக்கப்பட்டன. தொழில், பேசுகின்ற மொழிகள் பற்றிய விவரங்கள் சேகரிக்கப்படாது விடப்பட்டன.

1951 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் கணிப்பு

இந்தியா சுதந்திரம் பெற்றபின் முதன் முதலில் 1951 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் கணிப்புச் செய்யப்பட்டது. இக் கணக்கெடுப்பின் போது மக்கள் கணிப்பு அதிகாரிக்கென ஒரு அலுவலகம் அமைக்கப்பட்டது. மக்கள் கணிப்புச் சட்டம் நிரந்தரமாக்கப்பட்டது. ஒவ்வொரு ஊருக்கும், நகருக்கும் குடிமக்களின் தேசியப்பதிவேடு முதன் முதலில் தயாரிக்கப்பட்டது. வீடு என்பது ஒரு தலை வாசலைக் கொண்ட வசிக்குமிடம் என்றும், பொதுச்சமையலில் வசிப்பவர்களைக் கொண்டது ஒரு குடும்பம் என்றும் வரையறுக்கப்பட்டன. திருமண ரத்துச் செய்து கொண்டவர் பற்றியும், இடம் விட்டு இடம் மாறியவர் பற்றியும் விவரங்கள் முதன் முதலாகச் சேகரிக்கப்பட்டன. வேலையிலிருப்பவர், வேலை வாங்குபவர், சொந்த வேலையைச் செய்பவர் என்று வேலையுள்ளவர் பற்றி மூன்று வகையான விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. ஆங்கில மொழியறிவு விடுவிடப்பட்டது.

1961 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் கணிப்பு

சமூக, பொருளாதார நோக்குடன் பார்க்குமிடத்து, 1961 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் கணிப்பு மிகவும் முக்கியம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது. ஜம்மு காஷ்மீர் முதன் முதலில் ஆக்கணிப்பில் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டது. மக்கள் கணிப்பு அதிகாரிகள் முதலில் மாநிலங்கள், யூனியன் பகுதிகள் ஆகியவற்றின் எல்லைகளைச் சரிபார்த்துக் கொண்டனர். ஒவ்வொரு மாவட்டமும் சிறிய பல மக்கள் கணிப்புத் துணை பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டன. இந்தியாவின் மக்கள் கணிப்பு உயர் அதிகாரி ஒருவரும், ஒவ்வொரு மாவட்டத்தில் ஒரு மக்கள் கணிப்பு மேலதிகாரியும் நியமிக்கப்பட்டனர். மாவட்டக் கழகங்கள், நகர் மன்றங்கள், மாநகராட்சி மன்றங்கள், கல்வி நிலையங்கள், தொழில் நிறுவனங்கள் ஆகியவை மக்கள் கணிப்பிற்கு உதவுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்பட்டன. கணிப்பாளர்கள் மாவட்ட மட்டத்திலும், அதற்குக் கீழ் மட்டத்திலும் பயிற்சியளிக்கப்பட்

டனர். கணிப்பாளர்கள் வீடுகள், பற்றிய பட்டியலைத் தயாரித்து தனி மனிதர்கள் பற்றிய விவரங்களையும், குடும்பத்தினர் பற்றிய விவரங்களையும் சேகரித்து தனித்தனியே அவற்றிற்குரிய சீட்டுகளில் நிரப்பினர். மேலும் கணக்கெடுப்பு பற்றிய எல்லா வேலைகளையும் கணிப்பாளர்களே செய்தனர். கணக்கெடுப்பு முடிந்ததும் எல்லாக் கணிப்பாளர்களும் தங்கள் மேற்பார்வையாளர்களிடம் நிரப்பப்பட்ட சீட்டுகளைச் சேர்ப்பித்தனர். மேற்பார்வையாளர்கள் அவற்றை மாவட்ட மக்கள்கணிப்பு அதிகாரிக்கு அனுப்பினர். மாவட்ட அதிகாரி அவ்விவரங்களைப் பாகுபடுத்தி, பட்டியல்களிலமைத்து மாநில மக்கள் கணிப்பு உயர் அதிகாரிக்கு அனுப்பினர். கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்கள் யாவும் ஒன்றுகச் சேர்த்து இறுதிப்பட்டியல்களிலமைத்து இறுதிவடிவம் பெற்ற விவரங்களை உயர் அதிகாரி பொதுமக்கள் பார்வைக்காக மூன்று மாதங்களில் வெளியிட்டார்.

1961 ஆம் ஆண்டு மக்கள் கணிப்பில் பிச்சைக்காரர்கள் பற்றியும் அவர்களது சேமிப்புப் பற்றியும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. முதன்முறையாக கணிப்பாளர்கட்கும், மேற்பார்வையாளர்கட்கும் ஊதியம் தரப்பட்டது. தனி மனிதர்கட்கும், குடும்பத்தினருக்கும் தனித்தனிச் சீட்டுக்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. இடம் விட்டு இடம் மாறியவர்கள் பற்றிய விவரங்கள் விடப்பட்டன. 1961 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் கணிப்பிற்குரிய விஞத் தொகுதியிலுள்ள விஞக்கள் திட்டக்குழுவைக் கலந்து தயாரிக்கப்பட்டன.

1961 மார்ச்சு 5 இல் கணக்கெடுப்பு வேலை முடிந்து 1961 மார்ச்சு 15 இல் வெளியிடப்பட்டன. 1961 மக்கள்கணிப்பின் படி, இந்தியாவின் மொத்த மக்கள் தொகை 43.9 கோடி. இதில் 22.6 கோடி ஆண்கள். 21.3 கோடி பெண்கள். 35.9 கோடி கிராமப்புறத்தைச் சேர்ந்தவர்கள். 8 கோடி நகர்ப்புறத்தைச் சேர்ந்தவர்கள். மக்களடர்த்தி சதுரகிலோ மீட்டருக்கு 138 பேர். 1000 ஆண்களுக்கு 940 பெண்கள் வீதம் ஆண் பெண் விகிதம் இருந்தது. 4 இலட்சங்களுக்கு மேற்பட்ட மக்கள் தொகை கொண்ட நகரங்கள் 17 இருந்தன. சராசரி பிறப்பு வீதம் 41.7, இறப்பு வீதம் 22.8, உயர்ந்த பிறப்பு வீதம் அசாமிலும் (49.3) குறைந்த பிறப்பு வீதம் தமிழ்நாட்டிலும் (34.9) காணப்பட்டன. உயர்ந்த இறப்பு வீதம் அசாமிலும் (26.9), குறைந்த இறப்பு வீதம் கேரளாவிலும் (16.1) காணப்பட்டன.

2. *வேளாண்மைப் புள்ளி விவரம்* (Agricultural Statistics)

இந்தியா உழவுத் தொழிலேயே பெரிதும் நம்பியிருக்கும் ஒரு வேளாண்மை நாடாகையால் வேளாண்மை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் நாட்டின் முன்னேற்றத்திற்கு இன்றியமையாததாகும். வேளாண்மைப் புள்ளி விவரங்கள் அரசாங்கத்துக்கு மட்டுமின்றி, விவசாயிகள், வியாபாரிகள், பாங்கு நிர்வாகிகள், போக்குவரத்துத் துறையினர் ஆகிய யாவருக்கும் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. வேளாண்மைப் பொருளாதாரத்துடன் தொடர்புள்ள எல்லாவகை விவரங்களும் வேளாண்மைப் புள்ளி விவரங்களில் அடங்கும். இவற்றை பரப்பளவுப் புள்ளி விவரம் (Area Statistics), விளைச்சல் பற்றிய புள்ளி விவரம் (Crop Statistics) கால்நடை, வீட்டுப்பறவைகள் பற்றிய புள்ளி விவரம் (Livestock and poultry Statistics) என்று பிரிக்கலாம்.

பரப்பளவுப் புள்ளி விவரம்

மொத்தம் பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலங்களின் பரப்பளவையும், அந்நிலங்களை வைத்திருப்பவரின் எண்ணிக்கையையும் நிர்ணயிப்பதே பரப்பளவுப்புள்ளி விவரத்தின் முக்கிய நோக்கமாகும். பரப்பளவுப் புள்ளி விவரங்களைத் தேசீய கூறெடுப்பு விசாரணைக் குறிப்புகளிலிருந்தும், (National Sample Survey) கிராமப் பதிவேடுகளின் அடிப்படையில் தயாரிக்கப்பட்ட அரசாங்கக் குறிப்புக்களிலிருந்தும் பெறலாம்.

நம் நாட்டிலுள்ள நிலப்பரப்பு இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

(1) நிலவரி தற்காலிகமாக நிர்ணயிக்கப்பட்ட நிலப்பரப்பு

(2) நிலவரி நிரந்தரமாக நிர்ணயிக்கப்பட்ட நிலப்பரப்பு

நிலவரி தற்காலிகமாக நிர்ணயிக்கப்பட்ட நிலங்கள் யாவும் அளவெடுக்கப்பட்டுப் பதிவு செய்யப்படுகின்றன. இவ்வாறு, அளவெடுக்கப்பட்டுப் பதிவு செப்பப்பட்ட நிலங்களின் பரப்பளவு, மதிப்பு, உரிமையாளர்கள் ஆகிய விவரங்கள் அடங்கிய பதிவேடுகள் கிராமக் கணக்குப் பிள்ளைகளால் தயாரிக்கப்பட்டு பத்திரமாக வைத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. இக்கிராம கணக்கர்கள் ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் பல்வேறு பருவங்களில் பயிரிடப்படுகின்ற பல்வேறு பயிர்களின் நிலப்பரப்புக்கள் பற்றிய அறிக்கைகளைத் தயார் செய்து ரெவுனியூ அதிகாரிகளுக்கு அனுப்பி வைப்பர். ஆனால் இக்கணக்குப் பிள்ளைகள் யாவரும்

குறைந்த சம்பளத்தில் வேலை பார்ப்பவர்களாதலால் தங்கள் வேலைகளைச் சரிவர செய்வார்களென்று கூற முடியாது. மேலும் அவர்கள் தங்கள் அறிக்கைகளைக் குறித்த காலங்களில் அனுப்புவதுமில்லை. ரெவினியூ அதிகாரிகளின் தொடர்ந்த மேற்பார்வையின் மூலம் இக்குறைபாட்டை நீக்கி விட முடியும்.

நிரந்தர நிலவரி நிர்ணயிக்கப்பட்ட நில பரப்புக்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் ஒழுங்காகச் சேகரிக்கப்படுவதில்லை. இந்த நிலங்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து அனுப்பும் பணி கிராம அதிகாரிகளிடம் ஒப்படைக்கப்படுகின்றன. போதிய அனுபவமற்ற கிராம அதிகாரிகள் இந்நிலங்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை ஊகித்து எழுதி அனுப்பிவிடுகின்றனர் ஆகவே, இந்த நிலங்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் யாவும் குறைபாடுயுடையனவாகவே யிருக்கின்றன. தற்காலிகமாக நிலவரி நிர்ணயிக்கப்பட்ட நிலங்களைப்போலவே இந்நிலங்களுக்கும் விரிவான அளவில் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிப்பதன் மூலம் இக்குறைபாட்டை நீக்கிவிடலாம். பரப்பளவுப் புள்ளி விவரங்கள் இந்திய உணவு அமைச்சகத்தைச் சேர்ந்த பொருளாதார, புள்ளியியல் இயக்குநரகத்தால் வெளியிடப்படுகின்றன. மாநில அரசுகளும் தங்கள் மாநிலங்களிலுள்ள நிலங்களின் பரப்பளவுப் புள்ளி விவரங்களை வேளாண்மை பற்றிய மாநில அரசு வெளியீடுகளின் மூலம் வெளியிடுகின்றன.

விளைச்சல் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்

ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் நாட்டிலுள்ள விளை பொருட்களை பற்றிய விவரங்களும் விளைச்சல்களின் அளவுகள் பற்றிய விவரங்களும் அரசாங்க நிர்வாகத்துக்கும், பொருளாதார வல்லுநர்களுக்கும் வியபாரிகளுக்கும் பொது மக்களுக்கும் மிகவும் இன்றியமையாதவையாகும். விளைச்சல் பற்றிய புள்ளி விவரங்களின் அடிப்படையில் தான் அடுத்துள்ள ஆண்டுகளின் விளைச்சல்கள் பற்றிய மதிப்பீடுகளின் முன்கணிப்புகள் செய்யப்படுகின்றன.

விளைச்சல் முன்கணிப்புகள் (Crop forecasts)

விளைச்சல் பற்றிய முன்கணிப்புகள் பின்வரும் நோக்கங்களுக்காகச் செய்யப்படுகின்றன.

(1) விவசாயிகள் தங்கள் வேலைகளை முன்கூட்டித் திட்டமிட உதவுதல்

(2) பயிர்களின் பேரில் விவசாயிகளுக்குக் கடன் வழங்க பாங்கு நிர்வாகிகளுக்கு உதவுதல்

(3) சந்தைப் பதிலாள்களுக்கு (Agent) உதவுதல்

(4) விலைகளை உறுதிப்படுத்துதல்.

ஒவ்வொரு பயிருக்கும் பொதுவாக இரண்டு அல்லது மூன்று மதிப்பீடுகள் செய்யப்படுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட பயிர் விதைக்கப்பட்ட ஒரு மாதத்திற்குள் விதைக்கப்பட்டுள்ள நிலங்களின் பரப்பளவு, விதைமுளைத்துப் பயிராகும் நாள், பருவநிலையால் விதை முளைத்தலில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளாகியவை பற்றிய முதல் மதிப்பீடு கொடுக்கப்படுகிறது. இதற்கு இரண்டு மாதங்களுக்குப்பின், பிந்தி விதைக்கப்பட்ட நிலங்களின் பரப்பளவு, வளர்ந்துள்ள பயிர்களின் நிலைமை, எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற விளைச்சலின் தன்மை ஆகியவை பற்றி இரண்டாவது மதிப்பீடு கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் பின்னர், மூன்ருவது மதிப்பீட்டில், மொத்தம் பயிரிடம்பட்டுள்ள நிலங்களின் பரப்பளவு, எதிர்ப்பார்க்கப்படுகின்ற விளைச்சலின் அளவு ஆகியவை பற்றிய விவரங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

சணல் தவிர மற்ற எல்லா முக்கிய பயிர்களின் மதிப்பீடுகளும் வணிக, புள்ளியியல் துறையினரால் வெளியிடப்படுகின்றன. சணல் பற்றிய மதிப்பீடுகள் மேற்குவங்காள விவசாய இயக்குநரால் வெளியிடப்படுகின்றது. இம்மதிப்பீடுகள் யாவும் "Indian Trade Journal" என்ற பத்திரிகையிலும் வெளியிடப்படுகின்றன. இம்மதிப்பீடுகள் பற்றிய விவரங்கள் மத்திய மாநில அரசுகளால், நாளிதழ்கள் மூலமாகவும், வார, மாத இதழ்களின் மூலமாகவும் வானொலி மூலமாகவும் விளம்பரப்படுத்தப்படுகின்றன.

கால்நடைகள், வீட்டுப்பறவைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்

இந்தியாவில் கால்நடைகள் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் முதன் முதலில் 1883 ஆம் ஆண்டு சேகரிக்கப்பட்டன. 1916 ஆம் ஆண்டு முதல் ஐந்தாண்டுகட்கு ஒருமுறை கால்நடைக் கணக்கெடுப்புச் செய்யப்பட்டு வருகிறது. இப்புள்ளி விவரங்கள் யாவும் பொருளாதார, புள்ளியியல் இயக்குநரால் வெளியிடப்படுகின்ற "இந்தியக் கால்நடைக் கணிப்பு" என்ற வெளியீட்டில் வெளியிடப்படுகின்றன.

1961-ஆம் ஆண்டு கணக்கெடுப்பில் இவ்விவரங்கள் மூன்று வகையாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

(1) மாடுகளும் எருமைகளும் : இவைகள் மூன்று வயதுக் குட்பட்டவை, மூன்று வயதுக்கு மேற்பட்டவையென்றும், ஆண், பெண் என்றும் பாகுபாடு செய்யப்பட்டுள்ளன.

(2) செம்மறி ஆடுகள், வெள்ளாடுகள், குதிரைகள், கழுதைகள், பன்றிகள், ஒட்டகங்கள், மற்றுமுள்ள கால் நடைகள் இவையாவும் ஆண், பெண் என்றும், ஒருவயது வரை, 1முதல் 3வயது வரை, 3வயதுக்கு மேல் என்று பாகு பாடு செய்யப்பட்டுள்ளன.

(3) கோழிகள், வாத்துகள், இதரபறவைகள் : கோழி களைப் பெட்டைகள், சேவல்கள் என்றும் வாத்துக்களை ஆண், பெண் என்றும் பாகுபாடு செய்யப்பட்டுள்ளன.

கால்நடைகள், வீட்டுப்பறவைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங் களைக் கீழ்க்காணும் மூலாதாரங்களிலிருந்து பெறலாம்.

(1) சந்தை அறிக்கைகள் (Marketing reports)

(2) இந்தியாவில் வேளாண்மைப் புள்ளி விவரம் (Agricultural Statistics in India)

(3) இந்தியாவின் வேளாண்மைப் புள்ளி விவரச் சுருக்கம் (Abstract of Agricultural Statistics in India vol. 1,2)

(4) இந்தியப் புள்ளி விவரச் சுருக்கம். (Statistical Abstract of India)

இந்தியாவில் கால் நடைப் புள்ளி விவரங்கள் சரிவர சேகரிக்கப்படுவதில்லை. கால்நடைப்புள்ளி விவரங்களும் இந்தியா முழுவதும் ஒரே சீராகப் பாகுபாடு செய்யப்படவில்லை. சில மாநிலங்களில் ஐந்தாண்டுகட்கு ஒரு முறையும் சில மாநிலங்களில் ஆண்டுதோறும் இப்புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக் கப் படுகின்றன. மேலும் இத்தகைய கணிப்புகள் ஒரே நேரத் தில் செய்யப்படுவதில்லை.

இந்திய வேளாண்மைப் புள்ளி விவரங்களில் பல குறை பாடுகள் காணப்படுகின்றன. இக்குறைபாடுகளை நீக்க அரசாங்கம் பல வழிகளிலும் முயன்று வருகிறது.

இந்தியாவில் தொழில்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் (Industrial Statistics in India)

முதல் உலகப் போரின் போது வெளி நாட்டிலிருந்து எந்தப் பொருளுமே இந்தியாவிற்குள் இறக்குமதி செய்ய

முடியாத நிலையிலிருந்ததால் போர்க்கருவிகளின் பற்றுக்குறையைச் சமாளிக்க முடியாத நிலையிருந்தது. எனவே, சிலவகை போர்க்கருவிகளைச் செய்வதற்காகச் சிலசிறு தொழில்கள் தொடங்கப்பட்டன. அதையடுத்து, முதல் உலகப் போர் முடிந்த பின்னர் அநேக முக்கியமான தொழில்கள் தொடங்கப்பட்டன. 1930 ஆம் ஆண்டுக்குப் பின்னரே, தொழில்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களின் முக்கியத்துவத்தை இந்திய அரசாங்கம் உணரத் தொடங்கி, பல்வேறு தொழில்கள் தொடர்பான புள்ளி விவரங்களைச் சேர்க்கத் தலைப்பட்டது. தொழிற் துறையினர் தாங்களாகவே தங்களது தொழில்கள் பற்றிய விவரங்களை அரசாங்கத்துக்கு அளிக்க வேண்டுமென்று அரசாங்கம் விரும்பியது. ஆனால் தொழிற் துறையினர் இப் பணியில் அரசாங்கத்துடன் ஒத்துழைக்கத் தவறி விட்டனர். அத்துடனில்லாது, இரண்டாம் உலகப்போரின் போது, அரசாங்கம் விரும்பிய விவரங்களை அளிக்க மறுத்துவிட்டனர். எனவே, 1942-இல் தொழில் துறையினர் தங்களது தொழில்கள் பற்றியவிவரங்களை அரசாங்கம் விரும்பும் போது கொடுக்க வேண்டும் என்ற "தொழிலியல் புள்ளி விவரச் சட்டம்" (Industrial Statistics Act) இயற்றப்பட்டது.

1942க்கு முன், இந்தியாவிலுள்ள தொழில் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை, ஒவ்வொரு நிறுவனத்திலும் வேலை பார்த்து வந்தவர்களின் எண்ணிக்கை, பல்வேறு தொழில் நிறுவனங்களின் முதலீடுகள் ஆகியவை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் இந்தியாவில் பெருந்தொழில் நிறுவனங்கள்" என்ற வெளியீட்டிலிருந்து பெறப்பட்டன. 20 பேர்களுக்கு குறையாத வேலையாட்களைக் கொண்ட நிறுவனங்கள் பற்றிய விவரங்கள் இவ்வெளியீட்டில் இடம் பெற்றன. இந்தியாவிலுள்ள தொழில்கள் யாவும் 9 பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தப்பட்டன. (1) நெசவு, (2) பொறியியல் (3) சுரங்கப் பொருட்களும் உலோகப் பொருட்களும் (4) உணவு, பானம், புகையிலை, (5) ரசாயனப் பொருட்களும், சாயப் பொருட்களும் (6) தாள்களும் அச்சுத் தொழிலும் (7) மரம், கல், கண்ணாடி (8) தோல் (9) இதர தொழில்கள். ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலுமுள்ள ஆலைகளின் எண்ணிக்கையும், அகரவரிசையில் ஆலைகளின் பெயர்களும், நாளொன்றுக்கு வேலை பார்க்கும் சராசரி வேலையாட்களின் எண்ணிக்கையும் பற்றிய விவரங்கள் அவ்வெளியீட்டில் இடம் பெற்றன.

1942க்கு முன்னுள்ள தொழிலியல் பற்றிய பிள்ளிவிவரங்கள் "இந்தியப் புள்ளி விவரங்களின் சுருக்கம்" என்ற வெளி

யீட்டிலும் வெளியிடப்பட்டன. பிரிட்டிஷ் இந்தியாவிலுள்ள பல்வேறு தொழில்களைச் சேர்ந்த ஆலைகளின் எண்ணிக்கைகளுள், நாள் தோறும் வேலை பார்க்கின்ற சராசரி வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை முதலிய விவரங்கள் இவ்வெளியீட்டில் இடம் பெற்றன. வேலையாட்கள் முதியவர், இளைஞர், சிறுவர் என்று மூன்று பிரிவுகளாகவும், முதியவர்களும் இளைஞர்களும் ஆண்-பெண் என்று இரு துணைப்பிரிவுகளாகவும் பாகுபாடு செய்யப்பட்டிருந்தனர். இவை தவிர, தொழிலாளர்கட்கு அளிக்கப்பட்ட விடுமுறை நாட்களின் எண்ணிக்கை, ஆலைகளிலேற்பட்ட விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை, 1934-ல் கொண்டு வரப்பட்ட இந்திய தொழிற்சாலைச் சட்டத்தை மீறியவர்கள் மீது அரசாங்கம் எடுத்துள்ள நடவடிக்கைகள் ஆகியவை பற்றிய விவரங்களும் இவ்வெளியீட்டில் இடம் பெற்றிருந்தன. பருத்தி சணல் ஆகிய ஆலைகளில் மூலப் பொருட்களின் நுகர்வு பற்றிய விவரமும், அம்மூலப் பொருட்களைக் கொண்டு உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் மதிப்பு பற்றிய விவரமும் இவ்வெளியீட்டில் தரப்பட்டன.

1942-இல் தொழிலியல் புள்ளி விவரங்களை வெயிட்ட இதர வெளியீடுகள் வருமாறு. இந்திய அரசாங்கத்தால் வெளியிடப்பட்ட ''ஆலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்'' கல்கத்தாவிலிருந்து வணிக, புள்ளியியல் துறையினரால் மாதந்தோறும் வெளியிடப்பட்ட ''கூட்டுப்பங்கு கம்பெனிகளின் வேலைகள் பற்றிய அறிக்கை''. அதே துறையினரால் வெளியிடப்பட்ட ''இந்தியாவில் சில குறிப்பிட்ட தொழில்களின் உற்பத்தி பற்றிய மாதவாரிப்புள்ளி விவரங்கள்'' என்ற வெளியீட்டில் சணல், தாள், இரும்பு, சீனி, தீப்பெட்டிகள் பெட்ரோல், மண் எண்ணெய், எண்ணெய், சிமெண்ட், கோதுமை மாவு, ரசாயனப் பொருட்கள் ஆகியவற்றின் மாதாந்தர உற்பத்தி பற்றிய விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ''இந்தியாவில் தொழில் நிலைமைகளின் மாதாந்தர அளவெடுப்பு'' என்ற வெளியீட்டில் பருத்தி ஆடைகள், சணல், இரும்பு, சீனி ஆகிய பொருட்களின் மாதாந்தர உற்பத்தி பற்றிய விவரங்கள் இடம் பெற்றன.

1942-இல் இயற்றப்பட்ட தொழிலியல் புள்ளி விவரச் சட்டத்தின் மூலம் மாநில அரசுகள் தொழிலியல் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்க அதிகாரிகளை நியமித்துக் கொள்ள வழிவகை செய்யப்பட்டது. இந்த அதிகாரிகளுக்கு எந்த தொழில் நிறுவனத்திலுள்ளும் வேலைநேரங்களில் நுழையவும், பதிவேடுகளையும், கணக்கு புத்தகங்களையும் சோதனையிடவும் அதிகாரம்

வழங்கப்பட்டது. விவரங்களையளிக்க மறுத்தவர்கள் தண்டிக்கப் பட்டனர். தவறான விவரங்கள் அளிப்பவர்கட்கு ரூ 1000 வரை அபராதம் அல்லது 6 மாதச் சிறைத் தண்டனை வழங்கப் பட்டது. 1945-இல் இயற்றப்பட்ட தயாரிப்புக் கணக்கெடுப்பு விதிகளின்படி அதிகாரிகளால் அனுப்பப்படுகின்ற மூன்று வகை பாரங்களில் தொழில் நிறுவனத்தினர் கேட்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை எழுதி குறிப்பிட்ட காலங்களில் அனுப்ப வேண்டும். இவ்வாறு சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் விரிவாகவும் விளக்கமாகவும் இருந்தபடியால் அரசாங்கம் நீண்டகால பொருளாதாரக் கொள்கைகளை வகுக்க மிகவும் பயனுள்ளவையாயிருந்தன.

இதன் பின்னர் இந்தியாவில் தொழிலியல் புள்ளி விவரங்கள் ''புள்ளி விவரச் சேகரிப்புச் சட்டம்-1953'' இன் படி சேகரிக்கப்பட்டன. இச் சட்டத்தின்படி எந்தத் தொழில் அல்லது தொழில்களுடன் தொடர்பான விவரங்கள், எந்த வியாபார அல்லது தொழில் அல்லது ஆலை நிறுவனத்துடன் தொடர்பான விவரங்கள் பண்டங்களின் விலைகள், வேலைகளுக்குத் தொழிலாளர்களின் வருகை, கூலிகள், வேலைநேரங்கள், வேலையின்மை, தகராறுகள் முதலிய தொழிலாளர்களின் உழைப்பு தொடர்பான விவரங்கள் ஆகியவற்றை அரசாங்கம் சேகரிக்க முடியும். 1959 இல் அமுலுக்குக் கொண்டு வரப்பட்ட புள்ளி விவரச் சேகரிப்பு (மத்திய) விதிகளைக் தொடர்ந்து, 1959 முதல் தொழில்களின் வருடாந்திர அளவெடுப்பு என்ற புதிய முறையைப் பின்பற்றிப் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. இம்முறைப்படி, தொழில்களில் முடக்கப்பட்டுள்ள மூலதனம், வேலைவாய்ப்பு, கூலி, மூலப்பொருட்களின் நுகர்வு, உற்பத்தி, இருப்புச்சரக்கு, மின்உபகரணம், விற்பனை, தொழிலியல் ஆராய்ச்சி ஆகியவை பற்றிய விவரங்கள் சேகரிக்கப் பட்டன.

இந்தியாவின் கிராமப்புற, நகர்ப்புறபொருளாதாரங்களில் குடிசைத் தொழில்களின் பங்கு மிக அதிகமாகயிருந்த போதிலும், 1942க்கு முன் குடிசைத் தொழில்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் சேகரிப்பதில் சிறிதளவும் கவனம் செலுத்தப் படவில்லை. 1951 இல் எடுக்கப்பட்ட கணக்கெடுப்பிலிருந்து சிறு தொழில்கள், குடிசைத் தொழில்கள் ஆகியவற்றில் ஈடுபட்டவர்களின் எண்ணிக்கை, வருமானம் ஆகியவற்றை தேசிய வருமானக் குழுவால் மதிப்பிடப்பட்டது. அம்மதிப்பீட்டின்படி,

பல்வேறு தொழில்களில் ஈடுபட்டவர்களின் எண்ணிக்கை 14 மில்லியன்கள். அவர்களில் 3 மில்லியன் பேர்கள் ஆலைகளில் வேலை பார்ப்பவர்; மீதி 11 மில்லியன் பேர்கள் குடிசைத் தொழில்களிலும், சிறு தொழில்களிலும் ஈடுபட்டிருந்தனர். இந்த 11 மில்லியன் பேர்களின் மொத்த வருமானம் ரூ 911 கோடிகள்.

தற்போது தொழிலியல் புள்ளிவிவரச் சேகரிப்புப் பெரிதளவில் வளர்ச்சி அடைந்துள்ள போதிலும், மூலப்பொருள் நுகர்வு, உற்பத்தி, பலதிறப்பட்ட வேலையாட்களின் வேலை வாய்ப்பு, குடிசைத் தொழில்களிலும், சிறு தொழில்களிலும் முடக்கப்பட்டுள்ள மூலதனங்கள் ஆகியவை பற்றிய விவரங்கள் விளக்கமாகக் கிடைக்கவில்லை. இக்குறைபாடுகள் நீங்குமளவிற்கு புள்ளி விவரச் சேகரிப்புத்துறையினர் புள்ளி விவரச் சேகரிப்புப் பணியில் தீவிர கவனம் செலுத்த வேண்டும்.

இந்தியாவில் வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் (Trade Statistics in India)

உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பண்டங்களின் பங்கீட்டு முறைகள் பற்றி அமைந்திருப்பதன் காரணமாக வியாபாரம் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் ஒவ்வொரு நாட்டிற்கும் மிகுந்த பயனுடையவையாகக் கருதப்படுகின்றன. தொடக்க காலத்திலிருந்தே இந்தியாவில் வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் திருப்தியான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டு வந்திருக்கின்றன. பெரும்பாலான வியாபார விவரங்கள் துறைமுக அதிகாரிகள், சுங்கச் சாவடிகள், புகை வண்டி நிலைய அலுவலகங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து கிடைக்கின்றன. இவ்விவரங்கள் யாவும் கல்கத்தாவிலுள்ள வணிக, புள்ளியியல் துறையினரால் சேகரிக்கப்பட்டு தொகுக்கப்பட்டு வெளியிடப்படுகின்றன. வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை "அயல்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்கள்", "உள்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்கள்" என்னும் இரு முக்கிய தலைப்புக்களின் கீழ் ஆராயலாம்.

அயல்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்கள்

இந்தியாவின் வெளிநாட்டு வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை இந்தியத்துறைமுகங்களிலுள்ள சுங்க அதிகாரிகளிடமிருந்தும், மத்திய வரி அலுவலகத்திலிருந்தும், உள்நாட்டுச் சுங்கச் சாவடிகளிடமிருந்தும் பெறலாம். 1905-இல் வணிக, புள்ளியியல் துறை நிறுவப்பட்ட பின்னர் இந்தியாவின் அயல்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்களின் தரம் வெகுவாக

உயர்ந்துள்ளது. 1905 இல் வணிக, புள்ளியியல் துறை நிறுவப்பட்ட பின்னர் இந்தியாவின் அயல்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்களின் தரம் வெகுவாக உயர்ந்துள்ளது. 1957 ஆம் ஆண்டு முதல் ''இந்தியாவின் அயல்நாட்டு வியாபார மாதாந்திரப் புள்ளி விவரம்'' என்ற பத்திரிகையை இரண்டு பாகங்களாக இந்நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது. இது தவிர, ''இந்தியாவின் அயல்நாட்டு வியாபாரம் பற்றிய வருடாந்திரப் புள்ளி விவரங்கள்'', ''இந்தியாவின் கடல் வாணிபம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்'' ''இந்திய யூனியன், சுங்க வரி ரெவினியூ அறிக்கைகள்'' ஆகிய வெளியீடுகளின் மூலமும் அயல்நாட்டு வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைப் பெறலாம். மேலும் ''இந்தியா உற்பத்திப் பொருட்களை ஏற்றுமதி செய்வோர் பற்றிய விவ்ரங்களடங்கிய புத்தகம்'', ''அயல்நாட்டு வியாபாரப்பாகுபாடு'' ''இந்திய கலை, விளையாட்டுப் பொருட்களின் ஏற்றுமதி'' என்ற வெளியீடுகள் ஆகியவை மூலம் அயல் நாட்டு வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைப் பெறலாம். இந்திய அயல்நாட்டு வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களில் தங்கம், ரூபாய் தாள்கள், நாணயங்கள் ஆகியவற்றின் மூலம் நடைபெறுகின்ற நடவடிக்கைகளும், கடல் பிரயாணிகள் கொண்டு வருகின்ற வரிவிதிப்புக்குப் புறம்பான பண்டங்களும் சேர்க்கப்படவில்லையென்பது பெருங்குறைபாடாகக் கருதப்படுகிறது.

உள்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்கள்

இந்தியாவின் உள்நாட்டு வியாபாரங்களை மாநிலத்துக்கு மாநிலம் நடைபெறுகின்ற மொத்த வியாபாரம், ஒரு துறை முகத்துக்கும் இன்னொரு துறைமுகத்துக்கும் நடைபெறுகின்ற வியாபாரம் என்று இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். மாநிலத்துக்கு மாநிலம் நடைபெறுகின்ற வியாபாரத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு பல வகையாகப் பிரிக்கலாம் :—

(அ) இருப்புப்பாதை, ஆற்றுப்பாதை வழியாக நடைபெறுகின்ற வியாபாரம், (ஆ) சாலை வழி வியாபாரம், (இ) கடற்கரை வழியே நடைபெறும் வியாபராம் (ஈ) ஆகாய மார்க்கமாக நடைபெறும் வியாபாரம்.

(அ) இருப்புப்பாதை, ஆற்றுப்பாதை வழி வியாபாரம்

இந்தியாவில் இருப்புப்பாதை, ஆற்றுப்பாதை வழியே நடைபெறுகின்ற உள்நாட்டு வியாபாரம் பற்றிய விவரங்கள் ''இந்திய உள்நாட்டு (இருப்புப் பாதை, ஆற்றுப்பாதை) வியா

பாரம் பற்றிய கணக்குகள்'' என்ற அரசாங்க வெளியீட்டில் வெளியிடப்படுகின்றன.

(ஆ) சாலைவழி வியாபாரம்

சாலைப் போக்குவரத்து இருப்புப்பாதைப் போக்குவரத்துக்குச் சவாலாக அமைந்த போதிலும் சாலைவழி வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கு முயற்சி எதுவும் எடுக்கப்பட்டதாகத் தெரியவில்லை.

(இ) கடற்கரை வழி வியாபாரம்

இந்தியாவின் உள்நாட்டு வியாபாரங்களுள் கடற்கரை வழி வியாபாரங்கள் பற்றிய புள்ளி முழு விவரங்களும் ''இந்தியாவின் கடற்கரை வழி வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்'' என்ற அரசாங்க வெளியீட்டிலிருந்து முழுமையாகக் கிடைக்கின்றன.

(ஈ) ஆகாய மார்க்க வியாபாரம்

இந்திய உள்நாட்டு வாணிபத்தில், ஆகாய மார்க்கமாக நடைபெறுகின்ற வியாபாரம் பற்றிய முழு புள்ளி விவரங்களும் சேகரிக்கப்படவில்லை. ஆகாய மார்க்கம் முழுமையாக மத்திய அரசின் ஆதிக்கத்திற்குள்ளிருந்த போதிலும் ஆகாய மார்க்கமாக ஏற்றிச் செயல்படுகின்ற சரக்குகளுக்கு வசூலிக்கப் படுகின்ற கட்டணங்கள் தவிர வேறு எந்த விவரமும் சேகரிக்கப் படவில்லை.

சில்லறை வியாபாரம் (Retail Trade)

இந்தியாவில் சில்லறை வியாபாரம் பற்றிய விவரங்கள் மிகவும் மோசமான நிலையிலேயே யிருக்கின்றன. இத்தகைய புள்ளி விவரங்கள் எந்தப் பகுப்பாய்வுக்கும் பயன்படுத்தப் படுவதில்லை என்பது ஒரு காரணம். இது பற்றிய புள்ளி விவரங்களை வெளியிடுவதற்கென தனியாக எந்த வெளியீடும் கிடையாது. ''இந்திய வியாபாரப் பத்திரிகை''யில் சில்லறை வியாபாரம் பற்றிய சில விவரங்கள் காணப்படுகின்றன. இது தவிர சில நாளிதழ்களிலிருந்தும், வார இதழ்களிலிருந்தும் இது பற்றிய விவரங்களைப் பெறலாம்.

உள்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரத்தின் குறைபாடுகள்

வியாபாரங்களின் மதிப்புக்கள் பற்றிய விவரங்கள கிடைக்காமை, எல்லா வகைப்பண்டங்கள் பற்றிய விவரங்களும்

கிடைக்காமை, பயணிகளின் போக்குவரத்து சேர்க்கப்படாமை ஆகியவை இந்திய உள்நாட்டு வியாபாரப் புள்ளி விவரங்களில் காணப்படுகின்ற குறைபாடுகளாகும். இக்குறைபாடுகள் நீக்கப்பட்டு விட்டால் இந்திய வியாபாரப் புள்ளி விவரங்கள் முழுமை பெறுவதோடு, வியாபார வளர்ச்சிக்குப் பெரிதும் பயன்படுவதாகவுமிருக்கும்.

(4) இந்தியாவில் விலைவாசிப் புள்ளி விவரங்கள்

ஒரு நாட்டின் பொருளாதார நிலைமை அந்நாட்டிலுள்ள பல்வேறு பண்டங்களின் விலைவாசிகளின் போக்குகளையும், அந்நாட்டின் பொது விலைவாசி நிலைமைக்கும், சர்வதேச விலைவாசி நிலைமைக்குமுள்ள தொடர்பினைச் சார்ந்திருக்கும். நாட்டின் ஒரு பகுதியில் ஏதாவது ஒரு பண்டத்தின் விலையிலேற்படுகின்ற மாறுதல் வேறு சில பகுதிகளில் வேறு சில பண்டங்களின் விலைவாசி நிலைமைகளைப் பாதிக்கலாம். விலைவாசிகளிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் நாட்டின் வியாபாரம், தொழில் ஆகியவற்றைப் பெரிதளவில் பாதிக்குமாகையால் பண்டங்களின் விலைவாசிகளில் அதிக அளவில் மாறுபாடுகளேற்படாதவாறு கட்டுப்படுத்த வேண்டியது அவசியமாகும். ஆனால் விலைவாசிகளைக் கட்டுப்படுத்த வேண்டுமாயின் நாட்டிலுள்ள பல வகையான பண்டங்களின் விலைகள் பற்றிய வவிரங்கள் தெரிந்திருக்க வேண்டும். இவ்விவரங்களை விலைவாசிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களிலிருந்து பெறலாம். விலைவாசிப் புள்ளி விவரங்களை மொத்த விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரம், சில்லறை விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரம் என்று பாகுபடுத்தலாம்.

மொத்த விலைகள் பற்றிய புள்ளிவிவரம்

பண்டங்களின் விலைவாசி பற்றிய விவரங்களை மொத்த விலைகளாகவோ அல்லது முழுவிலைக் குறியீட்டெண்களாகவோ சேகரிக்கலாம். பல்வேறு பண்டங்களின் மொத்த விலைகள் ஒவ்வொரு மாநிலத்திலுமுள்ள பொருளாதார ஆலோசகராலும் சேகரிக்கப்படுகின்றன. மொத்த விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரம் 59 பண்டங்களின் விலைகளைக் கொண்டமைந்துள்ளது. இந்த 59 பண்டங்களும் 5 பிரிவுகளாகவும், 16 துணைப் பிரிவுகளாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன, ஒவ்வொரு மாத இறுதி வாரத்திலும் முக்கியமான சந்தைகளிலிருந்து விலைகள் சேகரிக்கப் படுகின்றன. 1964 முதல் மாநில அரசுகளுக்கு உணவுப் பண்டங்களுக்கு நியாய விலைகளை நிர்ணயிக்கும் அதிகாரம் வழங்கப்பட்டுள்ளது. இந்தியாவில் ''முழுவிலைக் குறியீட்டெண்கள்'' ''சில்லறை விலைக் குறியீட்டெண்கள்'' ''நுகர்

வோர் விலைக் குறியீட்டெண்கள்'' என்ற மூன்று வகை விலைக் குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கப் படுகின்றன. பொருளாதார ஆலோசகர், 1939 ஆகஸ்ட் 19 உடன் முடிவடைகின்ற வாரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு 23 பண்டங்களைக் கொண்டு முழுவிலைக் குறியீட்டெண்கள் தயாரித்து வெளியிட்டு வந்தார். இது அவ்வளவு திருப்தியானதாகயில்லாததால் 1939 ஆகஸ்டுடன் முடிகின்ற ஆண்டின் அடிப்படையில் 78 பண்டங்களின் விலைகளைக் கொண்டு 1941 ஆம் ஆண்டில் முழு விலைக் குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கப்பட்டன. பின்னர் 1953 இல் 1952-53-இன் அடிப்படையில் 112 பண்டங்களைக் கொண்டு முழுவிலைக் குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கப்பட்டன. இந்த 112 பண்டங்களின் விலைகளை நிர்ணயிக்க 555 விலைகள் சேகரிக்கப்பட்டன. பண்டங்களின் விலைகளுக்கு நிறைகள் அளிக்கப்பட்டு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியின் மூலம் குறியீட்டெண் தயாரிக்கப்பட்டது. மொத்தத்தில் 50% உணவுப் பண்டங்களுக்கும், மீதி 50% நிறை ஏனைய பண்டங்களுக்கும் அளிக்கப்பட்டன. பண்டங்களைத் திருப்தியான முறையில் தெரிவு செய்யவில்லையாகையாலும், இதர பண்டங்களைக் குறியீட்டெண் தயாரிப்பில் சேர்க்கவில்லையாதலாலும், குறியீட்டெண்கள் திருப்தியானவையாகயில்லை.

தற்போது பொருளாதார ஆலோசகர், 1952-53-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு வார, மாத, ஆண்டு முழுவிலைக் குறியீட்டெண்களைத் தயாரிக்கின்றார். மேலும் 26 சுரங்க, தாதுப் பொருட்களைக் கொண்டு இந்திய சுரங்க ஆராய்ச்சிக் கழகத்தினரால் சுரங்கப் பொருட்களின் பொது விலைக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கப்படுகிறது,

சில்லறை விலைப் புள்ளி விவரங்கள்

மொத்த விலைகளைவிட சில்லறை விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மிகவும் திருப்தியற்ற நிலையிலிருக்கின்றன. உப்பு பற்றிய சில்லறை விலைகள் ''இந்தியப் புள்ளி விவரச் சுருக்கம்'' என்ற வெளியீட்டில் காணப்படுகின்றன. தங்கம், வெள்ளி ஆகியவற்றின் சில்லறை விலைகளை இந்திய ரிசர்வ் பாங்கு வெளியிடுகிறது. இந்திய விவசாய ஆராய்ச்சிக் கழகம் கருப்பு விலைகளைச் சேகரித்து, தொகுத்து வெளியிடுகிறது. மக்களின் வாழ்க்கை முறையிலுள்ள மாற்றங்கள் எடுத்துக் காட்டுகின்ற வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களை எல்லா மாநில அரசுகளும் தயாரித்து தத்தம் பதிவேடுகளில் வெளியிடுகின்றன, ஒரு சில மாநிலங்களின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்

கள் இந்திய உழைப்பாளர்களின் பதிவேட்டிலும் வெளியிடப் படுகின்றன. மாநில அரசுகளால் வெளியிடப்படுகின்ற வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டெண்களுள் பம்பாய்—வேலை செய்யும் பிரிவினரின் நுகர்வு விலைக் குறியீட்டெண்கள், கான்பூர்—வேலை செய்யும் பிரிவினரின் நுகர்வு விலைக் குறியீட்டெண்கள், மத்திய பாரத்—வேலை செய்யும் பிரிவினரின் நுகர்வு விலைக் குறியீட்டெண்கள் ஆகியவை முக்கியமானவையாகக் கருதப்படுகின்றன.

விவசாய விளைவுப் பொருட்களின் விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை இந்திய மாநில பாங்குகளும், மாநில அரசுகளும் சேகரிக்கின்றன. மாநில அரசுகள் சேகரிக்கின்ற விளை பொருட்களின் விலைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பருவங்களும் விளைச்சலும் பற்றிய அறிக்கைகளின் மூலம் வெளியிடப் படுகின்றன. விளை பொருட்களின் அறுவடை விலைகள் ''இந்திய வேளாண்மைப் புள்ளி விவரங்கள்—பாகம் 1''இலும் வெளியிடப்படுகின்றன. விவசாயப் பொருட்களின் மொத்த விலைகள் ''உணவு தானியங்களின் மொத்த விலைகள்'', ''விவசாய விலைகளின் அறிக்கை'' என்ற வார வெளியீடுகளில் வெளியிடப் படுகின்றன. இவ்வெளியீடுகள் யாவும் பொருளாதார. புள்ளியியல் இயக்குநரகத்திலிருந்து வெளியிடம்படுகின்றன.

பண்டங்களின் விலைகள்யாவும் அரசாங்கப் பதிவாட்கள் மூலமாகவும், தனியார் துறையினர் மூலமாகவுப் சேகரிக்கப் படுவதால், சேகரிக்கப்படுகின்ற விலைகள் ஒரே சீராகயிருப்பதில்லை. ஆகவே, விலைகளைச் சேகரிப்பதற்கென்றே மத்திய அரசு ஒரு தனி அமைப்பை ஏற்படுத்திக் கொள்ளுவதன் மூலம் இக்குறைபாட்டை நீக்கிவிடலாம். இந்தியாவின் விலைவாசிப் புள்ளி விவரங்களின் தரத்தைச் சீர்படுத்தும் பொருட்டு விவசாய விலைகளின் விசாரணைக் குழு பல வழிமுறைகளைச் சுட்டிக் காட்டியிருக்கிறது. தொழில் உற்பத்திப் பொருட்களின் தரங்களைத் தரக்கட்டுப்பாடு சோதனைகளின் மூலம் உயர்த்த வேண்டும். விவசாய பொருட்களின் தரங்களையும் ''அக்மார்க்'' முறையைப் பின்பற்றி கட்டுப்படுத்த வேண்டும். விலைவாசிப் புள்ளி விவரங்களைக் குறித்த காலங்களில் வெளியிடுவதன் மூலம் விலைவாசிகளைக் கட்டுப்படுத்த முடியும்.

(5) இந்தியாவில் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் (Wages Statistics in India)

கூலிகள் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் தொழில் துறையினருக்கும், அரசினருக்கும் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகக்

கருதப்படுகின்றன உற்பத்தியைப் பெருக்கவும், உற்பத்தித் தரத்தை உயர்த்தவும் இவை இன்றியமையாதவை. ஒரு உழைப்பாளி ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் சம்பாதிக்கின்ற தொகையிலிருந்து அல்லது ஒரு மணி அல்லது ஒரு நாள் அல்லது ஒரு மாத வேலைக்குரிய கூலியிலிருந்து கூலியை அடையலாம். முதல்வகை கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களுக்கு வருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்களென்றும், இரண்டாம் வகை கூலி வீதங்களின் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களென்றும் பெயர். வருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மக்களின் பொது வாழ்க்கைத் தரத்தையும், கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மக்களின் வாங்கும் சக்தியையும் காட்டுகின்றன.

கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் ஒழுங்காகச் சேகரிக்கப் படவில்லை. வேளாண்மைக் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மிகவும் குறைபாடுடையவையாக யிருக்கின்றன. வேளாண்மைத் தொழிலாளர்களின் நிலைமையும் ஏனைய தொழிலாளர்களின் நிலைமையை விட மிகவும் மோசமானதாகயிருக்கிறது. சுரங்கங்களின் தலைமை மேற்பார்வையாளரின் ஆண்டறிக்கைகளிலிருந்து தொழில் துறையைச் சேர்ந்த உழைப்பாளிகளின் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கிடைக்கின்றன. ஆலைகளில் வேலைவாய்ப்பு, வேலைப் பறிமாற்றப் புள்ளி விவரங்கள், சில வகை உழைப்புக்களின் வாரச் சராசரி வருவாய் ஆகியவை பற்றி இந்தியாவின் உழைப்புப் பதிவேடுகளில் வெளியிடப்படுகின்றன. தயாரிப்புத் தொழில்களில் வேலை பார்க்கும் உழைப்பாளிகளின் தனிநபர் ஆண்டு வருவாய் பற்றிய விவரங்களுக்கும் இவ்வெளியீட்டில் இடம் பெறுகின்றன.

வேளாண்மைக் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் இன்னும் தெரிவில்லாமலும், குறைபாடுடையவையாகவுமே யிருக்கின்றன. 1950-இல் இப்புள்ளி விவரங்களை ஒரேசீரான முறையில் சேகரிக்கும் பொருட்டு பொருளாதார புள்ளியியல் இயக்குநரகத்தால் ஒரு வழிமுறை வகுக்கப்பட்டது. இதன்படி, வேளான்மை உழைப்பாளிகள் பின்வருமாறு பாகுபடுத்தப் பட்டனர்.

(1) கைவேலை உழைப்பாளிகள் (தச்சர், கொல்லர், செருப்பு தைப்பவர்)

(2) வயல் உழைப்பாளிகள் (உழுபவர். விதைப்பவர், நடுபவர், களையெடுப்பவர், அறுவடை செய்பவர்)

(3) பிறவேளாண்மை உழைப்பாளிகள் (கூலிகள், சுமையாட்கள், கிணறு தோண்டுபவர்)

(4) ஆடு, மாடு மேய்ப்பவர்.

ஒவ்வொரு பிரிவைச் சார்ந்த உழைப்பாளிகளுக்கும் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் தனித் தனியே ஆண்கள், பெண்கள், குழந்தைகள் என்ற துணைப் பிரிவுகளுடன் சேகரிக்கப்படுகின்றன. இப்புள்ளி விவரங்கள் யாவும் "இந்தியாவில் வேளாண்மை நிலைமைகள்" ஆகிய வெளியீடுகளில் வெளியிடப்படுகின்றன.

1948-இல் குறைந்த பட்ச ஊதியச் சட்டம் பிறப்பிக்கப் பட்டது. வேளாண்மைத் தொழிலாளர்களின் வருவாயைச் சீர்படுத்துவதற்காக எடுக்கப்பட்ட ஒரு சிறந்த முயற்சியாகும். இது 1950–'51, 1956–'57 ஆகிய ஆண்டுகளில் நடத்தப் பட்ட வேளாண்மைத் தொழில் விசாரணைகளின் மூலம் வேளாண்மைத் தொழில் பற்றிய பல பயனுள்ள விவரங்கள் கிடைத்தன. மத்திய புள்ளி விவர அலுவலகம் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை இன்னும் சிறந்த முறையில் சேகரிப்பதற்குப் பல வழிகளிலும் முயன்று வருகிறது.

(6) இந்தியாவில் தேச அளவில் கூறெடுப்பு விசாரணைகள் (National Sample Surveys—NSS)

இந்தியாவில் திட்டங்கள் தீட்டுவதிலும், கொள்கைகள் வகுப்பதிலும் காணப்பட்ட சிரமங்களுக்குக் காரணம் நம்முடைய பொருளாதாரம் பற்றிய விவரங்களின் குறைபாடுகளேயாகும். இக்குறைபாடுகளை நீக்கும் எண்ணத்துடன் 1950-இல் இந்தியாவின் தேசீய கூறெடுப்பு விசாரணை அமைப்பு (National Sample Survey Organization) நிறுவப்பட்டது. இது நிதியமைச்சகத்துடன் பொருளாதாரத் துறையில் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. இவ்வமைப்பின் மூன்று முக்கிய பணிகளாவன :—

(1) இந்தியா முழுவதும் சமூக—பொருளாதார நிலைமைகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்கான முறையில் ஒரே சீராகச் சேகரிப்பது தேசீய வருமானத்தை அளவிடுவதற்கும், திட்டங்களை வகுப்பதற்கும் உதவுவதே இதன் நோக்கம்.

(2) தொழிற்துறைகளுடன் தொடர்பான விசாரணைகளையும் அளவெடுப்புகளையும் ஆண்டுதோறும் நடத்துவது.

(3) வேளாண்மைத் துறையில் அளவெடுப்புகளுக்கும் விசாரணைகளுக்கும் மாநில அரசுக்குப் பயிற்சியளிப்பதும், மற்றும் தேவையான உதவிகளைச் செய்வதும்.

மத்திய புள்ளி விவர அமைப்பு இந்தியப் புள்ளி விவர நிலையம், மாநில அரசுகள் ஆகியவை இந்திய தேசீய கூறெடுப்பு விசாரணைக் கழகத்தின் இயக்குநருக்கு அளவெடுப்பு, புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு ஆகிய வேலைகளில் உதவியாக இருக்கின்றன. இந்திய மக்களின் சமூக, பொருளாதார வாழ்க்கை முறை பற்றிய பலதிறப்பட்ட விவரங்களையும் சேகரிக்கும் பொருட்டு இக்கழகம் அளவெடுப்புகள் செய்கிறது. இந்தியா ஒரு பரந்த நாடு. ஆகையால் முழுக்கணக்கெடுப்பு முறையில் அடிக்கடி விசாரணைகள் நடத்த முடியாது. ஆகவே, சமவாய்ப்புக்கூறெடுத்தல் முறையில் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்பட்டு விசாரணைகள் நடத்தப்படுகின்றன. சமூக, பொருளாதாரப் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்காக நாடு முழுவதும் பூகோள அடிப்படையில் 250 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பகுதிகளிலிருந்து 1833 கிராமங்களைக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக்கூறு எடுக்கப்பட்டு, 1189, 644 கிராமங்களைக் கொண்ட இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டது. பின்னர் முறையான கூறெடுத்தல் முறைப்படி இக்கூறுகளிலிருந்து தேவையான குடும்பங்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டன. முதற் கூறிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட குடும்பங்களுக்கான வினாப்பட்டியல்களை இந்தியப் புள்ளி விவர நிலையமும், இரண்டாவது கூறிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட குடும்பங்களுக்கான வினாப்பட்டியல்களைப் பூனாவிலுள்ள கோகலே நிலையம் தயாரித்தன. புள்ளி விவரச்சேகரிப்பு முறைகள் பற்றி கணிப்பாளர்கட்குப் பயிற்சியளிக்கப்பட்டது. இவ்வாறு பயிற்சி பெற்ற கணிப்பாளர்கள், தெரிவு செய்யப்பட்ட குடும்பங்களுக்குச் சென்று விவரங்களைச் சேகரித்தனர். இக் கழகத்தின் முதல் அளவெடுப்பு வேலை 1950 அக்டோபர் 1இல் தொடங்கப்பட்டது. தெரிவு செய்யப்பட்ட பண்டங்களின் விலைகள், பலதிறப்பட்ட தொழிலாளர்களின் கூலிகள் ஆகியவை பற்றிய விவரங்களும் சேகரிக்கப்பட்டன. அதன் பின்னர் நடத்தப்பட்ட அளவெடுப்புக்களில் சில மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டன. மூன்றாவது சுற்று அளவெடுப்பில், நகர்ப்புறங்களும் சேர்த்துக்கொள்ளப்பட்டன. நான்காவது சுற்று அளவெடுப்பில் முதன்முதலாக ஆலைகள் பற்றிய விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. ஐந்தாவது சுற்று அளவெடுப்பில் தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகள் பற்றிய விவரங்களும் சேகரிக்கப்பட்டன. ஒன்பதாவது

அளவெடுப்பில் வேலை வாய்ப்பு, வேலையின்மை பற்றிய விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. பதிமூன்றாவது அளவெடுப்பில் புத்தகங்கள் வாசிப்போர் பற்றிய விவரங்கள் சேகரிக்கப் பட்டன. பதினான்காவது சுற்று அளவெடுப்பில் தொழிலாளர் இனம், நடுத்தர இனம் ஆகியோரின் வாழ்க்கைத் தரம் பற்றிய விவரங்களும் பிறப்பு, இறப்பு வீதங்கள், மக்கள் பெருக்கம் ஆகியவை பற்றிய விவரங்களும் சேகரிக்கப்பட்டன. இத்தகைய முறையான அளவெடுப்புகள் தவிர அவ்வப்போது தேவைப் படுகின்ற விவரங்களைச் சேகரிக்கும் பொருட்டுத் தற்காலிக அளவெடுப்புகளும் செய்யப்படுவதுண்டு. இவ்வாறு செய்யப் பட்ட தற்காலிக அளவெடுப்புகளுள் சில வருமாறு:

(1) மேற்கு வங்கத்திலும், பம்பாயிலும் இடம் விட்டு இடம் வந்தவர்கள் பற்றிய அளவெடுப்பு

(2) பத்திரிகை வாசிக்கும் பழக்கமுடையவர் பற்றிய அளவெடுப்பு

(3) வீட்டு வசதி நிலைமை பற்றிய அளவெடுப்பு

(4) வேலையின்மை பற்றிய அளவெடுப்பு

எல்லா அளவெடுப்புகளிலும் மத்திய புள்ளி விவர அமைப்பு எல்லா வகை அளவெடுப்பு வேலைகளில் ஒத்துழைப்பது மட்டு மல்லாது அளவெடுப்புத் திட்டங்களை வகுப்பது, பட்டியல் களமைப்பது போன்ற பணிகளையும் ஏற்றுக் கொள்கிறது. வினாப்பட்டியல்கள் தயாரித்தல், பகுப்பாய்வு செய்தல் போன்ற பணிகளை இந்தியப் புள்ளி விவர நிலையம் ஏற்றுக்கொள்கிறது.

தேசிய கூறெடுப்பு விசாரணை இயக்குநரகம் தொடங்கப் பட்ட நாள்முதல் இதுவரை அளவற்ற பணிகளைச் செய்து முடித்திருக்கிறது. 1957-இல் இக்கழகம் ஆற்றி வருகின்ற பணிகளை அளவிடும் பொருட்டு இந்திய அரசாங்கத்தால் குழு ஒன்று அமைக்கப்பட்டது. தேசிய கூறெடுப்பு விசாரணைக் குழுவின் பணிகளை ஆராய்ந்த அக்குழு இதன் சிறப்பாக பணி களை வெகுவாகப் பாராட்டியதோடு, இதன் வளர்ச்சிக்கான நல்ல பல யோசனைகளையும் கூறியுள்ளது.

இந்தியாவின் தேச வருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் (National income Statistics in India)

அரசாங்கத்தின் பொருளாதார, வரிவிதிப்புக் கொள்கை களை வகுப்பதற்கும், வரவு செலவுத் திட்டங்களைச் சரியான

முறையில் தயாரிப்பதற்கும் தேச வருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் இன்றியமையாதவையாகும். ஐந்தாண்டுத் திட்டங்கள் போன்ற பொருளாதாரக் கொள்கைகளினாலேற்படுகின்ற விளைவுகளை மதிப்பிடவும் தேசவருவாய்ப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் உதவுகின்றன. உற்பத்தியாளர்கள் தங்களுடைய உற்பத்திப் பொருட்களுக்காகவும், பணிகளுக்காகவும் பெறுகின்ற மொத்தத் தொகை காரணிச் செலவினடிப்படையிலமைந்த தேசவருவாய் என்றும், பொருட்களுக்காகவும், பணிகளுக்காகவும் நுகர்வோர் செலுத்துகின்ற மொத்த தொகை காரணி விலைகளின் அடிப்படையிலமைந்த தேசவருவாயென்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. தேசவருவாயானது கடந்த கால, தற்கால தேச உற்பத்தியை அளவிடுகின்ற அளவுகோலாகவும், வருங்கால உற்பத்தி திட்டங்களின் முன் கணிப்பாகவும் பயன்படுகிறது. தேச வருவாயைக் கணக்கிடும் முறைகளுள் சில முறைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(1) *நிகர உற்பத்தி முறை*

இம்முறையில், முதலில் பலதிறப்பட்ட உற்பத்திப் பிரிவுகளிலும் உற்பத்திச் செய்யப்பட்ட சரக்குகளின் மொத்த மதிப்பு கணக்கிடப்படுகிறது. பின்னர் இந்த மொத்த மதிப்பிலிருந்து உற்பத்திக்குப் பயன்பட்ட மூலப் பொருட்களின் மதிப்பு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உற்பத்திப் பணிகளுக்காகச் செலவிடப்பட்ட தொகைகள், உற்பத்தி இயந்திரங்கள், கட்டிடங்கள் ஆகியவற்றின் தேய்மானங்கள் ஆகியவற்றைக் கழித்து கிடைக்கின்ற மொத்த உற்பத்தியின் நிகர மதிப்பு தேச வருவாயாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இம்முறை அவ்வளவு நம்பகமானதல்ல. ஆயினும் மிகவும் பின் தங்கிய நாடுகளில் இம்முறையே பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

(2) *வருவாய்ப்பங்கீட்டு முறை*

இம்முறையில் வருமானமாகப் பெறப்பட்ட மொத்தத் தொகைக்கும் உற்பத்தியின் போது பல்வேறு காரணிகளுக்காகச் செலவிடப்பட்ட மொத்த தொகைக்குமுள்ள வித்தியாசம் தேச வருவாயாகக் கொள்ளப்படுகிறது. வருமானமாகப் பெறப்படுகின்ற தொகைகளை வருமான வரிக்கணக்குகளிலிருந்தும், வருமானம் பற்றிய கூறு அளவெடுத்தல் முறைகளினாலும், குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டம் பற்றிய விசாரணைகளிலிருந்தும் பெறலாம். உற்பத்தியின்போது கூலிகள், சம்பளங்கள், தொழிலாளர் பாதுகாப்புக்காக அளிக்கப்படுகின்ற தொகைகள், போனசுகள், வட்டி, வாடகை முதலிய

காரணிகளுக்காகச் செலவிடப்படுகின்ற மொத்தத் தொகையை மொத்த வருமானத்திலிருந்து கழித்து தேச வருவாயை அளவிடலாம். ஆனால் இம்முறையில் பல குறைபாடுகள் உள்ளன. எல்லா வருமானங்களுக்கும் வரி விதிக்கப்படுவதில்லையாகையால், வருமான வரி ஏடுகளிலிருந்து எல்லாவகை வருமானங்களும் பற்றிய விவரங்களைப் பெறமுடியாது. மேலும், வருமான வரி ஏய்ப்புகளின் காரணமாக பெரும்பாலான வருமானங்கள் மறைக்கப்பட்டு விடுகின்றன.

(3) *இறுதி உற்பத்திப் பொருள் முறை*

இம்முறையில் பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட நிலையில் வருமானம் கணக்கிடப்படாமல், உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்கள் விற்பனைக்கு அனுப்பப்படும் நிலையில் வருமானம் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆனால் இம்முறையும் அவ்வளவு நம்பகமானதாகக் கருதப்படவில்லை.

ஒரு நாட்டில் பொருளாதார நிலைமைக்கேற்ப இவற்றுள் ஏதாவது ஒரு முறையைப் பின்பற்றியோ அல்லது பல முறைகளைக் கலந்து பின்பற்றியோ தேசவருமானம் கணக்கிடப்படுகிறது. இந்தியாவில் பொருளாதாரத் திட்டங்களுக்குப் பயன்படும் வகையில் தேசவருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்காக 1948—49 இல் இந்திய அரசாங்கம் தேச வருவாய்க் குழுவை அமைத்தது. இக்குழு முதல் இரு முறைகளைப் பின்பற்றி 1948-49 ஆம் ஆண்டில் தேச வருவாய் கணக்கிட்டது. வேளாண்மை, சுரங்கத்தொழில், தயாரிப்புத் தொழில், சிறு தொழில் ஆகியவற்றின் வருவாயை மதிப்பிட நிகர உற்பத்தி முறையும், வணிகம், போக்குவரத்து, தொடர்பு மற்றும் இதர பணிகள் சார்ந்த துறைகளின் வருவாயை மதிப்பிட வருவாய் பங்கீட்டு முறையும் பயன்படுத்தப்பட்டன. தேச வருவாய் நிறுவனமும் மத்திய புள்ளி விவர அமைப்பும் இதே முறைகளைப் பின்பற்றித் தேசவருவாய் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தன. இப்புள்ளி விவரங்கள் யாவும் தேச வருவாய் மதீப்பீடு என்ற ஏட்டில் வெளியிடப்பட்டன. இந்தியாவின் தேச வருவாய் மதிப்பீடு என்ற ஏட்டில் வெளியிடப்பட்டன. இந்தியாவின் தேச வருவாய் மதீப்பீடுகளை இன்னும் சிறந்த முறையில் கணக்கிடக் கூடிய வழி முறைகளைக்காண மத்திய புள்ளி விவர அமைப்பு முயன்று வருகிறது.

வினாத்தாள் 20.

1. மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பில் முக்கியத்துவத்தை விளக்கி இந்தியாவில் மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்புகள் பற்றிய அறிக்கைகளின் ஆழ்ந்த ஆய்வு ஒன்று தருக.

(மதுரை பி.காம். 1971 ஏப்.)

2. இந்தியாவில் மக்கள் கணிப்பு பற்றிய புள்ளி விவரங்களில் சிறப்பு அம்சங்களை விவரிக்கவும். அவைகளை இன்னும் நம்பகமுடையனவாகவும், பயனுள்ளவையாகவும், செய்வதற்கு நீங்கள் என்ன ஆலோசனைகள் கூறுவீர்கள்.

(சென்னை பி.காம். 1961 ஏப்.)

3. இந்தியாவில் வேளாண்மை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் குறித்து ஒரு கட்டுரை வரைக.

(மதுரை பி.காம். 1971 செப்.)

4. பின்வரும் ஏதேனும் ஒன்றினைப் பற்றிய சிறப்புப் பகுதிகளை விளக்குக :—

(அ) இந்தியாவில் தேச அளவில் கூறெடுப்பு விசாரணை

(ஆ) இந்தியாவில் வேளாண்மைத் தொழிலாளர் பற்றிய விசாரணை

(மதுரை பி.ஏ. 1791 ஏப்)

5. இந்தியாவில் தொழில்கள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பற்றி ஒரு கட்டுரை எழுதுக.

(சென்னை பி.காம். 1960 செப், 62 ஏப், 66 ஏப்.)

6. இந்தியாவில் விலைவாசிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைக் குறித்து ஒரு கட்டுரை எழுதுக.

7. இந்தியாவில் கூலிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக

8. இந்தியாவில் தேசவருவாய் என்ன பொருள்?

(மதுரை பி. ஏ. 1971 செப்.)

(9) சிறு குறிப்பு வரைக :

(அ) இந்தியாவில் வியாபாரம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்

(மதுரை பி.ஏ. 1971 செப்.)

(ஆ) இந்தியாவில் சேகரிக்கப்படும் விலைவாசிப் புள்ளி விவரங்கள்

(மதுரை பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

(இ) தேச அளவில் கூறெடுப்பு விசாரணை

(சென்னை பி.காம். 1965 செப், 1967 செப்)
(மதுரை பி.காம். 1969 ஏப். பி.ஏ. 1971 ஏப்.)

விடைகள்

பயிற்சி 3.

(1) 46 (2) 162.1 (3) 119 (4) 22.2 (5) 9.7 (6) 3.56 (7) 15.47 (8) 16.41 (9) 26 (10) 45.26 (11) 20 (12) 12.7 (13) 54.7 (14) 261.5 (15) ஆண் : 25.1, பெண் 24.9 (16) 24.2 (17) 189.4 (18) 54.6 (19) 98.1 (20) 14.

பயிற்சி 4.

(1) இ.அ. = 128 (2) 16.5 (3) 34.17 (4) இ.அ. = 29.1 ; கா$_1$ = 21.8 ; கா$_3$ = 40 (5) கா$_1$ = 54.9, இ. அ. = 62.38, கா$_3$ = 68.63 (6) இ.அ. = 41.67 ; கா$_1$ = 34.53 ; கா$_3$ = 46.98 ; நா$_{12}$ = 28.03 ; நா$_{65}$ = 44.01, ப$_2$ = 32.12 (7) இ.அ. = 19.5 ; நா$_{15}$ = 8 ; ப$_3$ = 14.5 ; ப$_7$ = 24.04 (8) நா$_8$ = 2.38 ; நா$_{32}$ = 35.55 ; ப$_4$ = 15.6 (9) இ.அ. = 8.8; கா$_1$ = 6.625 ; கா$_3$ = 12.75 (10) கா$_1$ = 56.27 ; கா$_3$ = 66.1 ; இ.அ. = 65.2 (11) இ.அ. = 40.5 ; கா$_1$ = 29.1 ; கா$_3$ = 49.2 (12) இ.அ. = 17.6 ; முகடு = 7.98 (13) இ.அ. = 19.08 ; முகடு = 18.2 (14) இ. அ. = 12.14 ; முகடு = 11.87 (15) இ. அ. = 24.22 ; முகடு = 22.78 (16) அ : 58.53 ; ஆ : 92.5% (17) அ : இ.அ. = 222.3 ; முகடு 233.7 ஆ : $33\frac{1}{3}$ இ : 175.62 (18) 44.1 (19) 51.36 (20) 21.07.

பயிற்சி 5.

(1) 4.564% (2) பெ.ச. = ரூ. 55.34 ; இ.ச. = ரூ. 28.8 (3) 65.36 (4) 73.3 (5) 14.1 (6) (அ) 69.2 ; (ஆ) 72.4 ; (இ) 71.6 ; ஆ சிறந்தது (7) இ.ச. = 23.4 மைல்/மணி (8) 192 மைல்/மணி (8) சீர்படா வேலையின்மை வீதம் : 91.5, 91.0 ; தரப்படுத்தப்பட்ட வேலையின்மை வீதம் 97.7 ; தரமான மக்கட் தொகுதி சிறந்தது.

பயிற்சி 6.

(1) 14.4 (2) கா.வி. = 6.72 ; கா.வி.கெ. = 0.305 ; (3) 2.845 ; 0.079 (4) 9.35 ; 0.189 (5) 11.66 ; 0.62 (6) இ.அ. = 34.7 ; ச.வி. = 9.6 ; ச.வி.கெ. = 0.27 (7) 16.37 ; 0.07 (8) 2.85 ; 0.93 (9) 10.56 (10) 128.5 ; 12.36 (11) 9.65 (12) 510 ; 0.29.

பயிற்சி 7.

(1) (அ) 48 (ஆ) 52.5 (இ) 52.6 (ஈ) 13.2 (2) x : 2%, y : 1.9% (3) (அ) 51.6 (ஆ) 14.96 ; கெழு : (அ) 19.8% ; (ஆ) 14.1% ; அ. (4) (i) 39.2% (ii) 13.6% மாணவன் 2 (5) 2.1 (6) 1.94 (7) 56 55% (8) 6 (9) 4.08 (10) 4.65 (11) 25.5 ; 12.0 (12) 16.66 (13) 11.6 (14) B (15) A : 31.6 ; 50.4% B : 25 7 ; 47.1% A கடுமையானது (16) 12.3 ; 4.01 (17) 21.5 ; 5.59 (18) 33 ; 5.97 (19) 20.9 ; 7.93 (20) 63.06 ; 13.5 (21 39.95 ; 14.97 (22) 72.5 ; 23.32 (23) 58.5 ; 13.5 (24) 23 ; 4.96 (25) 50 ; 17.66 (26) 153.8 21.77 (27) 116 ; 7.75 (28) 59 ; 27.75 (29) $x_1 = 120$; $N_2 = 200$; $\sigma_2 = 16.39$ (30) (அ) A : ரூ. 30765 ; B : ரூ. 30780 ; B. (ஆ) A : 19% ; B : 23% ; B (இ) 49.90 ; 10.8 (31) 10.03 ; 51.45.

பயிற்சி 8.

(1) .048 ; 0.05 (2) 0.29 (3) —0.16 (4) 0.18 (5) —0.274 (6) —.098 ; —.36 (7) —.16 (8) —.75 (9) $\mu_2 = 6$; $\mu_1{}^1 = 5$; $\mu_2{}^1 = 31$; $\mu_3{}^1 = 141$; $\beta_1 = 25.3$ (11) $\bar{x} = 50.6$; $\sigma = 1.13$; $\alpha_3{}^1/^2 = -2.21$ (14) $\mu_2 = 2.49$; $\mu_3 = 0.7$; $\mu_4 = 18.33$; $\beta_1 = 0.03$; $\beta_2 = 3$ (15) $\mu_2 = 14.75$; $\mu_3 = 39.75$; $\mu_4 = 142.31$; $\beta_2 < 3$ மிகைத் தட்டை (16) 4.05 குறைத்தட்டை (17) $\mu_3 = 81$; $\mu_4 = 14817$; $\beta_2 = 2.258$ மிகைத்தட்டை.

பயிற்சி 9.

(1) .988 (2) —.79 (3) .88 (4) .99 (5) —.66 (6) .90 (7) .513 (8) .7989 (9) .93 (10) .55 (11) .826 (12) .99 (13) .675 (14) .67 (15) 95 (16) —.99 (17) .89 (18) .672 (19) .74 (20) .39 (21) .31 (22) .0017 (23) .7 (24) —.84 (25) .86 (26) .90 (27) .515 (28) .22 (29) நடுவர்கள் 1ம் 3ம் (30) .54 (31) .59 (32) —.9 (33) —.33 (34) .816 (35) —1.

பயிற்சி 10.

(1) $y = 0.7\,x + 12.3$ (2) $y = 1.33\,x + 0.72$

(3) $y = -0.028\,x^2 + 2.06\,x + 37$

(4) $y = 0.083\,x^2 + 4.964\,x + 13.45$

(5) $y = 11.58\,e^{-\text{[illegible]}\,x}$

(6) $y = 4.642\,e^{\text{[illegible]}\,x}$

(7) $y = 103.1\,x^{-2.02}$

(8) $y = 15.697\,(2.3158)^x$.

பயிற்சி 11.

(1) $r = 0.67$; $\bar{x} = 40.72$; $\bar{y} = -9.54$

(2) $r = 0.6$; $\bar{x} = 64.45$; $\bar{y} = -76.56$

(3) $\bar{x} = -2.128$; $\bar{y} = -3.846$; $\sigma_y^2 = 6$; $\sigma_x^2 = ?$

(4) $x - 40 = .64\,(y - 35)$
$y - 35 = .25\,(x - 40)$; 44.48

(5) $x - 25 = .4\,(y - 40)$
$y - 40 = 1.6\,(x - 25)$; 46.4

(6) $x - 50 = .25\,(y - 100)$
$y - 100 = 1\,(x - 50)$; $x = 55$

(7) $x - 4.8 = .35\,(y - 5.8)$
$y - 5.8 = .216\,(x - 4.8)$; $r = .167$

(8) $x - 22.5 = 1.746\,(y - 18.9)$
$y - 18.9 = .5272\,(x - 22.5)$

(9) $x - 68.25 = .52\,(y - 68.5)$
$y - 68.5 = .42\,(x - 68.25)$; 68.2

(10) $x - 30 = .75\,(y - 25)$
$y - 25 = .89\,(x - 30)$; 26.78

(11) 331.5 (12) .81.

பயிற்சி 12.

(1) $(\alpha)=50$, $(\beta)=60$, $(A\beta)=20$, $(\alpha B)=10$, $(\alpha\beta)=40$

(2) $(AB\gamma)=544$, $(\alpha\beta C)=0$, $(A\beta C)=358$, $(A\beta\gamma)=2022$, $(\alpha\beta\gamma)=3174$, $(\alpha\beta\gamma)=40146$, $(\alpha\beta C)=870$

(3) $(A)=4516$, $(B)=5706$, $(C)=1498$, $(AB)=1774$, $(BC)=706$, $(AC)=748$

(4) $(\alpha)=154$, $(\beta)=164$, $(\gamma)=156$, $(\alpha\beta)=105$, $(\alpha\gamma)=107$, $(\beta\gamma)=111$

(5) 150 (6) $Q=0.71$: பயிற்சியினுல் பலன் ஏற்பட்டுள்ளது

(8) $Q=.59$: மலேரியா தடுப்பில் கொய்ஞு பயனளிக்கிறது

(9) $Q=0.9$.

பயிற்சி 13.

(1) 300 (2) 207.3 (3) 24.2 (4) 19.84 (5) 380.5 (6) 78.35 ; 80.59 (7) .123 ; .0904 (8) 57.457 (9) 40.5 ; 41.5 (10) 187.79 (11) 5281 (12) 27.16 ; 50.44 (13) 49.317 (14) 41.5 (15) 18 (16) 14.23 (17) 20.449 (18) 180.07 (19) 25 (20) 48.

பயிற்சி 14.

(4) $y=90+2x$; 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96

(5) $y=66.3+1.27x$; 72.65, 73.92 (6) $y=88.2+5.4x$

(7) $y=111+2.3x$; 121.35, 125.95 (8) $y=5.46-0.15x$

(9) $y=4.33+0.31x$ (12) $\log y=0.96789+0.03495x$

(13) 99.5, 80.2, 78.3, 73.6, 82.0, 91.7, 100.9, 109.6, 108.7, 111.8, 127.0, 136.7 (14) 107, 96.4, 94.5, 102.1.

பயிற்சி 15.

(1) 195.2, 193.65, 195.2, 194.8 (2) (i) 136, (ii) 135.3, (iii) 134.7, (iv) 133.3 (3) 1940 : (i) 117.8 (ii) 116.9 ; 1941 :

(i) 158.9 (ii) 158.8 : 1942 : (i) 183.3. (ii) 181.8 (4) 83.62. 83.57. 83.6, 83.57. 100.8 (5) (i) 254.2 (ii) 250.6 (iii) 252.6 (6) 250, 250. 250. 250. 200 (7) 147.8 (8) 85 (9) 139.8 (10) (i) 102.3 (ii) 108.5 (iii) 105.3 (12) ஃபிஷர் : 49.2 (13) 100. 100. 159. 143. 120. 133 (14) 100. 101.66, 95.08. 103.4. 100. 114.16. 99.27. 109.6, 104.7. 87.8. 118.2. 91.9. 107.4. 100 (15) 100. 104.3. 104.1. 93.1. 103.2. 102 (16) 80. 88. 105, 95. 133 (17) 94. 98. 102. 95. 98. 100 (18) 100. 97.4. 139.87. 174.84. 166.1. 182.7 (19) 128.3 (20) 250.9 (21) 123.1 (22) 124.4 (23) 135 (24) 111.5 (25) 121.7.

பயிற்சி 16.

(1) (அ) $\frac{7}{40}$; (ஆ) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{4}{52C}$ (3) $\frac{8}{663}$ (4) $\frac{16}{5525}$

(5) $\frac{13000}{39151}$ (6) $\frac{3}{8}$ (7) (அ) $\frac{6}{6715}$ (ஆ) $\frac{3}{715}$ (8) (i) $\frac{55}{153}$

(ii) $\frac{77}{153}$ (iii) $\frac{7}{51}$ (9) $\frac{5}{6}$ (10) $\frac{35}{132}$ (11) $\frac{13}{46}$ (12) $\frac{49}{80}$ (13) $\frac{275}{504}$

(14) $\frac{5}{14}$ (15) $\frac{207}{625}$ (16) $\frac{37}{40}$ (17) $\frac{5}{6}$.

பயிற்சி 17.

(1) (i $\frac{1}{256}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{219}{256}$ (2) $\frac{1792}{6561}$ (3) (அ) 121 :

(ஆ) 194 (4) உண்மையான கூ. ச. 4.05 : தி. வி. 1.64 எதிர் பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் :—203. 1217. 3345. 5576, 6273. 5018. 2927. 1254. 392. 87. 14 : கூ. ச. 4 : தி. வி. 10.63 (5) (i) $\frac{1}{32}$

(ii) $\frac{1}{64}$ (6) $\frac{12393}{12500}$ (7) $\frac{496}{729}$.

பயிற்சி 18.

(1) $\frac{N}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-39)^2}{20}}$ (2) $y = \frac{N}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(x-15)^2}{20}}$; 32.81% (3) $y = \frac{N}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{4.5}}$ (4) 65.8, 84.2.

பயிற்சி 19.

(1) $t = 2.67$; கருத முடியாது ; (2) $t = 4.5$; கருத முடியாது (3) $t = 6.2$; நகர்ப்புற மக்கள் அதிகம் வாங்குகிறுர்கள். (4) $t = 5.47$; முக்கியத்துவமுள்ளது. (5) $t = 10.6$; முக்கியத்துவமுள்ளது. (6) $t = 4.2$ (மாறுபட்டவை) (7) $t = 10$; ஆஸ்தி அதிக உயரம் (8) $t = 2.3$ (வேறுபாடு இல்லை) (9) $t = 2.58$ (5% இல் வேறுபாடுள்ளது) (10) $t = 3.9$ (ஒருதலைப்பட்டது) (11) $t = 5.4$ (ஒருதலைப்பட்டது) (12) $t = 5$ (சமமில்லை) (13) $t = .166$ (முக்கியத்துவமுள்ளது) (14) $t = 7.6$ (முக்கியத்துவமுள்ளது) (15) $t = 1.7$ (வேறுபாடு இல்லை) (16) $t = 6.6$ (வேறுபாடுள்ளது) (17) $t = 3.25$ (வேறுபாடுள்ளது) (18) (i) $t = 6.2$ (முக்கியத்துவமுள்ளது) (ii) $t = .88$ (முக்கியத்துவமற்றது).

மடக்கைப் பட்டியல்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Mean difference - சராசரி வேறுபாடு

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9653	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Mean difference - சராசரி வேறுபாடு

எதிர்மடக்கைப் பட்டியல்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Mean difference - சராசரி வேறுபாடு

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3903	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4457	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Mean difference - சராசரி வேறுபாடு

பார்வை நூல் பட்டியல்

1. Economic Statistics ... CRUM PATTON AND TEBBUTT
2. An Outline of Statistics ... SAMUEL HAYS
3. Introduction to Statistical Methods ... B. C. BROOKES & W. F. L. DICK
4. Business Statistics ... RIGGLEMAN & FRISBEE
5. Elementary Statistical Methods ... WILLIAM ADDISON NEISWANGER
6. Statistics for Economists ... R. G. D. ALLEN
7. Applied General Statistics... CROXTEN & COWDEN
8. Business and Economic Statistics ... R. RAMAKRISHNAN & D. BASKARAN
9. Introduction to Statistical Calculations ... J. MOUNSEY
10. Practical Problems in Statistics (Parts I & II) ... G. L. SRIVASTAVA & A. K. SHASTRI
11. Economics ... GEORGE SOULE
12. எண்சார் கணிதவியல் ... ஆர். இராமகிருஷ்ணன்.

கலைச் சொற்கள்

A

Absolute — தனி
,, deviation — தனி விலக்கம்
,, error — தனிப் பிழை
Acceptance — ஏற்பு
,, Sample — ஏற்புடைக் கூறு
Accountancy — கணக்குப் பதிவியல்
Add — கூட்டு
Addition — கூட்டல்
Adjustment — சரிக்கட்டுதல்
Administration — நிருவாகம்
Agent — பதிலாள்
Agricultural Statistics — வேளாண்மைப் புள்ளி விவரம்
Algebra — இயற்கணிதம்
Algebraic formula — இயற்கணிதச் சூத்திரம்
Amount — தொகை
Analysis — பகுப்பாய்வு
Antilogarithm — எதிர்மடக்கை
Aposteriori — காரியகாரண
Applied statistics — பயன்முறைப்புள்ளியியல்
Approximate — தோராயமான
,, value — தோராய மதிப்பு
Apriori — காரணகாரிய
Arbitrary — யாதாமொரு
Arithmetic — எண் கணிதம்
Arithmetic mean — கூட்டுச் சராசரி
Ascending order — ஏறுவரிசை
Association — தொடர்பு

Association coefficient of	—	தொடர்புக் கெழு
.. positive	—	நேர் அல்லது நிறைத் தொடர்பு
.. negative	—	எதிர் அல்லது குறைத் தொடர்பு
.. partial	—	பகுதித் தொடர்பு
Association of attributes	—	பண்புகளின் தொடர்பு
Assumption	—	தற்கோள்
Asymmetrical	—	சமச் சீரில்லாத
.. distribution	—	சீரில்லாப் பரவல்
Average	—	சராசரி
.. moving	—	நகரும் சராசரி, இயங்கு சராசரி
Axis	—	அச்சு

B

Bank	—	பாங்கு
Bar diagram	—	பட்டை விளக்கப்படம்
Base year	—	அடிப்படை ஆண்டு
Bell shaped	—	மணிவடிவமான
Best fit	—	உத்தமப் பொருத்தமான, மிகப் பொருத்தமான
Biased	—	ஒரு தலைப்பட்ட
Bimodal	—	இரு முகட்டு
Binomial distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
Bivariate	—	இருமாறி
Blank table	—	வெற்றுப்பட்டியல்
Boundary	—	எல்லை
Business	—	தொழில்
Business cycle	—	தொழிற் சுழற்சி

C

Calculate	—	கணக்கிடு
Calculation	—	கணக்கீடு
Capital	—	முதல், மூலதனம்
Case	—	வகை
Cause and effect relation ship	—	காரண விளைவுத் தொடர்பு
Casual relation ship	—	தற்செயல் தொடர்பு
Census	—	மக்கள் கணிப்பு
,, method	—	முழுக் கணிப்பு முறை

Central moment — மைய விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி
Central tendency — மையப்போக்கு
Chart — வரைபடம்
.. Control — கட்டுப்பாடு விளக்கப்படம்
.. range — வீச்சு விளக்கப் படம்
,, Statistical — புள்ளி விவரப்படம்
Class — இனம், பிரிவு
.. boundary — பிரிவு எல்லை
.. interval — பிரிவு இடைவெளி
.. frequency — பிரிவு நிகழ்வெண்
,, limit — பிரிவு எல்லை
.. midvalue — பிரிவு நடுமதிப்பு, பிரிவுமைய மதிப்பு
.. ultimate — இறுதிப் பிரிவு, கடைப்பிரிவு
Classification — வகுப்பாக்கம், பாகுபாடு
Coefficient — கெழு
.. of association — தொடர்புக் கெழு, பண்புறவுக் கெழு
.. of correlation — ஒட்டுறவுக் கெழு, இடையுறவுக் கெழு
,, regression — தொடர்புக் கெழு
.. of dispersion — பரவுகைக் கெழு
,, of variation — மாறு விகிதக் கெழு
Commerce — வணிகம்
Company — கம்பெனி
Compensating error — ஈடுகட்டும் பிழை
Component bar diagram — கூறு பட்டை விளக்கப் படம்
Constant — மாறிலி
Continuous variable — தொடர்மாறி
Consumer — நுகர்வோர்
Consumption — நுகர்வு
Control chart — கட்டுப்பாடு விளக்கப்படம்
Correlation — ஒட்டுறவு, இடையுறவு
.. coefficient of — ஒட்டுறவுக் கெழு
,, multiple — பலதர ஒட்டுறவு
.. nonsense — பொருளில்லா ஒட்டுறவு
.. partial — பகுதி ஒட்டுறவு
.. rank — வரிசை ஒட்டுறவு
,, serial — தொடர் ஒட்டுறவு

Cost of living — வாழ்க்கைச் செலவு
Cumulative frequency — வளர் நிகழ்வெண்
.. curve — வளர் நிகழ்வெண் வரை
.. distribution — வளர் நிகழ்வெண் பரவல்
.. polygon — வளர் நிகழ்வுப் பல கோணம்
.. greater than — மேலின வளர் நிகழ்வெண்
.. less than — கீழின வளர் நிகழ்வெண்

D

Data — விவரம்
.. primary — முதனிலை விவரங்கள்
.. secondary — இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
.. statistical — புள்ளி விவரங்கள்
Decimal — தசம பின்னம்
Definition — வரையறை
Demand — தேவை
Dependent variable — சார்ந்த மாறி, சார்புடைமாறி
Deposit — வைப்பு
Descending order — இறங்கு வரிசை
Deviation — விலகம்
.. average — சராசரி விலக்கம்
.. mean — கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
.. quartile — கால்ம விலக்கம்
.. standard — திட்ட விலக்கம்
Diagram — விளக்கப்படம்
.. bar — பட்டை விளக்கப்படம்
.. circle or pie — வட்ட (பை) விளக்கப்படம்
.. scatter — சிதறல் விளக்கப் படம்
.. Die — பகடை, தாயக்கட்டை
Difference — வித்தியாசம்
Discrete variable — தனித்தனி மாறி
Dispersion — பரவுகை
Distribution — பரவல்

E

Economics — பொருளாதாரம்
Elasticity — நெகிழ்ச்சி
Elasticity of demand — தேவை நெகழ்ச்சி

Empirical formula — அனுபவ சூத்திரம்
Enquiry — விவரம் கேட்பது, கணக்கெடுப்பு
Enumerator — கணிப்பாளர்
Error — பிழை
,, absolute — தனிப் பிழை
,, sampling — கூறு பண்புகளின் பிழை
,, standard — திட்டப் பிழை
Estimation — மதிப்பீடு
Event — நிகழ்ச்சி
,, favourable — சாதகமான
,, mutually exclusive — ஒன்றையொன்று விலக்கு நிகழ்ச்சிகள்

F

Factor — காரணி
,, reversal test — காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை
Finite — முடிவுள்ள
Fluctuation — ஏற்ற விறக்கம்
,, cyclical — சுழல் ஏற்றவிறக்கம்
,, random — ஒழுங்கற்ற ஏற்ற விறக்கம்
,, seasonal — பருவகால ஏற்றத்தாழ்வுகள்
Formula — சூத்திரம், வாய்பாடு
Fraction — பின்னம்
Frequency — நிகழ்வெண்
,, curve — நிகழ்வெண் வரை
,, distribution — நிகழ்வெண் பரவல்
,, graph — நிகழ்வு விளக்கப் படம்
,, polygon — நிகழ்வுப் பலகோணம்
,, table — நிகழ்வுப் பட்டியல்

G

Geometric mean — பெருக்குச் சராசரி
Goods — பொருட்கள், சரக்குகள்
Graph — வரைபடம்
Graphical method — வரைபட முறை

H

Harmonic mean — இசைச் சராசரி

Histogram — பரவல் செவ்வகப் படம்
Horizontal line — கிடைக்கோடு
Horizontal axis — கிடையச்சு

I

Independent — சார்பற்ற
.. event — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
.. variable — சாராமாறி
Index number — குறியீட்டெண்
.. aggregate — மொத்தக் குறியீட்டெண்
.. cost of living — வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்
. ideal — விழுமிய குறியீட்டெண்
.. weighted — நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
.. whole sale — முழுவிலைக் குறியீட்டெண்
Inertia of large numbers — பேரினங்களின்மாறுப்பொதுமை
Infinite — முடிவில்லாத, கந்தழி
Infinity — முடிவிலி
Interpolation — இடைச் செருகல்
Interval — இடைவெளி
Inverse — நேர்மாறான
Item — உறுப்பு

K

Kurtosis — தட்டையளவு
.. leptokurtic — குறைத்தட்டை
.. platykurtic — மிகைத்தட்டை

L

Large sample — பெருங்கூறு
Labour — உழைப்பு
Law — விதி
Law of statistical regularity — புள்ளி விவர ஒழுங்கு நியதி
Limit — எல்லை
.. lower — கீழ் எல்லை
.. upper — மேல் எல்லை
Line — நேர்கோடு
Logarithm — மடக்கை

M

Market	— சந்தை
Maximum	— மீப்பெரு
Minimum	— மீச்சிறு
Mean	— சராசரி
,, arithmetic	— கூட்டுச் சராசரி
,, geometric	— பெருக்குச் சராசரி
,, harmonic	— இசைச் சராசரி
Median	— இடைநிலையளவு
Mode	— முகடு, முகட்டளவு
Moment	— விலக்கப் பெருக்கல் சராசரி
Multiply	— பெருக்கு
Multiplication	— பெருக்கல்

N

Negative	— எதிர், குறை
Normal curve	— இயல் நிலைவரை
,, distribution	— இயல் நிலைப்பரவல்
Null hypothesis	— இல்லெனும் எடுகோள்

O

Ogive	— வளர் நிகழ்வரை, ஓகைவ்
,, less than	— கீழின வளர்நிகழ்வரை
,, greater than	— மேலின வளர்நிகழ்வரை
Open interval	— திறந்த இடைவெளி
Origin	— ஆதி

P

Pair	— சோடி
Parabola	— பரவளையம்
Parameter	— புள்ளியியல் பண்பளவை
Percent	— சதவீதம்
Percentile	— நூற்றுமம், நூற்றுமானம்
Polygon	— பலகோணம்
Positive	— நேர்
Price relative	— விலைவிகிதம்
Primary data	— முதனிலை விவரம்

Probability — நிகழ்தகவு
Proof — நிறுவல்
Proportion — விகித சமம்

Q

Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்
Quartile — கால்மம்
,, lower — முதல் கால்மம் ; கீழ்க்கால்மம்
,, upper — மூன்றும் கால்மம், மேல்கால்மம்
,, deviation — கால்ம விலக்கம்
,, range — கால்ம இடைவெளி
Questionnaire — வினாத் தொகுதி, கேள்விப் பட்டியல்

R

Random — சரிசம வாய்ப்புள்ள
Range — வீச்சு
Rank — தரம்
Rank correlation — வரிசை ஒட்டுறவு
Rank order — தர வரிசை
Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
Real — மெய்யான
Regression — மாறிகளின் தொடர்பு
,, coefficient — மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு
,, equation — தொடர்புச் சமன்பாடு
,, line — தொடர்புக்கோடு
Residue — எச்சம்

S

Sample — கூறு
,, multistage — பலநிலைக் கூறு
,, purposive — நோக்குடைக் கூறு
,, quota — அளவுடைக் கூறு
,, random — சமவாய்ப்புக் கூறு
,, Stratified — படுகைக் கூறு
,, Systematic — முறையான கூறு

Sampling — கூறெடுத்தல்
Sampling distribution — கூறு பரவல்
Sampling error — கூறு பண்புகளின் பிழை
Scatter diagram — சிதறல் விளக்கப் படம்
Schedule — வினாப்பட்டியல்
Semi interquartile range — கால்ம இடைவெளிப் பாதி
Significance — முக்கியத்துவம்
,, test of — முக்கியத்துவ சோதனை
Significant level — முக்கியத்துவ எல்லை
Skewness — கோட்டம்
,, co efficient of — கோட்டக்கெழு
Standard deviation — திட்ட விலக்கம்
Standard error — திட்டப் பிழை
Statistic — புள்ளியியல் அளவை
Statistics — புள்ளியியல், புள்ளி விவரம்
Surved — அளவெடுப்பு
Symbol — குறியீடு
Symmetrical distribution — சீரான பரவல்

T

Table — பட்டியல்
Tabulate — பட்டியலமை
Tabulation — பட்டியலமைத்தல்
Tally mark — கணிப்புக் குறி
Test — சோதனை
Test time reveral — கால எதிர் மாற்றுச் சோதனை
Theory — கொள்கை
Trend — போக்கு
Trend Secular — நீள்காலப் போக்கு

U

Unit — அலகு
Upper class limit — மேல் பிரிவு எல்லை
Upper quartile — மேல் கால்மம், மூன்றும் கால்மம்

V

Variable — மாறி
Variation — மாறுபாடு

Variance	—	விலக்க வர்க்கச் சராசரி
Vertical	—	நிலைக்குத்து

W

Weight	—	நிறை
Weighted average	—	நிறையிட்ட சராசரி
Weighted index number	—	நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Whole number	—	முழு எண்
Whole Sale index number	—	முழு விலைக் குறியீட்டெண்

X

X-axis	—	x அச்சு (கிடையச்சு)

Y

Y-axis	—	y அச்சு (நிலையச்சு)